好题与妙解（四）

——2016 新星秋季精品班两次测试题

冷岗松　叶思

2016 年上海数学新星秋季的精品班举行了两次测试 (小考). 每次测试四题, 时间 2 小时. 本文介绍这两次测试试题的解答. 我们将用题 1.x 表示第 1 次测试的第 x 题, 题 2.y 的意义类似.

题 1.1　设 $k>n>1$ 是整数, $a_1,a_2,\cdots,a_k\in(0,1)$. 证明:

$$\min\left\{a_1\left(1-a_2\right)^n,a_2\left(1-a_3\right)^n,\cdots,a_k\left(1-a_1\right)^n\right\}\le\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

证法一 由算术-几何平均值不等式可得

$$\begin{aligned}x(1-x)^n&=\frac{1}{n}\cdot nx(1-x)^n=\frac{1}{n}\cdot nx\cdot\underbrace{(1-x)\cdots(1-x)}_{n\text{ 个}}\\&\le\frac{1}{n}\left(\frac{nx+n(1-x)}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}},\quad\forall x\in(0,1).\end{aligned}$$

因此

$$\prod_{i=1}^{k}a_i\left(1-a_i\right)^n\le\left(\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right)^k.$$

上式可写为

$$\prod_{i=1}^{k}a_i\left(1-a_{i+1}\right)^n\le\left(\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right)^k,$$

其中 $a_{k+1}=a_1$.

故由抽屉原理知一定存在 $1\le i\le k$ 使得 $a_i\left(1-a_{i+1}\right)^n\le\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. □

证法二 设 $\max\limits_{1\le i\le n}\left(a_i\right)=a_j$, 则

$$\text{左边}\le a_{j-1}\left(1-a_j\right)^n\le a_j\left(1-a_j\right)^n=\frac{1}{n}\cdot na_j\left(1-a_j\right)^n$$

收稿日期: 2016-12-18.

$$\le \frac{1}{n}\left(\frac{na_j+n\left(1-a_j\right)}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{n^n}{\left(n+1\right)^{n+1}}.$$

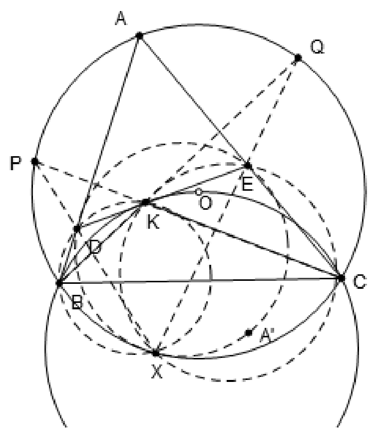
$\square$

证法三 若存在 $1 \le i \le n$ 使得 $a_i \le a_{i+1}$, 其中 $a_{n+1}=a_1$, 则

$$\begin{aligned}
\text{左边} &\le a_i\left(1-a_{i+1}\right)^n \le a_{i+1}\left(1-a_{i+1}\right)^n \\
&\le \frac{1}{n}\cdot na_{i+1}\left(1-a_{i+1}\right)^n \\
&\le \frac{1}{n}\left(\frac{na_{i+1}+n\left(1-a_{i+1}\right)}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \frac{n^n}{\left(n+1\right)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

若对任意 $1 \le i \le n$, $a_i \le a_{i+1}$ 都不成立, 则有 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_1$, 矛盾! 证毕. $\square$

题 1.2 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, $\triangle BOC$ 的外接圆的一条切线 l 与边 AB, AC 分别交于点 D, E $(D, E \ne A)$. 点 A' 是 A 关于直线 l 的对称点. 证明: $\triangle A'DE$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切.



证法一 记直线 l 与 $\triangle BOC$ 的外接圆的切点为 K. 令 $\triangle BDK$ 与 $\triangle CEK$ 的外接圆的交点为 X, $X \ne K$. 因为

$$\begin{aligned}
\angle BXC &= \angle BXK + \angle KXC \\
&= \angle ADK + \angle KEA \\
&= 180^\circ - \angle CAB,
\end{aligned}$$

所以点 X 在 $\triangle ABC$ 外接圆 κ 上.

另一方面,

$$\angle DXE = \angle DXK + \angle KXE$$

$$
\begin{aligned}
&= \angle DBK + \angle KCE \\
&= \angle CKB - \angle CAB \\
&= \angle CAB = \angle DA'E,
\end{aligned}
$$

所以 X 也在 $\triangle A'DE$ 的外接圆 κ_1 上.

下面我们将证明圆 κ, κ_1 切于点 X.

如果 P 是直线 CK 和 XD 的交点, 则

$$
\begin{aligned}
\angle XPC &= \angle XDE - \angle CKE \\
&= \angle XBK - \angle CBK \\
&= \angle XBC,
\end{aligned}
$$

这说明点 P 位于圆 κ 上. 类似地, 直线 BK 和 XE 的交点 Q 在圆 κ 上.

又由 $\angle XPQ = \angle XBQ = \angle XDK$, 便知 $PQ \parallel DE$.

因此 $\triangle XDE$ 和 $\triangle XPQ$ 是关于位似中心 X 位似, 所以它们的外接圆相切于点 X. □

证法二 令直线 BK 和 CK 与 $\triangle ABC$ 的外接圆分别相交于点 Q 和点 P.

因为 $\angle CPQ = \angle CBQ = \angle CKE$, 我们有 $PQ \parallel DE$.

令直线 DP 和 EQ 相交于点 X. 因为点 $D = PX \cap AB$, $K = PC \cap QB$, $E = AC \cap QX$ 三点共线, 由 Pascal 的逆定理得 X 在由点 A, B, C, P, Q 形成的同一个圆上.

由于 $\angle DKB = \angle KCB = \angle PQX$, 则 $DE \parallel PQ$, 因此 $\triangle XDE \backsim \triangle XPQ$, 所以它们的外接圆彼此相切于位似中心 X.

最后, 注意到

$$
\begin{aligned}
\angle DXE = \angle PXQ &= \angle PCA + \angle ABQ \\
&= \angle BKC - \angle BAC \\
&= \angle BAC = \angle DA'E,
\end{aligned}
$$

所以点 A' 在 $\triangle DEX$ 的外接圆上. □

题 1.3 设 $2 = p_1 < p_2 < \cdots$ 是全体素数. 证明: 对 $n > 1$, $p_1 p_2 \cdots p_n - 1$ 不是整数的完全方幂.

证明 设有 $n > 1$, 使 $p_1 \cdots p_n - 1 = a^k$ ①, 则 $a > 1$, 从而 a 有素因子, 设素数 $p \mid a$. 则 $p \geq p_{n+1}$ (若 $p \leq p_n$, 则 $p \mid p_1 \cdots p_n$, 由 ① 知 $p \mid 1$, 矛盾).

我们证明 $k<n$. 因为若 $k\ge n$, 则 ① 的右边 $\ge p^k\ge p^n\ge p_{n+1}^n$. 而 ① 的左边 $<p_n^n-1<p_{n+1}^n$, 矛盾. 故 $1<k<n$.

设 q 是 k 的一个素因子, 则由 $q<n<p_n$ 可知 q 是某个 p_i, $i=1,\cdots,n-1$.

记 $x=a^{\frac{k}{q}}$, 则 ① 化为

$$p_1\cdots p_n-1=x^q. \qquad ②$$

首先, q 必是奇素数. 因为若 $q=2$, 则由于 $3\nmid x$, 故 $x^2\equiv 1 \pmod 3$, 但 ② 左边 $\equiv 0-1=2 \pmod 3$, 矛盾. 故 q 是奇素数. 由 ② 推出 $x^q\equiv -1 \pmod q$ (因 q 是 $p_1,\cdots,p_n$ 之一).

结合费马小定理推出 $x\equiv -1 \pmod q$ (因 $x^q\equiv x \pmod q$), 即 $x=-1+qA$, 故

$$\begin{aligned}x^q=(-1+qA)^q&=-1+qA\binom{q}{1}+(qA)^2\binom{q}{2}+\cdots\\&\equiv -1 \pmod{q^2}.\end{aligned}$$

即 $q^2 \mid x^q+1$, 由 ② 知 $q^2 \mid p_1\cdots p_n$, 这不可能 (因 $p_1,\cdots,p_{n-1}$ 互不相同). $\square$

题 1.4 一个古代部落用一种语言, 它的词仅由两个字母 A,B 构成. 研究者发现长度相等的任何两个词至少有三个位置不同. 例如: 词 $ABBAA$ 和词 $AAAAB$ 在第 2, 第 3 和第 5 个位置不同.

设整数 $n\ge 3$. 证明: 在这种语言中, 长度为 n 的词不能多于 $\left\lfloor\frac{2^n}{n+1}\right\rfloor$ 个.

证明 设 C 表示长度为 n 的所有由 A,B 构成的字串, 则有 $|C|=2^n$. 如果对 $\forall x,y\in C$, 令 $d(x,y)$ 表示 x 与 y 对应位置字母不同的个数 (即定义距离). 显然地 $d(x,x)=0$, $d(x,y)=d(y,x)$. 对 $\forall x\in C$, 我们定义 $C_x=\left\{y\in C \,\middle|\, d(x,y)\le 1\right\}$. 则 $|C_x|=n+1$.

如果 a,b 是这种给定语言中的长度为 n 的两个词, 则 $d(a,b)\ge 3$, 因此

$$C_a\cap C_b=\emptyset.$$

令 D 是这种语言中长度为 n 的所有词的集合, 则

$$\bigcup_{a\in D}C_a\subset C.$$

注意到 $\{C_a\}_{a\in D}$ 是互不相交的, 则

$$\left|\bigcup_{a\in D}C_a\right|\le|C|,\ 且\left|\bigcup_{a\in D}C_a\right|=(n+1)\cdot|D|.$$

因此

$$(n+1)\cdot|D|\le 2^n.$$

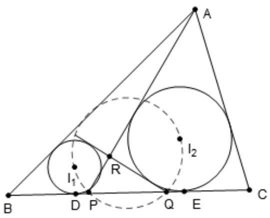
故

$$|D|\le\frac{2^n}{n+1},$$

结论成立. □

题 2.1 设 P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 内的一点 (不同于 B 和 C), I_1, I_2 分别是 $\triangle ABP$ 和 $\triangle APC$ 的内心. $\triangle I_1PI_2$ 的外接圆与边 BC 相交于 P 和 Q. 证明: $AB+QC=AC+QB$.

证明 不失一般性, 不妨设 Q 在线段 PC 上,



令 ω_1 和 ω_2 分别表示 $\triangle ABP$ 和 $\triangle APC$ 的内切圆. 令关于圆 ω_1 和 ω_2 的内部的切线 l (不同于 AP) 与边 BC 交于 Q'. 我们证明 I_1,P,Q' 和 I_2 是共圆的, 即有 $Q'\equiv Q$. 令 R 是直线 l 和 AP 的交点, 由于 I_1 和 I_2 分别位于 $\angle PQ'R$ 的内角平分线和外角平分线上, 我们有 $\angle I_1Q'I_2=90^\circ$.

类似地, 我们有 $\angle I_1PI_2=90^\circ$. 因此, 这个四边形 $I_1PQ'I_2$ 在一个圆上, 所以 $Q'\equiv Q$. 又注意到

$$DP=\frac{PB+PA-AB}{2},\quad PE=\frac{PC+PA-AC}{2},$$

故

$$DP=QE=PE-PQ.$$

于是

$$PQ=PE-DP=\frac{AB+PC-AC-PB}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned}AC+QB&=AC+BP+2PQ-PQ\\&=AB+PC-PQ=AB+QC.\end{aligned}$$

□

题 2.2 求所有正整数 n 使得存在 n 的一个因子 d 满足

$$dn+1\mid d^2+n^2.$$

解 设 $n=ad$, 则条件 $dn+1 \mid d^2+n^2$ 可重写为 $ad^2+1 \mid d^2+a^2d^2$. 因此

$$ad^2+1 \mid d^2+a^2d^2-a\cdot(ad^2+1)=d^2-a. \tag{$*$}$$

(1) 若 $d^2-a>0$, 则由 $(*)$ 知

$$d^2-a \geq ad^2+1,$$

注意到 a 是正整数便有

$$d^2 \geq ad^2+a+1>d^2,$$

矛盾!

(2) 若 $d^2-a<0$, 则 $a-d^2>0$, 由 $(*)$ 可得

$$a-d^2 \geq ad^2+1.$$

又 d 是正整数, 于是

$$a \geq ad^2+1+d^2>a,$$

矛盾!

由 (1), (2) 立得 $d^2-a=0$, 即 $a=d^2$. 此时便有 $n=d^3$, 即 n 为立方数.

另一方面, 设 n 为立方数, $n=d^3$, 则有

$$d^4+1 \mid d^2+d^6=d^2(d^4+1),$$

满足要求.

故满足题意的 n 是全体立方数. □

题 2.3 设 $P(z)=az^3+bz^2+cz+d$, 其中 a,b,c,d 均为复数, 且满足 $\mid a\mid=\mid b\mid=\mid c\mid=\mid d\mid=1$. 证明: 存在一个模为 1 的复数 z 使得 $\left|P(z)\right| \geq \sqrt{6}$.

证明 不妨设 $d=1$, 否则用 $(\frac{a}{d},\frac{b}{d},\frac{c}{d},1)$ 代替 (a,b,c,d).

再不妨设 $a=1$, 否则用 εz 代替 z, 这里 ε 是 $\varepsilon^3a=1$ 的某个复数. 此时

$$P(z)=z^3+bz^2+cz+1.$$

再设 $w=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, 则

$$\begin{aligned}
&\mid P(1)\mid^2+\mid P(w)\mid^2+\mid P(w^2)\mid^2\\
=&(2+b+c)(2+\bar{b}+\bar{c})+(2+w^2b+wc)(2+w\bar{b}+w^2\bar{c})\\
&+(2+wb+w^2c)(2+w^2\bar{b}+w\bar{c})=18.
\end{aligned}$$

因此 $\mid P(1)\mid, \mid P(w)\mid, \mid P(w^2)\mid$ 中至少有一个不小于 $\sqrt{6}$, 结论得证. □

题 2.4 求同时满足下面条件的正整数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{1000}\}$ 的个数:

(1) $a_1<a_2<\cdots<a_{1000}\le 2014$;

(2) $\left\{a_i+a_j \,\middle|\, 1\le i,j\le 1000, \text{且 } i+j\in A\right\}\subseteq A$.

解 如果 A 一定具有 $B\cup C$ 的形式, 其中 C 是 $\{2001,\cdots,2014\}$ 的子集, $B=\{1,2,\cdots,1000-\mid C\mid\}$, 则我们称 A 为"好集". 因 $\{2001,\cdots,2014\}$ 共有 2^{14} 个子集. 所以好集个数也是 2^{14} 个.

下面我们证明满足要求的集合有 2^{14} 个. 为此, 我们仅须证明:

(i) 每一个好集均满足要求;

(ii) 满足要求的集一定是好集.

为叙述方便, 记 $S=\left\{a_i+a_j \,\middle|\, 1\le i,j\le 1000 \text{ 且 } i+j\in A\right\}$.

先证 (i). 设 A 是一个好集, 则 $\mid A\mid=1000$. 且不妨设

$$A=\{a_1,\cdots,a_{1000}\},\quad a_1<a_2<\cdots<a_{1000}<2014.$$

对 $\forall\, i,j\le 1000$, $i+j\in A$ 知 $i+j\le 2000$, 因此 $i+j\in B$.

因此存在一个 $k\le 100-\mid C\mid$ 使得 $i+j=a_k=k$. 又因为 $a_k\le 100-\mid C\mid$, 于是也有 $i,j\le 100-\mid C\mid$, 因此 $a_i=i,\quad a_j=j$, 这意味着 $a_i+a_j=i+j=a_k\in A$. 这说明 $S\subseteq A$, 即好集 A 满足要求.

再证 (ii). 设 A 是满足要求的集. 若存在整数 $1\le k\le 1000$ 使得 $a_k\in\{1001,\cdots,2000\}$, 则我们有 $a_k=1000+i,\quad i\in[1,1000]$. 因此 $a_{1000}+a_i\in S$, 但 $a_{1000}+a_i>a_{1000}$, 矛盾!

这说明 A 一定能写成两个不相交集合 B,C 的并, 且具有形式 $B\cup C$. 其中 $C\subseteq\{2001,\cdots,2014\}$, $B\subseteq\{1,2,\cdots,1000\}$. 记 $b=|B|$, 因为 C 至多有 14 个元, 故 $b\ge 986$.

为了证明 A 是好的, 我们仅须证明 $B=\{1,2,\cdots,b\}$. 为此, 只须证明 B 的最大元 a_b 等于 b. 若不然, 设 $a_b\ne b$, 因为 $\mid B\mid=b$, 所以 $a_b>b$.

令 $i=a_b-b$, 则 $b+i=a_b\le 1000$, 于是 $i\le 1000-b\le 14<b$. 因此 $a_i\le 1000,\quad a_b+a_i\le 2000$. 又因为 $i+b=a_b\in A$, 所以 $a_b+a_i\in S\subset A$, 故 $a_b+a_i\in B$, 这与 a_b 的最大性矛盾. 因此 $a_b=b$, 故 A 是好的, 证毕. □

注 两套试题的 8 个题目均非原创, 其中题 1.2 是 2016 年塞尔维亚 (SMO) 试题, 题 1.4 是 2016 年罗马尼亚 (RMO) 试题, 题 2.4 是 2016 年荷兰国家队选拔 (DTST) 试题. 其它题目均难以追溯到它们的准确出处.