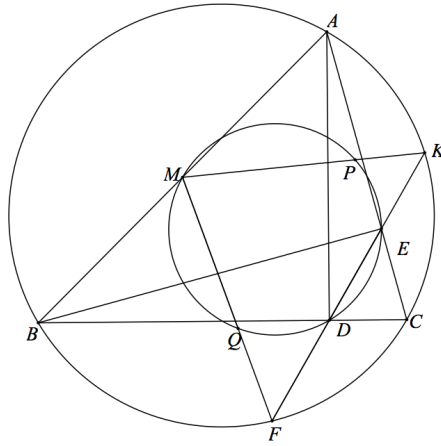


第十七期问题征解解答与点评

牟晓生

第一题. 如图, AD, BE 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的边 BC, AC 上的高. AB 中点为 M , 直线 DE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 F, K , 线段 MK 和 MF 分别与 $\triangle MDE$ 的外接圆交于除 M 以外的点 P, Q . 证明: A, P, Q, B 四点共圆.



(福建厦门一中 徐小平 供题)

证明 (根据如东高级中学张陈成同学的解答整理):

由于 $BE \perp AC, AD \perp BC$, 我们有 A, B, D, E 四点共圆, 而 M 为圆心. 于是 $\angle MDK = \angle MDE = \angle MED = \angle MPD$, 其中最后一步由 E, D, M, P 共圆.

于是可知 $MD^2 = MP \cdot MK$, 同理 $MD^2 = MQ \cdot MF$. 从而 F, Q, P, K 共圆. 另外由 $MA^2 = MD^2 = MP \cdot MK$ 可知 $\angle APM = \angle MAK$. 而由 $MB^2 = MD^2 = MQ \cdot MF$ 可知 $\angle MBQ = \angle MFB$. 所以

$$\begin{aligned} \angle APQ + \angle ABQ &= \angle APM + \angle MPQ + \angle MFB \\ &= \angle MAK + \angle MFK + \angle MFB \\ &= \angle BAK + \angle BFK = 180^\circ. \end{aligned}$$

命题得证!

□

评注 浙江省桐乡市高级中学顾文颢, 象山县第三中学黄子宸, 黄冈中学陈耀斌, 镇海中学严君啸, 湖南师大附中刘其灵, 东北育才何雨桐, 杭州二中刘浩宇等同学以及雅礼中学团队也给出了本题的正确解答.

第二题. 证明对任意正整数 n 以及任意实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 都有

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n (k+1)x_k^2.$$

(湖南师大附中 羊明亮 供题)

证明 (根据湖南雅礼中学邱添同学的解答整理):

对 $1 \leq k \leq n$, 由柯西不等式得:

$$\left(\sum_{j=1}^k x_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^k j(j+1)x_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j(j+1)} \right) = \frac{k}{k+1} \sum_{j=1}^k j(j+1)x_j^2.$$

因此求和可得:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^k j(j+1)x_j^2 = \sum_{j=1}^n j(j+1)x_j^2 \sum_{k=j}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

等式最右边确实小于 $\sum_{j=1}^n (j+1)x_j^2$. □

评注 (1). 浙江省桐乡市高级中学顾文颢, 湖南师大附中刘其灵, 如东高级中学张陈成, 东北育才何雨桐以及雅礼中学团队也给出了本题的正确解答.

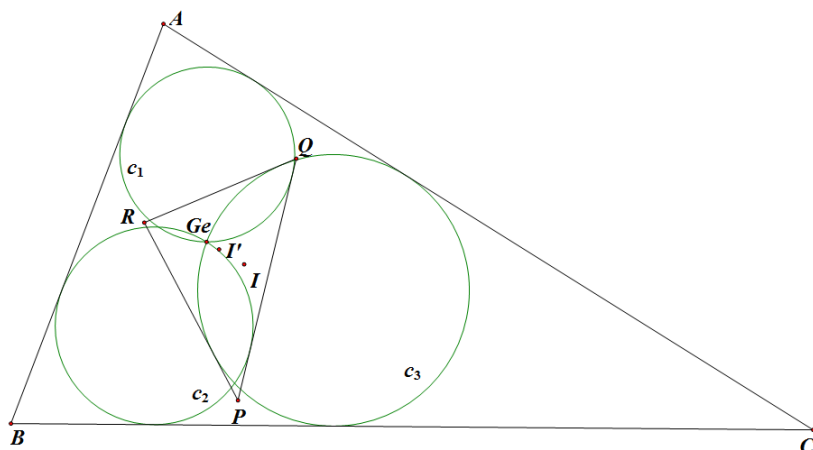
(2). 这个问题形似 Hardy 不等式, 却又不大一样. 应对这类问题一般有两种方法, 其一是适当地选配 Cauchy 或 Hölder 不等式的系数, 如上面解答所展示的那样. 另一种方法则是用归纳法证明加强命题. 在这里可以证明右边比左边至少大 $\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2$, 有些同学就是这么做的.

第三题. 如图, Ge 是 $\triangle ABC$ 的 Gergonne 点, c_1 是过 Ge 且与 AB, AC 相切的圆中较小的那个, 类似定义 c_2, c_3 . 设 c_1, c_2, c_3 两两间的另一条外公切线彼此交于 P, Q, R . 证明: $\triangle ABC$ 的内心 I , $\triangle PQR$ 的内心 I' 以及 Ge 三点共线.

(北京人大附中 杨泓暎 供题)

证明 (根据吉大附中李濛初和初炜康同学的解答整理):

记 I 在 BC, CA, AB 上的射影为 I_1, I_2, I_3 . c_1 与 AB, AC 相切于 A_3, A_2 , c_2 与 AB, BC 相切于 B_3, B_1 , c_3 与 AC, BC 相切于 C_2, C_1 . 设 c_3, c_1 与 PR 分别切于 K, L , 而 c_2, c_1 与 PQ 分别切于 S, T .



由定义, G_e 在 AI_1, BI_2, CI_3 上. 由于 B 为 c_2 与内切圆的外位似中心, G_e, I_2 是这个位似中的对应点, 所以 $\frac{BI_1}{BI_2} = \frac{G_e I_2}{BI_2}$. 同理 $\frac{CI_1}{CI_2} = \frac{G_e I_3}{CI_2}$. 对 $\triangle BG_e C$ 以及点 A 用 Ceva 定理, 我们有:

$$\frac{BI_1}{I_1 C} \cdot \frac{CI_3}{I_3 G_e} \cdot \frac{G_e I_2}{I_2 B} = 1.$$

利用之前得到的结论, 也就是:

$$\frac{BI_1}{I_1 C} \cdot \frac{CI_1}{C_1 I_1} \cdot \frac{B_1 I_1}{I_1 B} = 1.$$

化简得到 $B_1 I_1 = C_1 I_1$. 由于 $BI_1 = BI_3, BB_1 = BB_3$, 我们又有 $B_1 I_1 = B_3 I_3$. 于是可得:

$$B_1 I_2 = I_1 C_1 = C_2 I_2 = I_2 A_2 = A_3 I_3 = I_3 B_3.$$

所以 I_1 在 c_2, c_3 的根轴上, 而这个根轴就是 $AG_e I_1$. 注意到 $LK, A_2 C_2$ 均为 c_1, c_3 的外公切线, 所以 $LK = A_2 C_2$. 同理 $ST = A_3 C_3$, 于是 $LK = ST$. 而 $PL = PT$, 故 $PK = PS$. 这说明 P 到 c_2, c_3 等幂, 于是 P 在根轴 $AG_e I_1$ 上. 由对称性, AP, BQ, CR 共点于 G_e .

设圆 I 与圆 I' 的外位似中心为 O . 由于 c_1 与这两个圆的外位似中心分别为 A, P , 我们知道 A, P, O 共线. 同理 O 也在 BQ, CR 上. 所以 $O = G_e$. 于是 I, I', G_e 三点共线. \square

评注 如东高级中学张陈成, 象山县第三中学黄子宸, 湖南师大附中刘其灵, 东北育才何雨桐, 雅礼中学尹龙晖, 丘添, 李师铨, 谢添乐, 李正浩, 肖澍旸等同学也给出了本题的正确解答.

第四题. 设 $f(x)$ 是一个复系数多项式, 满足

$$x^2 \mid f(x) - e^{\frac{2\pi i}{m}} \cdot x,$$

其中 $m > 1$ 是给定的正整数. 令 $f^{(m)}(x)$ 为 f 的 m 次迭代, 证明:

$$x^{m+1} \mid f^{(m)}(x) - x.$$

(清华大学 刘畅 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):

我们首先证明如下引理:

引理 设 λ 是复数, $k > 1$ 是正整数, 满足 $\lambda^k \neq \lambda$. 如果多项式 f, P 满足 $x^k \mid f \circ P - P(\lambda x)$, 且 $P(0) = 0, P'(0) \neq 0$. 则存在多项式 R 满足 $x^{k+1} \mid f \circ R - R(\lambda x)$, 且 $R(0) = 0, R'(0) \neq 0$.

为证引理, 设 $f \circ P - P(\lambda x) = bx^k + O(x^{k+1})$, 其中 $O(x^{k+1})$ 表示次数至少是 $k+1$ 的高阶多项式. 考虑取 $R(x) = P(x + cx^k)$. 那么

$$\begin{aligned} f \circ R &= f \circ P \circ (x + cx^k) \\ &= P(\lambda x + c\lambda x^k) + b(x + cx^k)^k + O(x + cx^k)^{k+1} \\ &= P(\lambda x) + c\lambda P'(0)x^k + bx^k + O(x^{k+1}). \end{aligned} \quad (1)$$

另一方面

$$\begin{aligned} R(\lambda x) &= P(\lambda x + c(\lambda x)^k) \\ &= P(\lambda x) + c\lambda^k P'(0)x^k + O(x^{k+1}). \end{aligned} \quad (2)$$

对比 (1) 和 (2), 我们只要令 $c = \frac{b}{\lambda^k - \lambda}$ 就能满足 $x^{k+1} \mid f \circ R - R(\lambda x)$. 最后注意到 $R'(x) = P'(x + cx^k)(1 + ckx^{k-1})$. 所以 $R'(0) = P'(0) \neq 0$. $R(0) = P(0) = 0$ 是显然的. 引理证毕.

回到原题, 取 $P(x) = x, \lambda = e^{\frac{2\pi i}{m}}, k = 2$, 由题目假设有 $x^2 \mid f \circ P - P(\lambda x)$. 反复运用引理, 我们最终得到多项式 $R(x)$, 使得 $f \circ R = R(\lambda x) + O(x^{m+1})$. 于是

$$\begin{aligned} f^{(2)} \circ R &= f \circ (f \circ R) \\ &= f(R(\lambda x) + O(x^{m+1})) \\ &= f(R(\lambda x)) + O(x^{m+1}) \\ &= R(\lambda^2 x) + O(x^{m+1}) \end{aligned} \quad (3)$$

其中第三行用到 $x|f(x)$. 用归纳法不难证明对每个正整数 k 都有

$$f^{(k)} \circ R = R(\lambda^k x) + O(x^{m+1}). \quad (4)$$

特别地, 我们有

$$f^{(m)} \circ R = R(x) + O(x^{m+1}). \quad (5)$$

此时设 $f^{(m)}(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + O(x^{m+1})$, 则 $f^{(m)} \circ R = a_1R + a_2R^2 + \cdots + a_mR^m + O(x^{m+1})$, 因为 $R(x)^{m+1} = O(x^{m+1})$. 于是 (5) 式导出

$$a_1R + a_2R^2 + \cdots + a_mR^m = R + O(x^{m+1}). \quad (6)$$

由于 $R(0) = 0$, $R'(0) \neq 0$, 对比两边 x^1 的系数得到 $a_1 = 1$. 之后依次对比 x^2, x^3, \dots, x^m 的系数得到 $a_2 = a_3 = \cdots = a_m = 0$. 于是 $f^{(m)}(x) = x + O(x^{m+1})$, 命题得证! \square

评注 (1). 湖南师大附中刘其灵同学通过组合方法计算高阶导数也给出了本题的正确解答.

(2). 我们可以把 $f \circ P - P(\lambda x) = O(x^k)$ 改写为 $P^{-1} \circ f \circ P = \lambda x + O(x^k)$. 这样上面的引理就是函数方程中的桥函数方法 (或者矩阵理论里的正规化). 虽然在竞赛中考的很少, 但桥函数是处理迭代问题的重要工具. 在这里 P 是多项式, 所以反函数 P^{-1} 并不好定义, 上面的解答避开了这个问题 (当然利用复变函数的知识可以局部地定义 P^{-1} , 也能完成证明).