一道不等式赛题的新证

刘谦牧　汪玉欣　鲍以远

(深圳外国语学校, 518028)

指导教师: 李雨红

2017 年中国西部数学奥林匹克的第 8 题是张端阳老师命制的不等式题目. 目前看到的解法都是使用数学归纳法, 本文给出一种新的证明.

问题 给定 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+ (n \geq 2)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{a_1, a_2, \cdots, a_i\} \min\{a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n\} \leq \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{1}$$

证明 将所有满足 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}\} \neq \max\{a_1, a_2, \cdots, a_i\}$ 的 i 从小到大排列为 $r_1, r_2, \cdots, r_k$, 补充定义 $r_{k+1} = n+1$, 则有 $a_1 = a_{r_1} \leq a_{r_2} \leq \cdots \leq a_{r_k}$ 且 $a_{r_i} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_{r_{i+1}-1}\}$. 考虑由定义我们知道 $r_{i+1} - r_i \neq 0$, 故对于 $1 \leq i \leq k$, 我们可以定义

$$t_i = \frac{\sum\limits_{j=r_i}^{r_{i+1}-1} \min\{a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n\}}{r_{i+1} - r_i}.$$

对于 $r_{i+1} \neq r_i + 1$, 我们有

$$\min\{a_{r_i}, a_{r_i+1}, \cdots, a_n\} \leq \min\{a_{r_i}, a_{r_i+1}, \cdots, a_{r_{r+1}-1}\} \leq t_i,$$

故由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\sum_{j=r_i+1}^{r_{i+1}-1} a_j^2 \geq \frac{((r_{i+1} - r_i)t_i - \min\{a_{r_i}, a_{r_i+1}, \cdots, a_n\})^2}{(r_{i+1} - r_i - 1)} \geq (r_{i+1} - r_i - 1)t_i^2. \tag{2}$$

对于 $r_{i+1} = r_i + 1$, 由

$$a_{r_i} \geq \frac{\sum\limits_{j=r_i}^{r_{i+1}-1} \min\{a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n\}}{r_{i+1} - r_i} = t_i$$

修订日期: **2024-03-14.**

知

$$\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\sum_{j=r_i}^{r_{i+1}-1}a_j^2-a_{r_i}(r_{i+1}-r_i)t_i=\frac{n}{2\sqrt{n-1}}a_{r_i}^2-a_{r_i}t_i\geq 0. \tag{3}$$

从而结合 (2) 式和 (3) 式, 我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}\max\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}\min\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_n\}\\
=&\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(\sum_{i=1}^{k}a_{r_i}^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=r_i+1}^{r_{i+1}-1}a_j^2)-\sum_{i=1}^{k}a_{r_i}(r_{i+1}-r_i)t_i\\
\geq&\sum_{i=1,r_i+1\neq r_{i+1}}^{k}(\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(a_{r_i}^2+(r_{i+1}-r_i-1)t_i^2)-a_{r_i}(r_{i+1}-r_i)t_i)\\
\geq&\sum_{i=1,r_i+1\neq r_{i+1}}^{k}(\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(a_{r_i}^2+(r_{i+1}-r_i-1)(t_i-\frac{\sqrt{n-1}}{n}\frac{r_{i+1}-r_i}{r_{i+1}-r_i-1}a_{r_i})^2)\\
&\quad-\frac{\sqrt{n-1}}{2n}\sum_{i=1,r_i+1\neq r_{i+1}}^{k}\frac{(r_{i+1}-r_i)^2}{r_{i+1}-r_i-1}a_{r_i}^2)\\
\geq&\sum_{i=1,r_i+1\neq r_{i+1}}^{k}a_{r_i}^2(\frac{n}{2\sqrt{n-1}}-\frac{\sqrt{n-1}}{2n}\frac{(r_{i+1}-r_i)^2}{r_{i+1}-r_i-1}).
\end{aligned}\tag{4}$$

由

$$\frac{n^2}{n-1}\geq\frac{(n+1-r_i)^2}{n-r_i}\geq\frac{(r_{i+1}-r_i)^2}{r_{i+1}-r_i-1}\geq 0 \tag{5}$$

即知式 (4) 非负, 从而式 (1) 非负, 又由式 (5) 知式 (1) 在 $r_{r+1}=r_i$ 对任意 $1\leq i\leq k$ 成立时取等, 故只有 $k=1$, 即 $a_2=a_2=\cdots=a_n$ 时取等, 此时解得 $(a_1:a_2,\cdots:a_n)=(\sqrt{n-1}:1:1,\cdots:1)$.

综上, 原题得证. □