谜之竞赛若干题目的解答与评析

李雨航[1]　胡珏伟[2]
(1. 成都树德中学, 610014; 2. 上海大学, 200444)

谜之竞赛是一群热爱数学的同学们共同组织的, 在每月末会在大家选题之后发布在数之谜小程序上面. 本文行文目的是对比赛的一些题目进行讨论, 以此来宣传谜之竞赛.

I. 试 题

1. 设 $n,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m \in \mathbb{Z}^+$, 对 $1 \le i \le m$, 记 A_i 为全体不大于 n 且在可重集 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\}$ 中至少有 i 个因数的正整数构成的集合. 求证:

$$\prod_{i=1}^{m} |A_i| \le \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{n}{a_i}\right].$$

(北京大学学生 黄瀚卿 供题)

2. 设 $n \ge 3$ 是整数, 给定平面上的凸多边形 $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n$, 其中 P_i 有 a_i 个顶点 $(1 \le i \le n)$. 记

$$S = \{G \mid G \text{ 为 } A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n \text{ 的重心, 其中 } A_i \text{ 为 } P_i \text{ 的顶点}\}.$$

求证: 存在正实数 C_n, 使得对任意 $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n$, 均有

$$|S| \ge C_n (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{3}{n} - \frac{1}{n \cdot 2^{n-2}}}.$$

(中国人民大学附属中学学生 叶语行 供题)

3. 在 $\triangle ABC$ 中, M 为 BC 的中点, $D,\ E$ 满足 $\triangle ADM$ 与 $\triangle CDB$ 顺相似, $\triangle AEM$ 与 $\triangle BEC$ 顺相似. 求证: $\odot(ADE)$ 与 $\odot(ABC)$ 相切.

(北京一零一中学学生 牟思特 供题)

4. 给定素数 p 和 $a \in \mathbb{Z}^+$. 称正整数 t 是“好的”, 若存在 $x,\ y \in \mathbb{Z}^+$, 满足

修订日期: **2024-04-09.**

$(p,\ xy)=1$ 且 $p^t=ax^2+y^2$. 对 $n\in\mathbb{Z}^+$, 记 p_n 为不超过 n 的好数个数. 求证: 存在与 n 无关的常数 $\alpha,\ \beta$, 使对任意 $n\in\mathbb{Z}^+$,

$$\alpha n-\beta\le p_n\le \alpha n+\beta.$$

(中国人民大学附属中学学生 李天勤 供题)

5. O 为给定 $\triangle ABC$ 的外心, P 为 $\triangle ABC$ 内一动点, 满足 $\angle ABP=\angle ACP$. BP, CP 与 AO 交于 $E,\ F$. 以 AP 为直径的圆与 $\triangle BPC$ 的外接圆再交于 Q. 证明: 存在两个定圆与 $\odot QEF$ 相切.

(成都树德中学学生 李雨航 供题)

6. 设素数 $p\equiv 1 \pmod 8$. 求证:

$$\sum_{\substack{1\le i\le \frac{p-1}{2}\\ \left(\frac{i}{p}\right)=1}}\frac{1}{i}\equiv\sum_{\substack{1\le i\le \frac{p-1}{2}\\ \left(\frac{i}{p}\right)=-1}}\frac{1}{i}\pmod{p^2}.$$

(中国人民大学附属中学学生 孙牧聪 供题)

7. 求最小的正常数 c, 使得对任意 $n\in\mathbb{Z}^+$, $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\in\mathbb{R}^+$, 均有

$$\sum_{1\le i,\ j\le n}\left\{\frac{x_i}{x_j}\right\}\le cn^2.$$

(清华大学学生 江城 供题)

II. 解答与评注

题 1 设 $n,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\in\mathbb{Z}^+$, 对 $1\le i\le m$, 记 A_i 为全体不大于 n 且在可重集 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\}$ 中至少有 i 个因数的正整数构成的集合. 求证:

$$\prod_{i=1}^{m}|A_i|\le\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{n}{a_i}\right].$$

证明 1 对每个 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$, 记

$$B_i=\left\{x\mid x\le n,\ x\in\mathbb{Z}^+,\ x\equiv 0\pmod{a_i}\right\},$$

则 $|B_i|=[\frac{n}{a_i}]$. 即证: 对任意 $m\in\mathbb{Z}^+$ 均有

$$\prod_{i=1}^{m}|A_i|\le\prod_{i=1}^{m}|B_i|.$$

对 m 归纳, $m=1$ 时结论平凡. $m=2$ 时, 有

$$A_1=B_1\cup B_2,\ A_2=B_1\cap B_2.$$

当 $|A_2|=0$ 时, 结论成立. 当 $|A_2|\neq 0$ 时, 记

$$|B_1\setminus B_2|=a,\ |B_1\cap B_2|=b,\ |B_2\setminus B_1|=c,$$

则

$$|A_1|\cdot|A_2|\le|B_1||B_2|\Leftrightarrow b(a+b+c)\le(a+b)(b+c),$$

上述不等式显然成立.

假设 m 时结论成立. 考虑 $m+1$ 时, 对任意 $1\le i\le m$, 记

$$C_i=\{x\mid x\le n,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m \text{ 中至少 } i-1 \text{ 个数为 } x \text{ 因子且 } a_{m+1}\mid x\}.$$

令

$$A_i'=A_i\cup C_i\ (1\le i\le m),\ A_{m+1}'=C_{m+1}=A_{m+1}.$$

此时

$$\prod_{i=1}^{m+1}|A_i|\le\prod_{i=1}^{m+1}|B_i|\Leftrightarrow\prod_{i=1}^{m+1}|A_i'|\le\prod_{i=1}^{m+1}|B_i|.$$

由 $m=2$ 时的结论知

$$|A_i'|\le\frac{|A_i|\cdot|C_i|}{|A_i\cap C_i|},\qquad(1\le i\le m).$$

结合归纳假设, 只需证明

$$\prod_{i=1}^{m+1}|C_i|\le|B_{m+1}|\cdot\prod_{i=1}^{m}|A_i\cap C_i|.$$

而 $C_1=B_{m+1}$, 上式等价于

$$\prod_{i=2}^{m+1}|C_i|\le\prod_{i=1}^{m}|\ A_i\cap C_i|.\tag{$*$}$$

下证对每个 $1\le i\le m$, 有

$$|C_{i+1}|\le|A_i\cap C_i|$$

成立. 事实上由定义

$$C_{i+1}\subseteq C_i,\ C_{i+1}\subseteq A_i,$$

因此

$$|C_{i+1}|\le|A_i\cap C_i|,$$

故

$$\prod_{i=2}^{m+1}|C_i|\le\prod_{i=1}^{m}|A_i\cap C_i|,$$

即 $(*)$ 成立.

综上可知原命题成立. □

证明 2 (根据人大附中叶语行同学的解答整理) 同解法 1 定义 B_i, 由于不等式左边和右边分别是

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m \text{ 和 } B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m$$

的元素个数, 只需证明任一 m 元正整数数组 v 在 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ 中出现的次数 (设为 A') 不多于其在 $B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m$ 中出现的次数 (设为 B'), 此后对全体 v 求和即证原题.

构造二部图 G, 一部顶点 V_1 代表 v 的 m 个分量 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_m$ (允许有相同), 另一部顶点 V_2 代表 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$. 若对 $v_i \in V_1$ 和 $a_j \in V_2$, 有 $a_j \mid v_i$, 则在 a_j 和 v_i 之间连边.

对正整数 x, 设 m_x 是 x 在 v 的 m 个分量中出现的次数, 记

$$c = \prod_{x \in \mathbb{Z}^+} m_x!, \quad A = c \times A',\ B = c \times B'.$$

为证 $A' \leq B'$, 只需证 $A \leq B$. 显然 A 是满足

$$d\left(v_{\sigma(i)}\right) \geq i, \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

的 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$ 的置换 σ 的个数(其中 $d(v)$ 指顶点 v 在 G 中度数), B 是 G 的完美匹配个数. 不妨设

$$d(v_1) \leq d(v_2) \leq \cdots \leq d(v_m),$$

此时若存在某个 i 使得 $d(v_i) < i$, 则 $A = 0$, 结论成立. 下设 $d(v_i) \geq i,\ i = 1, 2, \cdots, m$. 一方面, 按 i 从小到大的顺序, 将 v_i 匹配到 V_2 中尚未被浸润的 $d(v_i) + 1 - i$ 个顶点之一, 可得到至少 $\prod\limits_{i=1}^{m} (d(v_i) + 1 - i)$ 个完美匹配; 另一方面, 按 i 从小到大的顺序, 考虑 $\sigma^{-1}(i)$ 的可能值: 可以是 $1,\ 2,\ \cdots,\ d(v_i)$, 但其中 $\sigma^{-1}(1),\ \cdots,\ \sigma^{-1}(i-1)$ 已被用过, 故至多有 $\prod\limits_{i=1}^{m} (d(v_i) + 1 - i)$ 个这样的置换 σ. 因此

$$A \leq \prod_{i=1}^{m} (d(v_i) + 1 - i) \leq B,$$

得证. □

证明 3 (根据清华大学林瀚熙同学的解答整理) 同解法 1 定义 B_i, 只需证

$$\sum_{i=1}^{m} \ln |A_i| \leq \sum_{i=1}^{m} \ln |B_i|.$$

由于 $\ln x$ 的二阶导数恒非正, 根据 Karamata 不等式, 只需验证数组 $(|A_1|, |A_2|, \cdots, |A_m|)$ 优超数组 $(|B_1|, |B_2|, \cdots, |B_m|)$.

不妨假设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, 那么便有 $|B_1| \geq |B_2| \geq \cdots \geq |B_m|$, 且显然有

$|A_1| \geq |A_2| \geq \cdots \geq |A_m|$.

首先,

$$\sum_{k=1}^{m}|A_k| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{a_j|i}1 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{1\leq i\leq n, a_j|i}1 = \sum_{k=1}^{m}|B_k|.$$

其次,固定某个 $1 \leq k \leq m$. 对任一 $1 \leq t \leq k$, 令 C_t 为全体不大于 n 并且在可重集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 里至少有 t 个约数的正整数构成的集合, 则 $C_t \subset A_t$, 并且

$$\sum_{t=1}^{k}|C_t| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{1\leq j\leq k, a_j|i}1 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{1\leq i\leq n, a_j|i}1 = \sum_{t=1}^{k}|B_t|,$$

所以

$$\sum_{t=1}^{k}|A_t| \geq \sum_{t=1}^{k}|B_t|.$$

这完成了优超条件的验证. □

评注 此题是中等难度的组合题. 首先对不等式左边进行组合翻译, 解决问题的突破口在于尝试 $m = 2$ 的问题, 从中挖掘信息.

题 2 设 $n \geq 3$ 是整数, 给定平面上的凸多边形 $P_1, P_2, \cdots, P_n$, 其中 P_i 有 a_i 个顶点 $(1 \leq i \leq n)$. 记

$$S = \{G \mid G \text{ 为 } A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 的重心, 其中 } A_i \text{ 为 } P_i \text{ 的顶点}\}.$$

求证: 存在正实数 C_n, 使得对任意 $P_1, P_2, \cdots, P_n$, 均有

$$|S| \geq C_n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{3}{n}-\frac{1}{n\cdot 2^{n-2}}}.$$

证明 (根据供题者的解答整理) 首先介绍如下引理:

引理 (Crossing Lemma) 对平面上的图 $G(V, E)$, 若 $|E| \geq 4|V|$, 则

$$f(G) \geq \frac{1}{64}\cdot\frac{|E|^3}{|V|^2},$$

其中 $f(G)$ 为 E 中有交叉点的个数.

引理的证明可以在新星征解第 49 期第 4 题中找到, 系数有所差异, 但对于结论常数的存在性的问题而言这是不本质的.

下回到原题, 对 n 归纳证明原命题. 问题在坐标系中处理, 并设

$$a_n = \max_{1\leq i\leq n} a_i.$$

$n = 1$ 时平凡. 假设 $n - 1$ 时成立, 考虑 n 时情形. 将多边形 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 各自选出一个点, 进行坐标相加, 得到集合 T. 容易知道可从 P_n 中选出连续的 $\lceil \frac{a_n}{2} \rceil$ 条边, 使得起始和结束的两条边的反向延长线相交. 将选出的这些边的顶点

记为 $X_1, \cdots, X_{t+1}$, 并设

$$T' = T + \{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{t+1}\}.$$

定义图 $G(V,E)$, $V = \{Y + X_j \mid Y \in T, 1 \le j \le t+1\}$. 对每个$Y \in T$, 在点 $Y + X_j$ 和点 $Y + X_{j+1} (1 \le j \le t)$ 之间连边, 故 $|E| = t|T|$. 由选出的边的性质易知: 对任意 $A,\ B \in T,\ A + x_j$ 与 $A + x_{j+1} (1 \le j \le t)$ 的边构成的图形 M 和 $B + x_j$ 与 $B + x_{j+1} (1 \le j \le t)$ 的边构成的图形 N 至多有 2 个交点. 故

$$f(G) \le 2\binom{|T|}{2} < |T|^2.$$

(1) 若$|E| \le 4|V|$, 则

$$|T'| \ge \frac{t}{4}T \ge \frac{a_n}{12} C_{n-1} \left(a_1 a_1 \cdots a_{n-1}\right)^{\frac{3}{n-1} - \frac{1}{(n-1)2^{n-3}}}.$$

(2) 若$|E| > 4|V|$, 则由引理有

$$|T|^2 \ge \frac{1}{64} \cdot \frac{t^3 |T|^3}{|T'|^2},$$

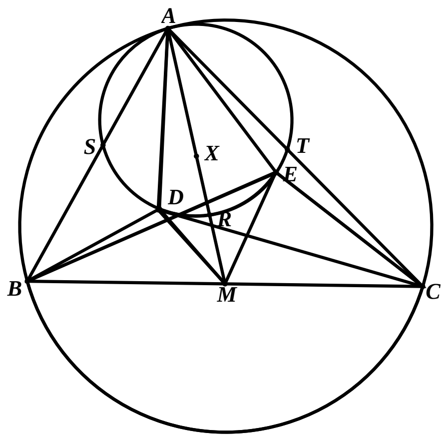
故

$$|T'| \ge \frac{1}{8} t^{\frac{3}{2}} |T|^{\frac{1}{2}} \ge \frac{1}{8 \cdot 3^{\frac{3}{2}}} a_n^{\frac{3}{2}} C_{n-1}^{\frac{3}{2}} \left(a_1 a_1 \cdots a_{n-1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n-1} - \frac{1}{(n-1)2^{n-3}}\right)}.$$

由 a_n 的最大性知存在 C. 综上可知存在符合题意的 C. □

评注 本题是困难的问题. 此题是建立在不熟知的 Crossing Lemma 上的. 因此不知道的话几乎不可做, 并且引理的使用难点在于如何寻找一个合适的平面图, 并且它的支数需要有一个合理的上界.

题 3 在 $\triangle ABC$ 中, M 为 BC 的中点, D, E 满足 $\triangle ADM$ 与 $\triangle CDB$ 顺相似, $\triangle AEM$ 与 $\triangle BEC$ 顺相似. 求证: $\odot(ADE)$ 与 $\odot(ABC)$ 相切.



证明 记 AM 中点为 X, $\odot(ADE)$ 与 AB, AM, AC 交于点 S, R, T. 由熟知结论, 只需证明 $ST \parallel BC$.

由 $\triangle ADM \sim \triangle CDB$, X, M 为 AM, BC 中点知 $\triangle AXD \sim \triangle CMD$, 故 $\triangle ADC \sim \triangle XDM$. 而 $\angle ARD = \angle ATD$, 故 R, T 为 $\triangle ADC$ 和 $\triangle XMD$ 的相似对应点. 即

$$\frac{AT}{TC} = \frac{XR}{RM}.$$

由对称性知 $\frac{AS}{SB} = \frac{XR}{RM}$, 故

$$\frac{AS}{SB} = \frac{AT}{TC}.$$

证毕. □

评注 此题是简单的几何题, 取出 AM 中点利用相似对应即可解决.

题 4 给定素数 p 和 $a \in \mathbb{Z}^+$. 称正整数 t 是"好的", 若存在 x, $y \in \mathbb{Z}^+$, 满足 $(p,\ xy) = 1$ 且 $p^t = ax^2 + y^2$. 对 $n \in \mathbb{Z}^+$, 记 p_n 为不超过 n 的好数个数. 求证: 存在与 n 无关的常数 α, β, 使对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\alpha n - \beta \le p_n \le \alpha n + \beta.$$

证明 (根据复旦大学李璟琦同学的解答整理) 若不存在好数. 取 $\alpha = \beta = 0$ 即可, 否则记最小的好数为 k. 先讨论 p 为奇素数的情形.

引理 若 m, n 均为好数, 则 $m+n$ 为好数.

证明 事实上, 记

$$p^m = ax^2 + y^2,\ p^n = az^2 + w^2.$$

由 $(p, xy) = 1$ 知 $(p, a) = 1$. 于是

$$\begin{aligned} p^{m+n} &= (ax^2 + y^2)(az^2 + w^2) \\ &= (axz + yw)^2 + a(yz - xw)^2 \\ &= (axz - yw)^2 + a(yz + xw)^2. \end{aligned}$$

若 $axz = yw$ 则 $\frac{x}{w} = \frac{y}{az} = t$, 故

$$ax^2 + y^2 = at^2w^2 + a^2t^2z^2 = at^2(w^2 + az^2),$$

因此 $p \mid at^2$, 即 $p \mid t$, 从而 $p \mid x$. 矛盾! 故 $|axz - yw| \in \mathbb{Z}^+$. 同理 $|yz - xw| \in \mathbb{Z}^+$. 从而

$$\begin{aligned} p \mid axz + yw &\Leftrightarrow p \mid yz - xw \\ &\Leftrightarrow p \nmid yz + xw \ (\text{用到 } p \neq 2) \end{aligned}$$

故上述两种表示必有一满足题设. 进一步可知 $m+n$ 为好数. 引理获证.

由引理知所有 k 的倍数均为好数. 下证这为全体好数. 事实上若存在 $l\in(mk,\ (m+1)k)$, $m\in\mathbb{Z}^+$, 使 l 是好数. 设

$$p^l=ar^2+s^2,\ p^{mk}=ax^2+y^2,$$

待定 M, N 使

$$\frac{ar^2+s^2}{ax^2+y^2}=aM^2+N^2.$$

由上述拉格朗日恒等式, 可让

$$\begin{cases}s=axM+yN\\ r=xN-yM\neq 0\end{cases},\quad 或\ \begin{cases}s=axM-yN\\ r=xN+yM\neq 0\end{cases}.$$

注意只需 $r,\ s\neq 0$ 即可满足题目中正整数的条件. 解得

$$M_1=\frac{xs-yr}{p^{mk}},\ M_2=\frac{xs+yr}{p^{mk}}.$$

下证 M_1, M_2 中必有整数. 事实上

$p^{mk}\mid ar^2+s^2$, $p^{mk}\mid\mid ax^2+y^2$ (表示 $p^{mk}\mid ax^2+y^2$ 且 $p^{mk+1}\nmid ax^2+y^2$),

则

$$p^{mk}\mid\mid ax^2r^2+y^2r^2-ax^2r^2-x^2s^2,$$

故

$$p^{mk}\mid\mid (yr+xs)(yr-xs),$$

即 M_1, M_2 中必有正整数. 容易验证 $l-mk$ 也是好数, 这与 k 的最小性矛盾! 故 $p_n=\left[\frac{n}{k}\right]$, 取 $\alpha=\frac{1}{k}$, $\beta=1$ 即可.

当 $p=2$ 时, 我们断言若 m, n 为好数, 则 $m+n-2$ 为好数. 记

$$2^m=ax^2+y^2,\ 2^n=az+w,$$

故

$$\begin{aligned}2^{m+n}&=(axz+yw)^2+a(xw-yz)^2\\&=(axz-yw)^2+a(xw+yz)^2.\end{aligned}$$

模 4 知 $a\equiv 3 \pmod 4$. 于是由 $(2,\ axyzw)=1$ 知

$$axz+yw,\ axz-yw,\ xw-yz,\ xw+yz$$

均为偶数且 $axz+yw$, $axz-yw$ 必有模 4 余 2 者, 故 $m+n-2$ 为好数.

于是类似上面的讨论可知 $ik-(2i-2)(i\in\mathbb{Z}^+)$ 为全体好数. 此时有 $i(k-2)+2\leq n$, 共$\left[\frac{n-2}{k-2}\right]$个好数, 仍存在 α, β 合题.

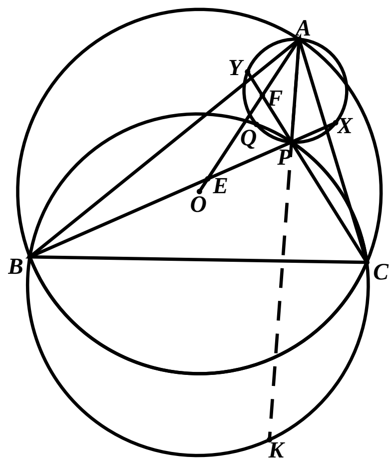
综上即证. □

评注 此题是中等偏难的数论题, 主要想法是根据拉格朗日恒等式来导出一列合题的好数.

题 5 O 为给定 $\triangle ABC$ 的外心, P 为 $\triangle ABC$ 内一动点, 满足 $\angle ABP=\angle ACP$. BP,CP 与 AO 交于 E, F. 以 AP 为直径的圆与 $\triangle BPC$ 的外接圆再交于 Q. 证明: 存在两个定圆与 $\odot QEF$ 相切.

证明 分为两部分证明. 角度运算为有向角.

第一部分证明 $\odot(QEF)$ 与以 B, C 为端点, 定比为 $\frac{AB}{AC}$ 的阿波罗尼斯圆$\odot\omega_1$相切.



设直线 AP 与 $\odot(PBC)$ 交于另一点 K, 直线 PB, PC 与 AP 为直径的圆交于另两点 X, Y, 记 $\angle PBA=\angle ACP=\theta$. 由题设知

$$\frac{KB}{KC}=\frac{\sin\angle BPK}{\sin\angle KPC}=\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle CPA}=\frac{\sin\angle APB}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\angle CPA}=\frac{AB}{AP}\cdot\frac{AP}{AC}=\frac{AB}{AC}.$$

由

$$\angle QXB=\angle QXP=\angle QYP=\angle QYC,\ \angle QBX=\angle QBP=\angle QCP=\angle QCY.$$

所以 $\triangle QBX\sim\triangle QCY$. 由题设知 $\mathrm{Rt}\triangle ABX\sim\mathrm{Rt}\triangle ACY$. 所以

$$\frac{QB}{QC}=\frac{BX}{CY}=\frac{AB}{AC}=\frac{KB}{KC}.$$

所以 A, Q, K 三点在 $\odot\omega_1$ 上.由于 A, B, C 三点固定, 从而 $\odot\omega_1$ 为定圆. 下面证明 $\odot(QEF)$ 与 $\odot\omega_1$ 相切.

由题设知

$$\angle AEB=\angle(AE,\ EB)=\angle(AO,\ AB)+\angle(AB,\ BP)=\angle ACB+\frac{\pi}{2}-\theta,$$

而

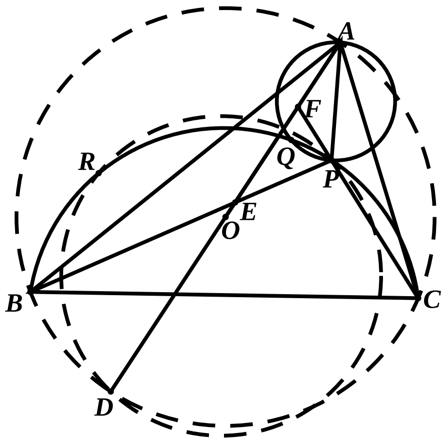
$$\begin{aligned}\angle AQB &= \angle(AQ,\ QB) = \angle(AQ,\ QP) + \angle(QP,\ QB)\\ &= \frac{\pi}{2} + \angle(PC,\ BC) = \frac{\pi}{2} + \angle(PC,\ AC) + \angle(AC,\ BC)\\ &= \angle ACB + \frac{\pi}{2} - \theta.\end{aligned}$$

故 $\angle AEB = \angle AQB$. 所以 $A,\ Q,\ E,\ B$ 四点共圆. 同理, $A,\ F,\ Q,\ C$ 四点共圆. 因此

$$\begin{aligned}\angle AKQ + \angle QEF &= \angle PKQ + \angle QEA\\ &= \angle PBQ + \angle QBA\\ &= \angle PBA = \angle ACP\\ &= \angle ACF = \angle AQF.\end{aligned}$$

这说明了 $\odot(QEF)$ 与 $\odot\omega_1$ 相切于点 Q.

第二部分证明 $\odot(QEF)$ 与以 $B,\ C$ 为端点, 定比为 $\frac{DB}{DC}$ 的阿波罗尼斯圆 $\odot\omega_2$ 相切.



设直线 AO 与 $\odot O$ 交于另一点 D, 以 DP 为直径的圆与 $\odot(PBC)$ 交于另一点 R. 由题设知 $AB \perp BD,\ AC \perp CD$, 故

$$\begin{aligned}\angle DCP &= \angle(DC,\ CA) + \angle(CA,\ CP) = \frac{\pi}{2} + \theta,\\ \angle PBD &= \angle(PB,\ AB) + \angle(AB,\ BD) = \frac{\pi}{2} + \theta.\end{aligned}$$

即 $\angle DCP = \angle PBD$. 由第一部分的证明过程知 $A,\ C,\ Q,\ F$ 四点共圆, $A,\ B,\ E,\ Q$ 四点共圆. 同理, $B,\ D,\ E,\ R$ 四点共圆, $C,\ D,\ R,\ F$ 四点共圆. 所以

$$\begin{aligned}\angle EQF &= \angle(EQ,\ QF) = \angle(EQ,\ QA) + \angle(QA,\ QF)\\ &= \angle(BE,\ AB) + \angle ACF = \angle PBA + \angle ACP\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\theta, \\
\angle ERF &= \angle(ER,\, RF) = \angle(ER,\, RD) + \angle(RD,\, RF) \\
&= \angle EBD + \angle DCF = \angle(BP,\, BD) + \angle(DC,\, CP) \\
&= \angle(BP,\, AB) + \angle(AB,\, BD) + \angle(DC,\, AC) + \angle(AC,\, CP) \\
&= \angle PBA + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \angle ACP \\
&= 2\theta.
\end{aligned}
$$

所以 $Q,\ E,\ R,\ F$ 四点共圆. 类似可证 $\odot\omega_2$ 与 $\odot(REF)$ 切于点 R. 由于 $D,\ B,\ C$ 三点固定, 从而 $\odot\omega_2$ 为定圆.

综上可知, $\odot(QREF)$ 与定圆 $\odot\omega_1$ 和定圆 $\odot\omega_2$ 相切. □

评注 一道中等难度的几何题, 关键在于发现找的圆是阿氏圆, 并且根据对称性可以找的第二个所求的圆.

题 6 设素数 $p \equiv 1 \pmod 8$. 求证:

$$\sum_{\substack{1\le i\le \frac{p-1}{2}\\ \left(\frac{i}{p}\right)=1}} \frac{1}{i} \equiv \sum_{\substack{1\le i\le \frac{p-1}{2}\\ \left(\frac{i}{p}\right)=-1}} \frac{1}{i} \pmod{p^2}.$$

证明 1(根据人大附中叶语行同学的解答整理) 首先证明如下引理:

引理 设 $2 \mid t$, $(p,\ x_i) = 1$, p 为奇素数. 若

$$\prod_{i=1}^{t} x_i \equiv \prod_{i=1}^{t} (p - x_i) \pmod{p^3}, \quad \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i^2} \equiv 0 \pmod{p},$$

则

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

证明 事实上, 由

$$\prod_{i=1}^{t} \left(\frac{p}{x_i} - 1\right) \equiv 1 \pmod{p^3},$$

知

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i} \equiv p \sum_{1\le i<j\le t} \frac{1}{x_i x_j} = \frac{p}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{x_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{t}\frac{1}{x_i^2}\right) \pmod{p^2}.$$

故

$$\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{x_i}\right)\left(\frac{p}{2}\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{x_i} - 1\right) \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

因此
$$\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{x_i}\equiv 0 \pmod{p^2}.$$
引理获证.

回到原题. 定义

$A=\{i\mid 1\le i\le p-1,\ 2\nmid i,\ \left(\frac{i}{p}\right)=1\}$, $B=\{i\mid 1\le i\le p-1,\ 2\mid i,\ \left(\frac{i}{p}\right)=1\}$,

$C=\{i\mid 1\le i\le p-1,\ 2\nmid i,\ \left(\frac{i}{p}\right)=-1\}$, $D=\{i\mid 1\le i\le p-1,\ 2\mid i,\ \left(\frac{i}{p}\right)=-1\}$.

则由欧拉准则, A 与 $p-B$ 是相同集合. 故 $|A|=|B|$, 同理 $|C|=|D|$. 而
$$|A|+|B|+|C|+|D|=p-1,\ |A|+|B|=|C|+|D|,$$
故
$$|A|=|B|=|C|=|D|=\frac{p-1}{4}=k$$
且 k 为偶数. 记 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\}$, 类似 $B,\ C,\ D$. 于是
$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i^2}\equiv\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{a_i^2}+\frac{1}{b_i^2}\right)\equiv\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{i^4}\equiv\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i^4}\equiv 0 \pmod{p},$$
因此
$$\prod_{i=1}^{k}a_i^2\equiv\prod_{i=1}^{k}(p^2-a_i^2)\equiv 2^{2k}\prod_{i=1}^{k}\frac{p+a_i}{2}\cdot\frac{p-a_i}{2}\equiv 2^{2k}\prod_{i=1}^{k}a_i\prod_{i=1}^{k}b_i \pmod{p^3},$$
其中最后一步是由于当 $p\equiv 1 \pmod 8$ 时 2 是 p 的二次剩余, 故 $\frac{p+a_i}{2}$, $\frac{p-a_i}{2}$ 取遍 a_i, b_i. 因此
$$\prod_{i=1}^{k}a_i\equiv 2^{2k}\prod_{i=1}^{k}b_i \pmod{p^3}.$$
同理
$$\prod_{i=1}^{k}c_i\equiv 2^{2k}\prod_{i=1}^{k}d_i \pmod{p^3}.$$
因此
$$\prod_{i=1}^{k}a_id_i\equiv\prod_{i=1}^{k}b_ic_i=\prod_{i=1}^{k}(p-a_i)(p-d_i) \pmod{p^3},$$
而
$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{a_i^2}+\frac{1}{d_i^2}\right)\equiv 0 \pmod{p},$$
故由引理知
$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{a_i}+\frac{1}{d_i}\right)\equiv 0 \pmod{p^2},$$

故

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{b_i}\equiv\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p-a_i}\equiv\sum_{i=1}^{k}\left(-\frac{1}{a_i}-\frac{p}{a_i^2}\right)\equiv-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}\equiv\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{d_i}\pmod{p^2}.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\frac{b_i}{2}}\equiv\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\frac{d_i}{2}}\pmod{p},$$

证毕! □

证明 2 (根据清华大学刘胤辰同学的解答整理)

我们证明给定 $p\equiv 1\pmod 8$ 为素数, 有

$$p^2\mid\sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}.$$

首先给出一个引理和一些 Bernoulli 多项式的相关结论.

引理 1 给定 $p\geq 5$ 为素数, 则

$$n^{\frac{p^2-p}{2}}\equiv\left(\frac{n}{p}\right)\pmod{p^2}.$$

证明 若 $(\frac{n}{p})=1$, 则根据欧拉判别准则, $n^{\frac{p-1}{2}}=1+kp,\ k\in\mathbb{Z}$. 因此, 根据 LTE, $\nu_p(n^{\frac{p^2-p}{2}}-1)=\nu_p(kp)+\nu_p(p)\geq 2$, 证毕.

若 $(\frac{n}{p})=0$, 结论显然成立.

若 $(\frac{n}{p})=-1$, 则根据欧拉准则, $n^{\frac{p-1}{2}}=-1+kp,\ k\in\mathbb{Z}$. 因此, 根据 LTE, $\nu_p(n^{\frac{p^2-p}{2}}+1)=\nu_p(kp)+\nu_p(p)\geq 2$, 证毕.

定义 **Bernoulli 数** b_n 定义如下:

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{t^n}{n!},\quad\forall t\neq 0,\ t\in\mathbb{C},$$

可通过归纳证明 $b_n\in\mathbb{Q}$. 计算得到 $b_0=1,\ b_1=-\frac{1}{2}$, 此时 $\frac{t}{e^t-1}+\frac{1}{2}t$ 为偶函数, 故当 $n\geq 3$ 且为奇数时, $b_n=0$.

相应的 **Bernoulli 多项式**定义如下:

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_kx^{n-k},\quad B_0(x)=1.$$

引理 2 Bernoulli 多项式满足以下生成函数:

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!},\quad\forall t\neq 0,\ x,\ t\in\mathbb{C}.$$

证明 利用定义展开得

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{b_kx^{n-k}}{k!(n-k)!}t^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k t^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(xt)^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k t^k}{k!} e^{xt} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}.$$

引理 3 Bernoulli 多项式满足以下关系:

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} [B_n(x+1) - B_n(x)] \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{(x+1)t} - te^{xt}}{e^t - 1} = te^{xt} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \frac{t^n}{n!}.$$

由幂级数展开的唯一性, 得证.

引理 4 给定 $p \geq 5$ 是一个素数, 则 Bernoulli 数满足以下同余性质:

(1) 若 $p-1 \nmid n$, 则 $\nu_p(b_n) \geq 0$. (其中 $\nu_p(\frac{a}{b}) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$, 对于有理数成立.)

(2) 若 $p-1 \mid n$, 则 $\nu_p(b_n + \frac{1}{p}) \geq 0$.

(3) $\nu_p(b_{\frac{p^2-p}{2}}) \geq 1$.

证明 对任意 $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$, 有

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{t \sum_{r=0}^{p-1} e^{rt}}{e^{pt} - 1} = \sum_{r=0}^{p-1} \frac{te^{rt}}{e^{pt} - 1}$$
$$= \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{r}{p}\right) \frac{(pt)^n}{n!}$$
$$= \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \left[p^n \sum_{r=0}^{p-1} B_n \left(\frac{r}{p}\right)\right] \frac{t^n}{n!}.$$

由幂级数展开的唯一性得:

$$b_n = p^{n-1} \sum_{r=0}^{p-1} B_n \left(\frac{r}{p}\right)$$
$$= p^{n-1} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \left(\frac{r}{p}\right)^{n-k}$$
$$= p^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k \sum_{r=0}^{p-1} \left(\frac{r}{p}\right)^{n-k} + p^n b_n.$$

因此, 我们有:

$$(1-p^n) b_n = \sum_{k=2}^{n-1} p^{k-1} b_k \times C_{n,\,k} + n b_1 \sum_{r=0}^{p-1} r^{n-1} + \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{p-1} r^n.$$

其中

$$C_{n,\,k} = \binom{n}{k} \sum_{r=0}^{p-1} r^{n-k} \in \mathbb{Z}, \quad 2 \leq k \leq n-1,$$

且 $b_1=-\frac{1}{2}$.

若 $p-1\nmid n$, 则 $p\mid\sum\limits_{r=0}^{p-1}r^n$, 若 $p-1\mid n$, 则 $p\mid 1+\sum\limits_{r=0}^{p-1}r^n$, 从而可以直接归纳得到结论 (1) 和 (2) .

对于 (3), 取 $n=\frac{p^2-p}{2}$. 注意到: 若 $k\geq 2$, 则

$$\nu_p(p^{k-1}b_k)=k-1+\nu_p(b_k)\geq 1.$$

根据引理 1 有

$$\sum_{r=0}^{p-1}r^{\frac{p^2-p}{2}}\equiv\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{r}{p}\right)=0\pmod{p^2}.$$

结合 $\nu_p(nb_1)\geq 1$ 知 (3) 成立.

回到原题, 有 $p\equiv 1\pmod 8$ 是素数, 故 $p\geq 17$ 且

$$\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)=1.$$

首先注意到

$$\sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{2n}{p}\right)\frac{1}{n}=\sum_{1\leq n=2k\leq p-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{2}{n},$$

结合 $(\frac{-1}{p})=1$, 有总和

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p-1}\left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p-n}\right)\\&=\frac{p}{2}\sum_{n=1}^{p-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n\,(p-n)}\\&\equiv-\frac{p}{2}\sum_{n=1}^{p-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n^2}\\&\equiv-\frac{p}{2}\sum_{n=1}^{p-1}n^{\frac{p-5}{2}}\equiv 0\pmod{p^2}.\end{aligned}$$

因此, 只需证明奇数项和满足

$$p^2\mid\sum_{1\leq n=p-2r\leq p-1}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}.$$

由引理 1, 这等价于证明

$$p^2\mid\sum_{1\leq r\leq\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{2}-r\right)^{\frac{p^2-p-2}{2}}.$$

结合引理 3, 有

$$\sum_{1\leq r\leq\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{2}-r\right)^{\frac{p^2-p-2}{2}}=\frac{2}{p^2-p}\sum_{1\leq r\leq\frac{p-1}{2}}\left[B_{\frac{p^2-p}{2}}\left(\frac{p}{2}-r+1\right)-B_{\frac{p^2-p}{2}}\left(\frac{p}{2}-r\right)\right]$$

$$= \frac{2}{p^2-p}\left[B_{\frac{p^2-p}{2}}\left(\frac{p}{2}\right) - B_{\frac{p^2-p}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\right],$$

注意到: 当 $n \geq 3$ 且为奇数时 $b_n = 0$, 且 $4 \mid \frac{p^2-p}{2}$, 故

$$B_{\frac{p^2-p}{2}}\left(\frac{p}{2}\right) \equiv b_{\frac{p^2-p}{2}} + b_{\frac{p^2-p}{2}-2}\binom{\frac{p^2-p}{2}}{2}\frac{p^2}{4} \pmod{p^3}.$$

当 $p \geq 17$ 时, 我们有 $p-1 \nmid \frac{p^2-p}{2} - 2$, 因此后一项对 p^3 取模为 0. 因此, 我们只需证明:

$$p^3 \mid b_{\frac{p^2-p}{2}} - B_{\frac{p^2-p}{2}}\left(\frac{1}{2}\right).$$

然而, 由于

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(2t)^n}{n!} = \frac{2te^t}{e^{2t}-1} = \frac{2t}{e^t-1} - \frac{2t}{e^{2t}-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(2-2^n)b_n\frac{t^n}{n!}.$$

根据幂级数展开的唯一性, 有

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2-2^n}{2^n}b_n.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\nu_p\left(b_{\frac{p^2-p}{2}} - B_{\frac{p^2-p}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \nu_p\left(\frac{2^{\frac{p^2-p}{2}}-1}{2^{\frac{p^2-p}{2}-1}}b_{\frac{p^2-p}{2}}\right) \\
&= \nu_p(b_{\frac{p^2-p}{2}}) + \nu_p(2^{\frac{p^2-p}{2}}-1) \\
&\geq 3,
\end{aligned}$$

其中最后的不等式用到

$$2^{\frac{p^2-p}{2}} \equiv \left(\frac{2}{p}\right) = 1 \pmod{p^2}.$$

综上, 题目得证. □

评注 此题是中等偏难的数论题, 主要想法在于对二次剩余和非二次剩余的奇偶分类, 从而得到目标的区间限制.

题 7 求最小的正常数 c, 使得对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^+$, 均有

$$\sum_{1\leq i,\, j\leq n}\left\{\frac{x_i}{x_j}\right\} \leq cn^2.$$

解 (根据北京一零一中学牟思特同学的解答整理) 一方面, 取

$$x_i = \begin{cases} 1+i\epsilon, & (1 \leq i \leq \frac{2}{7}n) \\ 2+i\epsilon, & (\frac{2}{7}n+1 \leq i \leq \frac{5}{7}n) \\ 4+i\epsilon, & (\frac{5}{7}n+1 \leq i \leq n) \end{cases}.$$

其中 $\epsilon \to 0^+$, $7 \mid n$ 且 $n \to +\infty$ $(n \cdot \epsilon \to 0)$. 可得 $c \geq \frac{9}{14}$.

下证对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \in \mathbb{R}^+$, 均有

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \left\{ \frac{x_i}{x_j} \right\} \leq \frac{9}{14} n^2.$$

注意对任意 $i \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, $x_i \in \mathbb{R}^+$, 故可设 $x_i = 2^{a_i} (a_i \in \mathbb{R})$, 于是即证

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\{2^{a_i - a_j}\} + \{2^{a_j - a_i}\}) \leq \frac{9}{14} n^2.$$

注意

$$\{2^t\} + \{2^{-t}\} \leq f(t) = \begin{cases} 1 + 2^{-t}, & t \geq 1 \\ 2^t + 2^{-t} - 1, & 0 \leq t < 1 \end{cases}.$$

于是

$$LHS \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} f(|a_i - a_j|).$$

断言: 可以调整使得对任意 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 有 $a_i \in \mathbb{Z}^+$ 且 $f(|a_i - a_j|)$ 不减.

构造图 $G(V,\ E)$, $V = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$, a_i 与 a_j 连边当且仅当 $|a_i - a_j| \in \mathbb{N}$. 注意到 G 的每个连通分支都是完全图, 于是若 G 不是完全图, 则 G 为至少 2 个完全图之并. 任意取一个完全图, 其顶点下角标构成集合 A, 其余的下角标构成集合 B. 将 A 中的每一个 a_i 同时加一个 x, 令

$$g(x) = \sum_{s \in A} \sum_{t \in B} f(|a_s - a_t + x|).$$

注意 $f(t)$ 在 $[0,\ 1]$ 与 $[1,\ +\infty)$ 上均为下凸函数. 仅讨论 $a_s - a_t$ 在$(-\infty, -1)$, $[-1, 0]$, $(0, 1]$, $(1,\ +\infty)$均有取值的情况, 其余情形类似. 记

$$M = \max\left\{ \max_{\substack{s \in A, t \in B \\ a_s - a_t < -1}} -1 - a_s + a_t,\ \max_{\substack{s \in A, t \in B \\ -1 \leq a_s - a_t \leq 0}} -a_s + a_t,\ \max_{\substack{s \in A, t \in B \\ 0 < a_s - a_t \leq 1}} 1 - a_s + a_t \right\},$$

$$m = \min\left\{ \min_{\substack{s \in A, t \in B \\ -1 \leq a_s - a_t \leq 0}} a_s - a_t + 1,\ \min_{\substack{s \in A, t \in B \\ 0 < a_s - a_t \leq 1}} a_s - a_t,\ \min_{\substack{s \in A, t \in B \\ 1 < a_s - a_t}} a_s - a_t - 1 \right\}.$$

取 $x \in [-m, M]$ 时, $a_s - a_t$ 与 $a_s - a_t + x$ 属于同一个区间. 由下凸函数性质知

$$g(0) \leq \max\{g(-m),\ g(M)\}.$$

故可在 A 与 B 之间连一条边, 使得连通分支个数减少, 因此不妨设 G 为完全图. 再由 a_i 的差平移不变性, 可让 $a_i \in \mathbb{Z}^+ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

进一步, 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, 记取值为 k 的 a_i 的个数为 y_k, 则

$$\frac{9}{14} n^2 = \frac{9}{14} \Big(\sum y_k \Big)^2,$$

而

$$\sum_{1\le i<j\le n} f(|a_i-a_j|)\le \sum \binom{y_k}{2}+\sum_{k<k'}(2^{k-k'}+1)y_ky_{k'}.$$

故只需证明:

$$\frac{1}{2}\sum y_k^2+\sum_{k<k'}(2^{k-k'}+1)y_ky_{k'}\le \frac{9}{14}\Big(\sum y_k\Big)^2. \tag{$*$}$$

记 $\cos\theta=-\frac{3}{4}$, $\theta\in(0,\ \pi)$. 下面证明:对任意 $t\in\mathbb{Z}^+$,

$$\cos(t\theta)=\frac{a_t}{2^{t+1}}\quad (a_t\in\mathbb{Z}),\ \sin(t\theta)=\frac{b_t}{2^{t+1}}\sqrt{7}\quad (b_t\in\mathbb{Z}),$$

且 $a_t\equiv b_t\equiv 1$ 或 $3 \pmod 4$.

对 t 归纳. $t=1$ 时命题成立. 假设 t 时成立, 考虑 $t+1$ 时, 则

$$\begin{aligned}\cos((t+1)\theta)&=\cos(t\theta)\cos(\theta)-\sin(t\theta)\sin(\theta)\\&=\frac{a_t}{2^{t+1}}\cdot\frac{-3}{4}-\frac{b_t\sqrt{7}}{2^{t+1}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{-3a_t-7b_t}{2^{t+3}},\end{aligned}$$

故

$$-3a_t-7b_t\equiv a_t+b_t\equiv 2\pmod 4.$$

约掉 2 知合题. 又

$$-3a_t-7b_t\equiv a_t-3b_t\pmod 8$$

知

$$a_{t+1}\equiv 1\text{ 或 }3\pmod 4,$$

同理可对 b_{t+1} 归纳. 结论成立!

再归纳证明 $a_t\equiv 2^{t+1}\pmod 7$ 对任意 $t\in\mathbb{Z}^+$. 当 $t=1$ 时成立. 假设 t 时成立, 考虑 $t+1$ 时, 则

$$a_{t+1}=\frac{1}{2}(-3a_t-7b_t)\equiv 2a_t\equiv 2^{t+2}\pmod 7$$

成立!

回到原题. 注意 $a_t\ne 2^{t+1}$, 故对任意 $t\in\mathbb{Z}^+$ 都有 $\cos(t\theta)<1$. 故

$$2^{t+1}\cos(t\theta)\le 2^{t+1}-7.$$

此时

$$(*)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum y_k^2+\sum_{k<k'}(1-7\cdot 2^{k-k'-1})y_ky_{k'}\ge 0.$$

注意到

$$1-7\cdot 2^{k-k'-1}\ge \cos(k-k')\theta,$$

于是

$$\text{LHS} \geq \frac{1}{2}\Big(\sum_{i,j}\cos(i-j)\theta y_i y_j\Big) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\Big(\sum_{i,j}\epsilon^{i-j}y_i y_j\Big) = \frac{1}{2}\Big|\sum_i \epsilon^i y_i\Big|^2 \geq 0,$$

其中 $\epsilon = \cos\theta + i\sin\theta$. 证毕!

综上, $c_{\min} = \frac{9}{14}$. $\square$

评注 此题是困难的代数题. 先需要进行一些尝试使左式达到 n^2 的量级, 再微调密度使得系数达到一个较优的数. 后考虑 θ 看似神来之笔, 实则是对题目的取等考虑. 值得一提的是, 2023 年 IMO 满分金牌得主史皓嘉指出对原问题可直接配方处理.