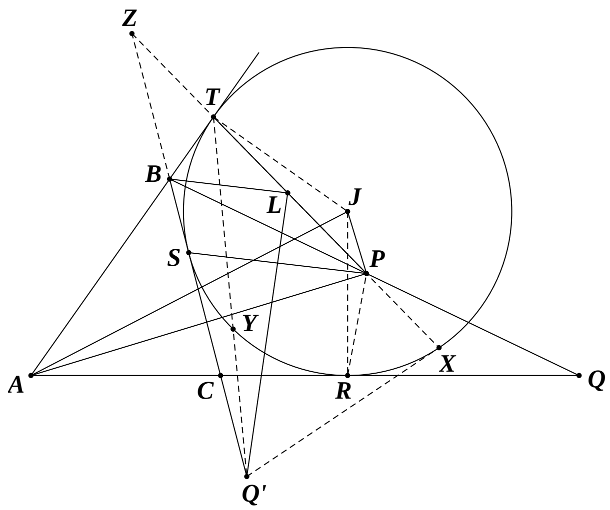
第五十一期问题征解解答与点评

张端阳

第一题 在 $\triangle ABC$ 中, A 所对的旁切圆 $\odot J$ 与 BC, AB 分别切于点 S, T. P 为平面上一点, 满足 $AP \perp PJ$, 延长 BP, AC 交于点 Q, Q 关于 JP 的对称点为 Q'. 过 B 作 PS 的平行线交 PT 于点 L. 证明: 若 Q' 在直线 BC 上, 则 $Q'L$ 平分线段 SP.

(马鞍山市第二中学学生 孙浩翔 供题)

解 (根据深圳中学王羿骁同学的解答整理):



设 AC 切 $\odot J$ 于点 R, 延长 TP 交 $\odot J$ 于点 X.

由 $\angle ATJ = \angle APJ = \angle ARJ = 90^\circ$ 知 A, T, J, P, R 五点共圆, 所以

$$\angle RPX = \angle BAC = 2\angle JAR = 2(180^\circ - \angle JPR),$$

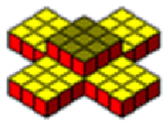
于是 R, X 关于 JP 对称. 又 Q, Q' 关于 JP 对称且 QR 与 $\odot J$ 相切, 所以 $Q'X$ 与 $\odot J$ 相切.

设 $Q'T$ 交 $\odot J$ 于点 Y, 则 $TSYX$ 是调和四边形, 于是 $TT, TY; TS, TX$ 是调和线束. 设 TP, BC 交于点 Z, 则 $B, Q'; S, Z$ 是调和点列. 从而 $LB, LQ'; LS, LZ$ 是调和线束, 又 $SP \parallel LB$, 故由调和的性质, $Q'L$ 平分线段 SP. $\square$

评注 西南大学附属中学李铭皓, 上海师范大学林忆宁等同学也给出了本题的正确解答.

第二题 用不超过 4 个小立方体只能拼成如下图所示的七种非凸立体图形, 其中每个立体图形称为一个部件, 七个不同的部件组成一套立体积木.

问: 至少需要几套立体积木, 才能拼出下图中的"花朵"(共 54 个小立方体) 形状?

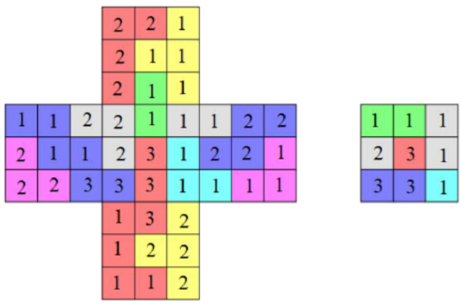


(赣州市厚德外国语学校学生 王庆宇 供题)

解 (根据供题者的整理):

为了区分不同的立体积木, 约定七种部件的颜色依次为粉、红、黄、蓝、绿、灰、青.

用三套立体积木可以拼出花朵, 方案如下:

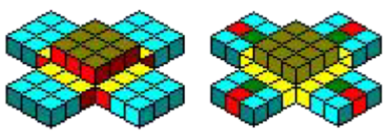


其中数字表示立体积木的套数, 颜色表示不同的部件.

下面证明用不超过两套立体积木不能拼出花朵.

因为一套立体积木共有 $3 + 6 \times 4 = 27$ 个小立方体, 而花朵共需 54 个小立方体, 所以如若可能, 则恰好用完两套立体积木.

为叙述方便, 先对花朵的一些部位进行命名.



"花瓣": 指与花朵中心部分不相邻的 4 组 6 个小立方体 (左图青色部分).

“花瓣内中心”: 指花瓣部分靠向内侧的中心小立方体 (右图绿色部分).

“花瓣外中心”: 指花瓣部分靠向外侧的中心小立方体 (右图红色部分).

因为花瓣与中心部分不相邻, 且仅由一层组成, 所以绿、灰、青色的部件不能对花瓣做出贡献.

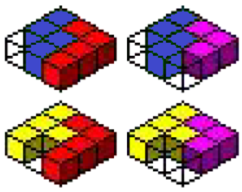
因为花瓣间的距离足够远, 所以任何部件都不能对多于一个花瓣同时做出贡献.

因为每个花瓣需要至少两个部件, 所以共需要至少八个扁平的部件. 而总共只有八个扁平的部件, 所以每个花瓣恰用到两个扁平的部件.

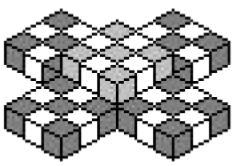
同时, 在一个花瓣中, 任何单个的部件都不能同时占据花瓣内中心和花瓣外中心. 否则它会将花瓣切成两半, 这样就不能只用另一个部件来填充余下的花瓣.

特别地, 黄、蓝色的部件不能用来填充花瓣外中心, 从而花瓣外中心只能由粉、红色的部件填充. 因此对应地, 花瓣内中心只能由黄、蓝色的部件填充.

经过枚举, 花瓣的填充组合只有如下四种:



如图, 对整个花朵进行黑白染色, 使得相邻小立方体的颜色不同.



由上面的讨论, 每个粉色部件中有 1 黑 2 白. 又其他每种部件中黑色小立方体个数的奇偶性是确定的, 所以黑色小立方体的总数是偶数, 这与黑色小立方体共有 29 个矛盾!

综上, 至少需要三套立体积木. □

第三题 设非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 满足对任意 $2 \le i \le 99$, 有

$$\max\{a_{i-1}+a_i, a_i+a_{i+1}\} \ge i+10.$$

求 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2$ 的最小值.

(中国人民大学附属中学 张端阳 陈宇轩 供题)

解 (**根据供题者的解答整理**):

考虑数轴上 $1\sim 100$ 之间的 99 条单位线段.

对 $1\le i\le 99$, 若 $a_i+a_{i+1}\ge i+11$ 则将 i 与 $i+1$ 之间的单位线段染红, 若 $a_i+a_{i+1}\in[i+10,i+11)$ 则染蓝, 否则不染色.

由条件, 对任意 $2\le i\le 99$, 要么 $i-1$ 与 i 连红边, 要么 i 与 $i+1$ 连有色边. 于是全体不染色的单位线段两两无公共端点, 这些线段将集合 $\{1,2,\cdots,100\}$ 划分为若干段.

我们给出 3 个明显的事实.

(1) $1,2,\cdots,100$ 都恰在某一个段中;

(2) 除了含 1 或 100 的段, 每段都至少含 2 个数;

(3) 对一个至少含 2 个数的段 $\{i,i+1,\cdots,j\}$, $j-1$ 与 j 连红边, r 与 $r+1$ $(i\le r\le j-2)$ 连有色边.

设共有 t 个段 $B_1,B_2,\cdots,B_t$, 其中 $1\in B_1, 100\in B_t$. 对 $1\le j\le t$, 记

$$E_j=\frac{2}{9}\sum_{\substack{x\in B_j\\ x\ne 100}}\left((x+10)^2+\frac{7}{3}\right).$$

下面证明, 对任意 j, 若 $B_j\ne\{1\}$, 则 $\sum\limits_{x\in B_j}a_x^2\ge E_j$. $\quad(*_j)$

不妨 $B_j\ne\{100\}$. 先将 B_j 划分为若干小段, 每个小段含 2 或 3 个连续数, 且含 3 个连续数的小段 (若存在的话) 必须由 B_j 中最大的 3 个元素构成. (由 $|B_j|\ge 2$ 知可作这样的划分)

对划分出来的每个小段 C.

• 若 C 含两个数 $i,i+1$, 则 i 与 $i+1$ 连有色边, 于是 $a_i+a_{i+1}\ge i+10$, 从而

$$\begin{aligned}\sum_{x\in C}a_x^2&=a_i^2+a_{i+1}^2\ge\frac{1}{2}(a_i+a_{i+1})^2\ge\frac{1}{2}(i+10)^2\\&\ge\frac{2}{9}\left((i+10)^2+(i+11)^2+\frac{14}{3}\right)\\&=\frac{2}{9}\sum_{x\in C}\left((x+10)^2+\frac{7}{3}\right),\end{aligned}$$

其中倒数第二步用到 $i\ge 1$.

• 若 C 含三个数 $i-1,i,i+1$ 且 $i+1\ne 100$, 则 $i-1$ 与 i 连有色边, i 与 $i+1$ 连红边, 于是 $a_{i-1}+a_i\ge i+9, a_i+a_{i+1}\ge i+11$. 从而当 $a_i\ge i+9$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{x\in C}a_x^2&=a_{i-1}^2+a_i^2+a_{i+1}^2\\&\ge(i+9)^2\ge\frac{2}{3}(i+10)^2+2\\&=\frac{2}{9}\sum_{x\in C}\left((x+10)^2+\frac{7}{3}\right);\end{aligned}$$

当 $a_i \le i+9$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{x\in C} a_x^2 &\ge (i+9-a_i)^2 + a_i^2 + (i+11-a_i)^2 \\ &= 3a_i^2 - (4i+40)a_i + 2i^2 + 40i + 202 \\ &\ge \frac{2}{3}(i+10)^2 + 2 \\ &= \frac{2}{9}\sum_{x\in C}\left((x+10)^2 + \frac{7}{3}\right).\end{aligned}$$

• 若 C 含三个数 $i-1, i, i+1$ 且 $i+1=100$, 则 $i-1$ 与 i 连有色边, 于是 $a_{i-1}+a_i \ge i+9$, 从而

$$\begin{aligned}\sum_{x\in C} a_x^2 &\ge a_{i-1}^2 + a_i^2 \ge \frac{1}{2}(a_{i-1}+a_i)^2 \ge \frac{1}{2}(i+9)^2 \\ &\ge \frac{2}{9}\left((i+9)^2 + (i+10)^2 + \frac{14}{3}\right) \\ &= \frac{2}{9}\sum_{\substack{x\in C \\ x\ne 100}}\left((x+10)^2 + \frac{7}{3}\right).\end{aligned}$$

于是, 我们说明了由 B_j 划分得的每个小段 C 中, 都有

$$\sum_{x\in C} a_x^2 \ge \frac{2}{9}\sum_{\substack{x\in C \\ x\ne 100}}\left((x+10)^2 + \frac{7}{3}\right).$$

对 C 求和即得 $(*_j)$ 成立.

对 $1 \le j \le t$, 记

$$F_j = \frac{2}{9}\sum_{\substack{x\in B_j \\ x\ne 1\text{或}100}}\left((x+10)^2 + \frac{7}{3}\right).$$

下证存在 j 使

$$\sum_{x\in B_j} a_x^2 \ge F_j + \frac{1648}{135},$$

分 4 种情形讨论.

情形 1. $B_1 \ne \{1\}$.

此时

$$\sum_{x\in B_1} a_x^2 \ge E_1 = F_1 + \frac{2}{9}\left(11^2 + \frac{7}{3}\right) \ge F_1 + \frac{1648}{135}.$$

情形 2. $B_1 = \{1\}$ 且存在一段含偶数个数.

不妨设 $|B_j| = 2u$. 仿照上面的证明知可将 B_j 划分为 u 个小段 $C_1 \sim C_u$, 每个小段含两个数. 对 $1 \le i \le u-1$, 有

$$\sum_{x\in C_i} a_x^2 \ge \frac{2}{9}\sum_{x\in C_i}\left((x+10)^2 + \frac{7}{3}\right). \qquad ①$$

(i) 若 $C_u=\{99,100\}$, 则 99 与 100 连有色边, 于是 $a_{99}+a_{100}\ge 109$, 从而

$$\sum_{x\in C_u}a_x^2=a_{99}^2+a_{100}^2\ge\frac{1}{2}\cdot 109^2\ge\frac{2}{9}\sum_{\substack{x\in C_u\\ x\ne 100}}\left((x+10)^2+\frac{7}{3}\right)+\frac{1648}{135}.$$

(ii) 若 $C_u\ne\{99,100\}$, 记 $C_u=\{y,y+1\}$, 则 $y\ge 2$. 有 y 与 $y+1$ 连红边, 于是 $a_y+a_{y+1}\ge y+11$, 从而

$$\begin{aligned}\sum_{x\in C_u}a_x^2=a_y^2+a_{y+1}^2&\ge\frac{1}{2}(a_y+a_{y+1})^2\ge\frac{1}{2}(y+11)^2\\&\ge\frac{2}{9}\left((y+10)^2+(y+11)^2+\frac{14}{3}\right)+\frac{1648}{135},\end{aligned}$$

其中最后一步用到 $y\ge 2$.

故

$$\sum_{x\in C_u}a_x^2\ge\frac{2}{9}\sum_{\substack{x\in C_u\\ x\ne 100}}\left((x+10)^2+\frac{7}{3}\right)+\frac{1648}{135},$$

与 ① 相加即证.

情形 3. $B_1=\{1\}$ 且存在一段含奇数 (不小于 5) 个数.

不妨设 $|B_j|=2u+3(u\ge 1)$. 将 B_j 划分为 u 个小段 $C_1\sim C_u$, 且 $|C_1|=\cdots=|C_{u-1}|=2,|C_u|=5$. 对 $1\le i\le u-1$, 有

$$\sum_{x\in C_i}a_x^2\ge\frac{2}{9}\sum_{x\in C_i}\left((x+10)^2+\frac{7}{3}\right).\qquad ②$$

(i) 若 C_u 不含 100, 记 $C_u=\{y-2,y-1,y,y+1,y+2\}$, 则 $y\ge 4$. 有 $a_{y-2}+a_{y-1}\ge y+8$, $a_{y-1}+a_y\ge y+9$, $a_y+a_{y+1}\ge y+10$, $a_{y+1}+a_{y+2}\ge y+12$.

- $a_y\ge\frac{y+8}{2}$ 时,

$$\begin{aligned}a_{y-2}^2+a_{y-1}^2+a_y^2+a_{y+1}^2+a_{y+2}^2&\ge\frac{1}{2}(y+8)^2+\frac{1}{2}(y+12)^2+(\tfrac{y+8}{2})^2\\&\ge\frac{6}{5}(y+10)^2-\frac{2}{5}(y+10)+\frac{26}{5},\end{aligned}$$

其中最后一步用到 $y\ge 4$.

- $a_y\le\frac{y+8}{2}$ 时,

$$a_{y-1}\ge y+9-a_y\ge\frac{y+8}{2},\quad a_{y+1}\ge y+10-a_y\ge\frac{y+12}{2},$$

于是

$$\begin{aligned}a_{y-2}^2+a_{y-1}^2&\ge(y+8-a_{y-1})^2+a_{y-1}^2\ge(a_y-1)^2+(y+9-a_y)^2,\\a_{y+1}^2+a_{y+2}^2&\ge a_{y+1}^2+(y+12-a_{y+1})^2\ge(y+10-a_y)^2+(a_y+2)^2.\end{aligned}$$

从而

$$a_{y-2}^2+a_{y-1}^2+a_y^2+a_{y+1}^2+a_{y+2}^2$$

$$
\begin{aligned}
&\geq (a_y-1)^2+(y+9-a_y)^2+a_y^2+(y+10-a_y)^2+(a_y+2)^2\\
&=5a_y^2-(4y+36)a_y+2y^2+38y+186\\
&\geq \frac{6}{5}(y+10)^2-\frac{2}{5}(y+10)+\frac{26}{5}\\
&\geq \frac{2}{9}\sum_{x=y-2}^{y+2}\left((x+10)^2+\frac{7}{3}\right)+\frac{1648}{135},
\end{aligned}
$$

其中最后一步当 $y=4$ 时取等.

(ii) 若 C_u 含 100, 则 $y=98$, $a_{98}+a_{99}\geq 108$, 于是

$$
a_{98}^2+a_{99}^2\geq \frac{1}{2}\cdot 108^2\geq \frac{2}{9}\left(108^2+109^2+\frac{14}{3}\right)+\frac{1648}{135}.
$$

再结合

$$
a_{96}^2+a_{97}^2\geq \frac{2}{9}\left(106^2+107^2+\frac{14}{3}\right)
$$

知

$$
\sum_{x\in C_u}a_x^2\geq \frac{2}{9}\sum_{\substack{x\in C_u\\ x\neq 100}}\left((x+10)^2+\frac{7}{3}\right)+\frac{1648}{135},
$$

与 ② 相加即证.

情形 4. $B_1=\{1\}$ 且其余 $|B_j|=3$, 此时 $B_{34}=\{98,99,100\}$. 类似情形 3 中的 (ii) 即证.

这样, 我们证明了 $\sum\limits_{x\in B_j}a_x^2\geq F_j$, 且存在 j 使 $\sum\limits_{x\in B_j}a_x^2\geq F_j+\frac{1648}{135}$. 故

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{100}a_x^2&=\sum_{j=1}^{t}\sum_{x\in B_j}a_x^2\\
&\geq \sum_{j=1}^{t}F_j+\frac{1648}{135}\\
&=\frac{2}{9}\sum_{x=2}^{99}\left((x+10)^2+\frac{7}{3}\right)+\frac{1648}{135}\\
&=97202.8.
\end{aligned}
$$

最后, 令

$$
a_1=0,\ a_2=4.2,\ a_3=7.8,\ a_4=5.2,\ a_5=8.8,\ a_6=7.2,
$$

对 $3\leq k\leq 33$,

$$
a_{3k-2}=k+2,\quad a_{3k-1}=2k+6,\quad a_{3k}=k+4,
$$

且 $a_{100}=0$. 容易验证它们满足要求, 且平方和为 97202.8.

综上, 所求最小值为 97202.8. □

评注 本题是 2023 年西部数学邀请赛第 5 题的二次版本, 条件中增加了“+10”是为了避免对 $a_1 \sim a_{11}$ 的繁琐讨论.

第四题 设 m 是正整数. 证明: 对任意整数 $n > 2m$, 可以将 n 写为 m 个大于 1 的整数之和, 使得这 m 个数中每一个的最大素因子都不超过 $cn^{\frac{8}{15m-10}}$, 其中 c 是只与 m 有关的常数.

(北京大学学生 关乃鄰 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):

记性质 $P(a,b)$ 为存在常数 c, 使得对任意整数 $n \geq 6$, 可以将 n 写为 n_1, n_2 之和, 满足 n_1 的素因子不超过 cn^a, 且 $2 < n_2 \leq cn^b$.

(1) 先证明 $P(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

对 $n > 50$, 令 $u = \lceil n^{\frac{1}{5}} \rceil$, 设 $n = uq + r$, 其中 $0 < r \leq u$, $\frac{1}{2}n^{\frac{4}{5}} < q \leq n^{\frac{4}{5}}$.

取 $x = \lceil \sqrt{q} \rceil$, 取 y 为使 $x^2 - y^2 < q - 1$ 的最小正整数. 因为

$$q - 1 \geq (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x > x^2 - (2\sqrt{x})^2,$$

所以 $y \leq \lceil 2\sqrt{x} \rceil \leq 3\sqrt{x}$. 由 y 的最小性,

$$q - 1 \leq x^2 - (y-1)^2 = x^2 - y^2 + 2y - 1,$$

所以

$$x^2 - y^2 \geq q - 2y \geq q - 6\sqrt{x} > q - 10q^{\frac{1}{4}}.$$

记 $q - (x^2 - y^2) = t$, 则 $1 < t < 10q^{\frac{1}{4}} \leq 10n^{\frac{1}{5}}$, 所以

$$n = uq + r = u(x^2 - y^2 + t) + r = u(x-y)(x+y) + (ut + r).$$

由 $u \leq 2n^{\frac{1}{5}}, x \leq 2n^{\frac{2}{5}}, y \leq 6n^{\frac{1}{5}}$ 知 $u, x-y, x+y$ 都不超过 $3n^{\frac{2}{5}}$, 又

$$ut + r < 10n^{\frac{1}{5}}u + r < (10n^{\frac{1}{5}} + 1)2n^{\frac{1}{5}} < 22n^{\frac{2}{5}},$$

所以当 $c = 22$ 时

$$n_1 = u(x-y)(x+y), n_2 = ut + r$$

满足 $P(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

(2) 再证明对 $\alpha \leq \frac{1}{4}$ 有 $P(\alpha, 1 - \frac{15}{8}\alpha)$.

(2.1) 证明 $P(\frac{1}{4}, \frac{17}{32})$.

取 c_0 充分大, 当 n 充分大时, 考虑

$$S = (x+a)(x+b)(x+c)(x-a-b-c),$$

其中 $x=\lceil n^{\frac{1}{4}}\rceil$ 且 $a,b,c<c_0n^{\frac{1}{8}}$.

记 $u=a+\frac{b+c}{2}, v=b+\frac{2c}{3}, w=c$, 则

$$\begin{aligned} S&=x^4-(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)x^2-(a+b)(b+c)(c+a)x-(a+b+c)abc\\ &=x^4-\left(u^2+\tfrac{3v^2}{4}+\tfrac{5w^2}{12}\right)x^2-\left(u+\tfrac{v}{2}-\tfrac{5w}{6}\right)\left(v+\tfrac{w}{3}\right)\left(u-\tfrac{v}{2}+\tfrac{5w}{6}\right)x+T,\end{aligned}$$

其中 $T=(a+b+c)abc<3c_0^4n^{\frac{1}{2}}$.

下面证明可保证 u,v,w 都是 12 的倍数, 从而

$$a=u-\tfrac{v}{2}-\tfrac{w}{6},\quad b=v-\tfrac{2w}{3},\quad c=w$$

都是整数.

记 $S=f(u,v,w)$.

先取最小的正整数 u 使 $f(u,0,0)<n+c_0n^{\frac{5}{8}}$ 且 $12\mid u$. 记这个 u 为 u_0, 则

$$x^4-u_0^2x^2<n+c_0n^{\frac{5}{8}}\le x^4-(u_0-12)^2x^2.$$

而

$$n>(x-1)^4>x^4-4x^3>x^4-(2n^{\frac{1}{8}})^2x^2,$$

所以 $u_0\le\lceil 2n^{\frac{1}{8}}\rceil+12<4n^{\frac{1}{8}}$, 于是

$$n+\tfrac{1}{2}c_0n^{\frac{5}{8}}<f(u_0,0,0)=x^4-u_0^2x^2<n+c_0n^{\frac{5}{8}}.$$

再取最小的正整数 v 使 $f(u_0,v,0)<n+c_0^2n^{\frac{9}{16}}$ 且 $12\mid v$. 记这个 v 为 v_0, 记

$$A=f(u_0,0,0)-(n+c_0^2n^{\frac{9}{16}})\in(0,c_0n^{\frac{5}{8}}),$$

则 v_0 是使 $f(u_0,0,0)-f(u_0,v,0)>A$ 的最小正整数 v.

因为

$$f(u_0,0,0)-f(u_0,v,0)=\tfrac{3v^2}{4}x^2+(u_0+\tfrac{v}{2})(u_0-\tfrac{v}{2})vx,$$

所以

$$\begin{aligned}&\tfrac{3v_0^2}{4}x^2+(u_0+\tfrac{v_0}{2})(u_0-\tfrac{v_0}{2})v_0x>A\\ &\ge\tfrac{3(v_0-12)^2}{4}x^2+(u_0+\tfrac{v_0-12}{2})(u_0-\tfrac{v_0-12}{2})(v_0-12)x.\end{aligned}$$

因为

$$(u_0+\tfrac{v_0}{2})(u_0-\tfrac{v_0}{2})<(u_0+\tfrac{v_0-12}{2})(u_0-\tfrac{v_0-12}{2})<u_0^2,$$

所以

$$\begin{aligned}f(u_0,v_0-12,0)-f(u_0,v_0,0)&<18v_0x^2+(u_0+\tfrac{v_0}{2})(u_0-\tfrac{v_0}{2})\cdot 12x\\ &<18v_0x^2+12u_0^2x<18v_0x^2+24c_0^2n^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

记 $v_1=c_0n^{\frac{1}{16}}$, 则

$$\begin{aligned}f(u_0,0,0)-f(u_0,v_1,0)&\ge\tfrac{3v_1^2}{4}x^2-\tfrac{v_1^3}{4}x\ge\tfrac{3c_0^2}{4}n^{\frac{5}{8}}-\tfrac{c_0^3}{4}n^{\frac{7}{16}}\\&>\tfrac{c_0^2}{2}n^{\frac{5}{8}}>c_0n^{\frac{5}{8}}>A,\end{aligned}$$

所以 $v_0\le\lceil v_1\rceil<2c_0n^{\frac{1}{16}}$. 于是

$$f(u_0,v_0-12,0)-f(u_0,v_0,0)<18v_0x^2+24c_0^2n^{\frac{1}{2}}<150c_0n^{\frac{9}{16}},$$

从而 $f(u_0,0,0)-f(u_0,v_0,0)\in(A,A+\frac{1}{2}c_0^2n^{\frac{9}{16}})$, 即有

$$n+\tfrac{1}{2}c_0^2n^{\frac{9}{16}}<f(u_0,v_0,0)<n+c_0^2n^{\frac{9}{16}}.$$

最后取最小的正整数 w 使 $f(u_0,v_0,w)<n-2$ 且 $12\mid w$. 记这个 w 为 w_0, 记

$$B=f(u_0,v_0,0)-(n-2)\in(0,2c_0^2n^{\frac{9}{16}}),$$

则 w_0 是使 $f(u_0,v_0,0)-f(u_0,v_0,w)>B$ 的最小正整数 w.

注意到

$$\begin{aligned}&f(u_0,v_0,0)-f(u_0,v_0,w)\\=&\tfrac{5w^2}{12}x^2+\big((u_0+\tfrac{v_0}{2}-\tfrac{5}{6}w)(v_0+\tfrac{w}{3})(u_0-\tfrac{v_0}{2}+\tfrac{5w}{6})\\&-(u_0+\tfrac{v_0}{2})v_0(u_0-\tfrac{v_0}{2})\big)x+T\\=&\tfrac{5w^2}{12}x^2+wg(u_0,v_0,w)x+T,\end{aligned}$$

其中 $g(u_0,v_0,w)$ 是关于 w 的二次多项式, 各项系数的绝对值不超过 3, 所以

$$\begin{aligned}&\tfrac{5w_0^2}{12}x^2+w_0g(u_0,v_0,w_0)x+T>B\\>&\tfrac{5(w_0-12)^2}{12}x^2+(w_0-12)g(u_0,v_0,w_0-12)x+T.\end{aligned}$$

由 u_0,v_0,w_0,w_0-12 都小于 $c_0n^{\frac{1}{8}}$ 且 $g(u_0,v_0,w)$ 系数绝对值之和小于 c_0, 知

$$g(u_0,v_0,w_0),g(u_0,v_0,w_0-12)\le c_0^3n^{\frac{1}{4}},$$

所以

$$f(u_0,v_0,w_0-12)-f(u_0,v_0,w_0)\le10w_0x^2+12c_0^3n^{\frac{1}{4}}x<10w_0x^2+24c_0^3n^{\frac{1}{2}}.$$

记 $w_1=12c_0n^{\frac{1}{32}}$, 则

$$\begin{aligned}f(u_0,v_0,0)-f(u_0,v_0,w_1)&\ge\tfrac{5w_1^2}{12}x^2+w_1g(u_0,v_0,w_1)x\\&>60c_0^2n^{\frac{9}{16}}-12c_0n^{\frac{1}{32}}\cdot c_0^3n^{\frac{1}{4}}\cdot2n^{\frac{1}{4}}\\&>2c_0^2n^{\frac{9}{16}}>B,\end{aligned}$$

所以 $w_0\le\lceil w_1\rceil<15c_0n^{\frac{1}{32}}$. 于是

$$f(u_0,v_0,w_0-12)-f(u_0,v_0,w_0)<10w_0x^2+24c_0^3n^{\frac{1}{2}}<600c_0n^{\frac{17}{32}},$$

从而 $f(u_0,v_0,0)-f(u_0,v_0,w)\in(B,B+600c_0n^{\frac{17}{32}})$, 即有

$$n-2-600c_0n^{\frac{17}{32}}<f(u_0,v_0,w_0)<n-2.$$

取 c 充分大使 $n-f(u_0,v_0,w_0)<cn^{\frac{17}{32}}$, 又 $f(u_0,v_0,w_0)$ 素因子不超过

$$\max\{x+a,x+b,x+c,x-a-b-c\}<cn^{\frac{1}{4}},$$

故 $P(\frac{1}{4},\frac{17}{32})$ 成立.

(2.2) 证明对 $k\geq 4$ 有 $P(\frac{1}{k},1-\frac{15}{8k})$.

对 k 归纳. 当 $k=4$ 时已证, 假设 k 时成立, 考虑 $k+1$ 时的情形.

对 n 充分大, 令 $u=\lceil n^{\frac{1}{k+1}}\rceil$, 设 $n=uq+r$, 其中 $0<r\leq u$, $\frac{1}{2}n^{\frac{k}{k+1}}<q\leq n^{\frac{k}{k+1}}$. 由归纳假设, 存在 c, 使得 $q=q_1+q_2$, q_1 的素因子不超过 $cq^{\frac{1}{k}}$, 且 $2<q_2\leq cq^{1-\frac{15}{8k}}$. 由 $q\leq n^{\frac{k}{k+1}}$ 知 q_1 的素因子不超过 $cn^{\frac{1}{k+1}}$, 且 $2<q_2\leq cn^{1-\frac{23}{81(k+1)}}$.

现在, $n=uq_1+(uq_2+r)$, uq_1 的素因子不超过 u 与 q_1 的素因子的较大者, 因此不超过 $\max\{u,cn^{\frac{1}{k+1}}\}=cn^{\frac{1}{k+1}}$. 又

$$\begin{aligned}uq_2+r&\leq 2n^{\frac{1}{k+1}}\cdot cn^{1-\frac{23}{8(k+1)}}+2n^{\frac{1}{k+1}}\\&=2cn^{1-\frac{15}{8(k+1)}}+2n^{\frac{1}{k+1}}<3cn^{1-\frac{15}{8(k+1)}},\end{aligned}$$

故有 $P(\frac{1}{k+1},1-\frac{15}{8(k+1)})$ 成立, 归纳证毕.

(2.3) 证明对 $\alpha<\frac{1}{4}$ 有 $P(\alpha,1-\frac{15}{8}\alpha)$.

当 $\frac{1}{\alpha}\in\mathbb{Z}$ 时已证, 下设 $\frac{1}{\alpha}\notin\mathbb{Z}$.

设 $\frac{1}{l+1}<\alpha<\frac{1}{l}$, 其中 $l\in\mathbb{Z}$ 且 $l\geq 4$. 记 $\beta=1-l\alpha$, 则 $0<\beta<\frac{1}{l+1}<\alpha$.

对 n 充分大, 令 $u=\lceil n^{\beta}\rceil$, 设 $n=uq+r$, 其中 $0<r\leq u$, $\frac{1}{2}n^{1-\beta}<q\leq n^{1-\beta}$. 因为有 $P(\frac{1}{l},1-\frac{15}{8l})$, 所以存在 c, 使得 $q=q_1+q_2$, q_1 的素因子不超过 $cq^{\frac{1}{l}}$, 且 $2<q_2\leq cq^{1-\frac{15}{8l}}$. 由 $q\leq n^{1-\beta}=n^{l\alpha}$ 知 q_1 的素因子不超过 cn^{α}, 且 $2<q_2\leq cn^{1-\beta}n^{-\frac{15}{8}\alpha}$.

现在, $n=uq_1+(uq_2+r)$, uq_1 的素因子不超过 u 与 q_1 的素因子的较大者, 因此不超过 $\max\{u,cn^{\alpha}\}=cn^{\alpha}$. 又

$$\begin{aligned}uq_2+r&\leq 2n^{\beta}\cdot cn^{1-\beta}n^{-\frac{15}{8}\alpha}+2n^{\beta}\\&\leq 2cn^{1-\frac{15}{8}\alpha}+2n^{1-4\alpha}\leq 3cn^{1-\frac{15}{8}\alpha},\end{aligned}$$

取有 $P(\alpha,1-\frac{15}{8}\alpha)$ 成立.

(3) 对 m 归纳证明原结论成立.

当 $m=2$ 时有 $P(\frac{2}{5},\frac{2}{5})$ 成立. 假设 m 时成立, 来看 $m+1$ 时的情形.

因为 $\frac{8}{15m+5}\leq\frac{8}{35}<\frac{1}{4}$, 所以由引理, 有 $P(\frac{8}{15m+5},\frac{3m-2}{3m+1})$ 成立. 于是存在 c, 使得 $n=n_1+n_0$, n_1 的素因子不超过 $cn^{\frac{8}{15m+5}}$, 且 $2<n_0<cn^{\frac{3m-2}{3m+1}}$.

对 n_0 用 m 时的归纳假设, 知存在 $n_2,n_3,\cdots,n_{m+1}$, 使得 $n_0=n_2+n_3+\cdots+$

n_{m+1}, 且 n_i 的素因子不超过 $c_m n_0^{\frac{8}{15m-10}}(2 \le i \le m+1)$. 又 $n_0 \le cn^{\frac{3m-2}{3m+1}}$, 所以对 $2 \le i \le m+1$, n_i 的素因子不超过 $cc_m n^{\frac{8}{15m+5}}$. 令 $c_{m+1} = cc_m$, 则 n_i 素因子不超过 $c_{m+1} n^{\frac{8}{15m+5}}(1 \le i \le m+1)$, 归纳证毕.

综上, 原命题得证. $\square$

评注 人大附中李润博同学指出本题有如下的加强.

当 $m = 2$ 时, 本题等价于对任意整数 $n > 4$, 存在正整数 a, b, 使得 $n = a + b$, 且 $P(ab) \le n^{\theta}$, 其中 $P(x)$ 为 x 的最大素因子, $\theta = \frac{2}{5}$. 当 n 充分大时, A.Balog 在 1989 年证明了 $\theta = 0.27$ 时命题成立, 但证明过程不是完全初等的. 付云皓老师指出 $m = 2$ 时的指数 $\frac{2}{5}$ 在初等范围内难以优化.

当 $m = 3$ 时, A.Balog 和 A.Sarkozy 证明了指数可以取到任意小的正数 ε. 由他们的结果可以立即推出当 $m > 3$ 时指数也可以取到 ε, 这是对本题在 n 充分大时的完全加强. 而当 $m = 2$ 时指数是否能取到 ε 是一个没有解决的问题.