古希腊人如何做正五边形？

——重读《几何原本》

周毅博

(海亮高级中学, 311899)

1　写作源起

爱因斯坦说过: “如果欧几里得未能激发起你少年时代的科学热情, 那么你肯定不会是一个天才的科学家. ”

笔者为准备针对小初学生的数学启蒙讲座, 翻阅了《几何原本》, 试图还原两千多年前的古希腊人如何尺规作图作正五边形. 以前总觉得《几何原本》不知所云, 这次以问题为导向去阅读、研究, 才发现其中奥妙!

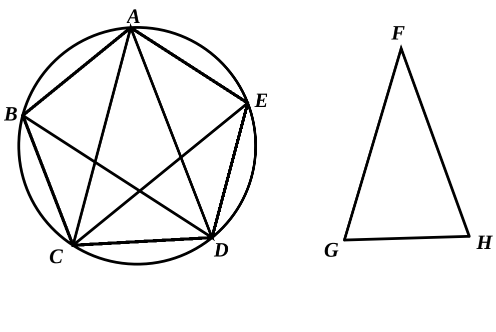
这里记录下我的探索过程. 读到最后, 你一定也能感受到数学之美!

注 1　下文命题序号来自《几何原本》.

注 2　第一遍阅读命题可以先粗看, 下面有我的解读, 第二遍再研究细节.

2　关键目标: 作圆内接正五边形

命题 IV.11　*在一个圆里, 可以作一个内接正五边形.*



作图过程　设 $ABCDE$ 为给定的圆.

作: 在圆$ABCDE$ 内作一个内接正五边形.

修订日期: **2024-02-28.**

令: **作等腰三角形 FGH, 使 $\angle G$、$\angle H$ 分别等于 $\angle F$ 的两倍.** 在圆 $ABCDE$ 内作三角形 ACD 等角于三角形 FGH.

于是: $\angle CAD$ 、$\angle ACD$ 和 $\angle CDA$ 分别等于 $\angle F$、$\angle G$、$\angle H$.

所以: $\angle ACD$、$\angle CDA$ 也分别等于 $\angle CAD$ 的两倍(命题 IV.10、V.2).

分别作平分线 CE 、DB 平分 $\angle ACD$ 、$\angle CDA$, 连接 AB、BC 、DE 和 EA (命题 I. 9).

证明 因为 $\angle ACD$、$\angle CDA$ 是 $\angle CAD$ 的两倍, 并被 CE 、DB 平分. 所以五个角 $\angle DAC$ 、 $\angle ACE$ 、 $\angle ECD$ 、 $\angle CDB$ 和 $\angle BDA$ 彼此相等.

又等角所对的弧相等. 所以五段弧 $\overset{\frown}{AB}$ 、$\overset{\frown}{BC}$ 、$\overset{\frown}{CD}$ 、$\overset{\frown}{DE}$ 和 $\overset{\frown}{EA}$ 彼此相等(命题 III.26).

又等弧所对的弦相等. 所以五条弦 AB 、BC 、CD 、DE 和 EA 彼此相等.

所以五边形 $ABCDE$ 是等边的 (命题 III.29).

进一步说: 它们是等角的.

因为弧 $\overset{\frown}{AB}$ 等于弧 $\overset{\frown}{DE}$, 令每个加上弧 $\overset{\frown}{BCD}$, 于是: 大弧 $\overset{\frown}{ABCD}$ 等于大弧 $\overset{\frown}{EDCB}$.

在弧 $\overset{\frown}{ABCD}$ 上有 $\angle AED$, 在弧 $\overset{\frown}{EDCB}$ 上有 $\angle BAE$, 所以: $\angle BAE$ 也等于 $\angle AED$ (命题 III.27).

同理, $\angle ABC$ 、$\angle BCD$ 和 $\angle CDE$ 也等于 $\angle BAE$ 、$\angle AED$.

所以五边形 $ABCDE$ 是等角的.

又已经证明出它是等边的. 所以在一个圆里, 可以作一个内接正五边形. □

关键一步是“命题 IV. 10”, 即作出“黄金三角形”, 后面是常规的作角平分线及几何证明作图的正确性.

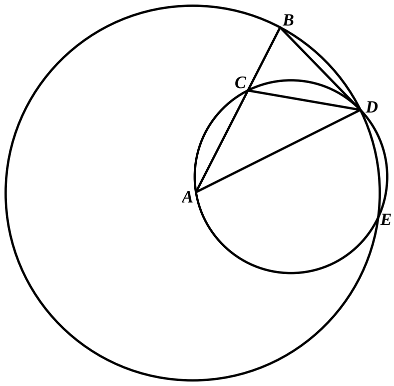
3 作“黄金三角形”

命题 IV.10 可以作一个等腰三角形, 两个底角皆等于顶角的两倍.

作图过程 设: 取任意线段 AB, 在 C 点被切分, 那么 AB 与 BC 构成的矩形的面积等于 CA 为边的正方形的面积. 以 A 为圆心, AB 为半径作圆 BDE, 作圆内线段 BD 等于 AC, AC 不大于圆 BDE 的直径 (命题 II.11、V.1).

证明 令: 连接 AD 、DC, 在三角形 ACD 上作外接圆 ACD (命题 IV.5).

那么因为: AB 、BC 构成的矩形的面积等于以 AC 为边的正方形, 又 AC 等于 BD. 所以: AB 、BC 构成的矩形面积等于 BD 上的正方形面积.



又因为 B 点为圆 (ACD) 外的一点, 从 B 点有两条线段 BA 、BD 与圆 (ACD) 相遇, 其中的一条穿过圆, 另一条则落在圆上, 又 AB 、BC 构成的矩形的面积等于 BD 上的正方形的面积. 所以: BD 与圆 ACD 相切（命题 II.37）.

因为: BD 与之相切, DC 是从 D 点延伸的穿过圆的线. 所以: $\angle BDC$ 等于相对弓形上的 $\angle DAC$ (命题 III. 32).

因为 $\angle BDC$ 等于 $\angle DAC$, 令每个角加 $\angle CDA$, 于是: 大角 $\angle BDA$ 等于 $\angle CDA$ 与 $\angle DAC$ 的和.

又, 外角 $\angle BCD$ 等于 $\angle CDA$ 与 $\angle DAC$ 之和, 所以: $\angle BDA$ 也等于 $\angle BCD$ (命题 1.32).

又, $\angle BDA$ 等于 $\angle CBD$, 因为 AD 也等于 AB, 所以: $\angle DBA$ 也等于 $\angle BCD$ (命题 I.5).

所以: $\angle BDA$ 、$\angle DBA$ 和 $\angle BCD$ 彼此相等.

又因为 $\angle DBC$ 等于 $\angle BCD$. 所以: 边 BD 也等于边 DC (命题 I.6).

又, BD 等于 CA, 所以: CA 也等于 CD . 所以: $\angle CDA$ 也等于 $\angle DAC$.

所以: $\angle CDA$ 与 $\angle DAC$ 之和等于 $\angle DAC$ 的两倍(命题 1.5).

又, $\angle BCD$ 等于 $\angle CDA$ 与 $\angle DAC$ 之和, 所以: $\angle BCD$ 是 $\angle CAD$ 的两倍.

又, $\angle BCD$ 等于 $\angle BDA$, 也等于 $\angle DBA$.

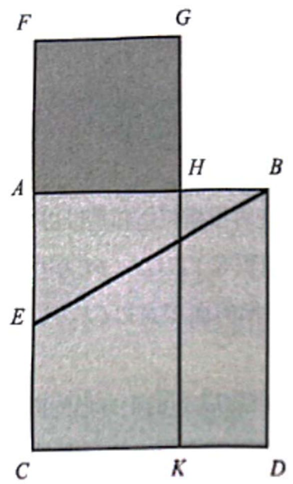
所以: $\angle BDA$ 、$\angle DBA$ 也分别是 $\angle DAB$ 的两倍.

所以: 可以作一个等腰三角形, 两个底角皆等于顶角的两倍. □

关键一步是“命题 II. 11”, 即作线段 AB 的“黄金分割点 C”. 后面是几何证明作图的正确性.

4 作“黄金分割点”

命题 II.11 可以切分已知线段, 使它与一条小线段构成的矩形面积等于余下线段为边的正方形的面积.



作图过程 设: AB 为给定线段.

求作: 切分 AB, 使总线与其中小线段构虎的矩形面积等于以余线面积为边的正方形的面积.

在 AB 上作正方形 $ABDC$, 在 E 点平分 AC, 连接 BE . 延长 CA 到 F, 使 EF 等于 BE, 在 AF 上作正方形 $FAHG$, 延长 GH 至 K (命题 I.46、I.10、I.3、I.46). 那么: AB 被 H 点所分, AB 、BH 构成的矩形面积等于 AH 为边的正方形的面积.

证明 因为线段 AC 在 E 点被平分, FA 是它的加线, 以 CF 、FA 构成的矩形加上以 AE 为边的正方形的面积等于以 EF 为边的正方形的面积(命题 II.6).

又, EF 等于 EB. 所以: 以 CF、FA 构成的矩形面积加以 AE 为边的正方形的面积之和等于以 EB 为边的正方形的面积.

又, 以 AB 、 AE 为边的正方形的面积之和等于以 EB 为边的正方形的面积, 因为: 在 A 点的角是直角.

所以: 以 CF 、 FA 构成的矩形面积加以 AE 为边的正方形的面积等于以 BA、AE 为边的正方形的面积之和 (命题 I.47).

令上面两方各减去以 AE 为边的正方形的面积.

于是: 余下以 CF、FA 构成的矩形面积等于以 AB 为边的正方形的面积.

现在, 以 CF、FA 构成的矩形是 $FCKG$, 因为, AF 等于 FG, 且以 AB 为边的正方形是 AD. 所以: $FCKG$ 的面积等于 AD 的面积.

令上面两边减去 AK, 于是: 余值 FH 等于 HD .

又, $HCDB$ 是以 AB、BH 构成的矩形, 因为, AB 等于 BD, 且 $FAHG$ 是 AH 为边的正方形. 所以: AB、BH 构成的知形面积等于 HA 为边的正方形面

积.

所以: 给定线段 AB 在 H 点被切分, AB、BH 构成的矩形等于 HA 为边的正方形的面积.

所以: 可以切分已知线段, 使它与一条小线段构成的矩形面积等于余下线段为边的正方形的面积. □

4.1 现代眼光证明作图

从现代的眼光看, 不妨设 $AB = 2$, 则 $AE = \frac{2}{2} = 1$, 由毕达哥拉斯定理知 $BE = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. 则作 $EF = FB$ 后有 $\frac{AF}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 为熟知的"黄金分割比".

4.2 《几何原本》中的方法用现代语言表示

可古希腊时代并没有阿拉伯数字、根号表示、解二次方程等一系列现代初中生就习以为常的"数学基础"!

为表示简洁, 我们记矩形 $ABCD$ 的面积为 S_{ABCD}, AB 为边的正方形面积为 S_{AB^2}. 则证明过程可分为以下四步:

第一步: $S_{CFGK} + S_{AE^2} = S_{EF^2} = S_{BE^2}$.

其中第一个等号用到了 "命题 II. 6", 我们在后面附加. 从现代的眼光来看, 该命题的代数表达极为朴素: 若记 $AB = 2x, BD = y$, 则有

$$(2x + y)y + x^2 = (x + y)^2.$$

第二个等号来自条件.

第二步: $S_{AB^2} + S_{AE^2} = S_{BE^2}$.

用到了"命题 1.47", 即著名的毕达哥拉斯定理!

第三步: 两式用 S_{BE^2} 作桥梁后相等. 同时消去后得 $S_{CFGK} = S_{AB^2}$.

第四步: 同时减去公共的 S_{ACKH} 后, $S_{AH^2} = S_{BDKH}$, 命题得证!

4.3 对证明思路来源的大胆猜测

也许这种作法是先作出了正方形 $AFGH$ 及长方形 $BDKH$ (由命题, 很自然), 再作正方形 $ABDC$ 辅助思考. 观察猜测 BF 的中垂线恰好交 AC 中点.

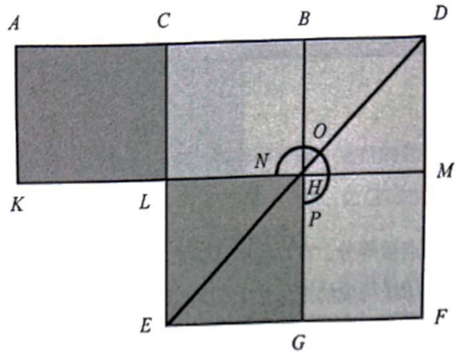
有了这个猜测后, 正向按照如上方式作图, 再设法去证明.

5 关键命题补充

由于《几何原本》对严谨性的追求, 若一一补充完所有命题, 相当于从后往前一直读到最原初的公设、公理、定义, 故我们只补充两个关键命题.

5.1 补充 1: $(2x+y)y+x^2=(x+y)^2$

命题 II.6 若一条线段被平分, 在其尾端再增加一条线段, 那么总线段与增加线段所构成的矩形的面积与原线段一半上的正方形的面积之和, 等于原线段一半加上增加线所构成的正方形的面积.



证明 设: 线段 AB 被 C 点平分, BD 是附加的线段.

求证: AD、DB 为边构成的矩形的面积加上 CB 为边构成的正方形的面积等于CD 为边构成的正方形的面积.

令: 以 CD 为边作正方形 $CEFD$ (命题1.46).

连接 DE, 过 B 点作 BG 使之平行于 EC 或者 DF.

过 H 点作 KM 使之平行于 AB 或 EF, 再通过 A 点作 AK 使之平行于 CL 或 DM (命题 I.31), 那么: 既然 AC 等于 CB, 矩形 $AKLC$ 也就等于矩形 $CLHB$ (命题 I.36).

而矩形 $CLHB$ 等于 $HGFM$ (命题 1.43), 所以: 矩形 $AKLC$ 也等于矩形 $HGKM$.

令 CM 加在各边, 于是, 整个 AM 等于折尺形 NOP . 又因为: DM 等于 DB, 因此 AM 是以 AD 、DB 为边构成的矩形.

所以: 折尺形 NOP 也等于 AD、DB 构成的矩形.

令: BC 为边的正方形 $LEGH$ 与每个相加加在以上各边.

那么: 以 AD 、 DB 构成的矩形加 CB 上的正方形等于折尺形 NOP 加 LG.

又, 折尺形 NOP 加上 $LEGH$ 又是 CD 上的正方形 $CEFD$; 所以 AD、DB 构成的矩形加 CB 线为边的正方形等于以 CD 为边的正方形.

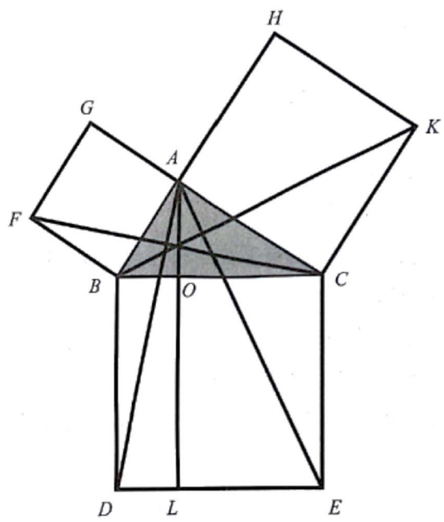
所以: 若一条线段被平分, 在其尾端再增加一条线段, 那么总线段与增加线段所构成的矩形的面积与原线段一半上的正方形的面积, 等于原线段一半加上增加线所构成的正方形的面积. □

从现代的眼光看, 该命题的代数表达极为朴素:

若记 $AB = 2x, BD = y$, 则有 $(2x+y)y + x^2 = (x+y)^2$.

5.2 补充 2: 毕达哥拉斯定理

命题 I.47 在直角三角形中, 以斜边为边的正方形面积等于以两直角边为边的正方形面积之和 (两直角边的平方和等于斜边的平方).



证明 设: ABC 是直角三角形, 其中 $\angle BAC$ 是直角.

求证: BC 为边的正方形面积等于以 BA 和 AC 为边的正方形面积之和.

作 BC 为边的正方形 $BDEC$, 且作 BA 和 AC 为边的正方形 $BAGF$ 和 $ACKH$过 A 作 AL 平行于 BD, 也平行于 CE, 连接 AD 和 FC (命题 1.46、1.31).

因为 $\angle BAC$ 和 $\angle BAG$ 皆是直角, 在一条直线 BA 上的一个点 A 有两条直线 AC、AG 不在它的同一侧所成的两邻角的和等于两直角, 于是 CA 与 AG 在同一直线上 (定义 1.22、命题 I.14).

同理, BA 也与 AH 在一条直线上.

因为 $\angle DBC$ 等于 $\angle FBA$, 它们是直角, 每个角加上 $\angle ABC$, 于是: 总 $\angle DBA$ 等于总 $\angle FBC$ (定义 I.22、公设 I.4 、公理 I.2).

因为 DB 等于 BC, FB 等于 BA, 边 AB 和 BD 分别等于边 FB 和 BC, 且 $\angle ABD$ 等于 $\angle FBC$, 所以: 底边 AD 等于底边 FC, 且三角形 ABD 的面积等于三角形 FBC 的面积 (定义 I.22、命题 I.4).

现在, 平行四边形 $BDLO$ 的面积是三角形 ABD 的面积的两倍, 因为, 它们有同底边 BD, 且在相同平行线 BD 和 AL 之间.

又, GB 上的正方形是三角形 FBC 的面积的两倍, 因为它们有同底 FB, 且在相同平行线 FB 和 GC 之间 (命题 I. 41).

所以: 平行四边形 $BDLO$ 的面积也等于正方形 $GFBA$ 的面积.

类似地, 如果连接 AE 和 BK, 平行四边形 $OLEC$ 的面积也能被证明等于正方形 $HCKH$ 的面积.

所以: 总正方形 $BDEC$ 的面积, 等于 $FBAG$ 和 $ACKH$ 两个正方形的面积之和 (公理 I.2).

又, $BDEC$ 正方形是作在 BC 上的, 且正方形 $FBAG$ 和 $ACKH$ 是作在 BA 和 AC 上的.

所以: BC 为边的正方形的面积等于 BA 和 AC 为边的正方形的面积之和.

所以: 在直角三角形中, 以斜边为边的正方形的面积等于两直角边为边的正方形的面积之和. □

该证法的核心思想演变为小奥中的"等积变形"和初中的"全等", 其余都是严谨证明的需要.

6 探究感想

由于《几何原本》按照极为严格的逻辑性顺序写作, 初读时总不知所云, 完全不知道这些定理、公设、命题到底是干啥的？也难怪学了第一个命题就问"几何有啥用？"的人.

这次为了写科普讲座, 以问题为导向去阅读、研究, 才发现其中奥妙!

不禁感叹在距今两千多年前、缺少如此多"现代数学基础"的古希腊, 居然就有这样的数学瑰宝！乍一看证明"又长又臭", 但其实处处为了严谨, 都可以回溯到最原初的5条公设、5条公理、23个定义！几乎是从平地上建起了一座蔚为壮观的数学大厦!

感谢欧几里得及古希腊给世人留下"演绎"、"逻辑"的数学!

《几何原本》不愧为"人类理性的基石"！