# 数学竞赛问题“多阶段创作”的经历与思考

何忆捷
(1. 华东师范大学数学科学学院, 200241;
2. 上海市核心数学与实践重点实验室, 200241)

在由中国数学会举办的 2022 年全国中学生数学奥林匹克决赛(CMO)与第 21 届中国女子数学奥林匹克(CGMO)中, 笔者各提供了一道原创赛题. 这两道赛题的创作经历具有“多阶段”和“长时间跨度”的共同点. 本文将以它们为主要案例, 介绍数学竞赛问题多阶段创作的若干经历, 结合对自身创作过程特点的认识以及对创作效率的思考, 提出关于数学竞赛问题创作的若干实践建议.

本文对数学竞赛问题的“创作阶段”与“多阶段创作”大致作如下理解.

(1) 若创作者在一段连续的时间内保持关注某一创作主题, 并有相应的创作进展, 则视该段连续的时间为一个创作阶段.一个创作阶段可能短于一日或数小时, 也可能持续数日或数周, 在此期间, 创作者对创作主题几乎始终保持关注, 但不必连续不停地投入思考.

(2) 若创作者中止了对某一创作主题的关注, 又在经过一段较长的时间 (通常以月或以年计) 后再次关注该创作主题, 并且在新结论的发现或新问题的提出上取得明显的进展, 则视为处于一个新的创作阶段.

(3) “多阶段创作”是指至少包含两个创作阶段的创作活动.

## I. 2022 年 CMO 第 1 题的创作经历

**问题 1** 设正实数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足: 对任意正整数 $n$, 均有

$$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}, b_{n+1}=b_n+\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}}.$$

(1) 若 $a_{100}b_{100}=a_{101}b_{101}$, 求 $a_1-b_1$ 的值;

修订日期: **2024-03-03.**
本文是上海市核心数学与实践重点实验室课题“数学实践”(项目编号 **22DZ2229014**) 的研究成果之一.

(2) 若 $a_{100}=b_{99}$, 比较 $a_{100}+b_{100}$ 与 $a_{101}+b_{101}$ 的大小. [1]

( 2022, 全国中学生数学奥林匹克决赛)

问题 1 是 2022 年 CMO 第一天比赛的第 1 题, 其创作过程有三个阶段.

### 1.1 问题 1 的创作阶段一

首先于 2020 年 9 月提出下述问题 1.1.

**问题 1.1** 给定正数 $a$, 设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足: $x_1=y_1=a$,

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\ (n\in\mathbb{Z}_+),\ y_{n+1}=y_n-\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}}\ (n\in\mathbb{Z}_+). \qquad ①$$

证明: 数列 $\{x_n+y_n\}$ 单调增, 数列 $\{x_ny_n\}$ 单调减.

问题 1.1 起初的创作动机是: 随意地提出一些面貌相对新颖的递推关系, 研究是否可以不太困难地求出数列的通项. 经过一番尝试后注意到, 当初值 $x_1,y_1$ 为任意正数 $a$ 时, 由递推关系①可逐项定义得到无限数列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 并且可由数学归纳法 (或适当的消元技巧) 求出 $\{x_n\},\{y_n\}$ 的通项分别为

$$x_n=\frac{a(a+2)\cdots(a+2n-4)(a+2n-2)}{(a+1)(a+3)\cdots(a+2n-3)},y_n=a\left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1}.$$

数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的递推式对仗工整, 考虑将它们合在一个问题中, 并尝试提出一些能同时涉及 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的问题. 期间关注到(并验证了)数列 $\{x_n+y_n\}$ 与 $\{x_ny_n\}$ 的单调性, 从而形成了上述问题 1.1. 亦考虑过添加一定的条件(例如 $\frac{x_{21}y_{21}}{x_{20}y_{20}}=\frac{20}{21}$ ), 要求解题者求出 $a$ 的值, 变成一道填空题.

这一创作阶段起初并无明确的目标, 在尝试性地提出递推关系①并有所探究后, 预期创作成果的难度与风格贴近高中联赛一试. 笔者认为问题 1.1 在具有一定训练价值的同时, 本身并不出彩, 故暂时留存, 待以后进一步关注和发展.

### 1.2 问题 1 的创作阶段二

2021 年 10 月, 笔者回顾先前的创作素材后, 进一步构思并提出了问题 1.2.

**问题 1.2** 数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $x_1$, $y_1>0$ 及递推关系①. 若 $x_{100}=y_{101}$, 请比较 $x_{101}$ 与 $y_{100}$ 的大小.

问题 1.2 能顺利提出, 主要得益于意识到可以摆脱条件 $x_1=y_1=a$ 的束缚, 这样题目中的自由变量从一个增加为两个, 变化更为丰富.

由于当 $x_1$, $y_1>0$ 时, $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 分别为单调增的正数列与单调减的正

数列, 故想到对某些 $k, l$, 进一步考察 $\frac{x_{k+1}}{x_k}$ 与 $\frac{y_l}{y_{l+1}}$ 的大小关系或 $x_{k+1}-x_k$ 与 $y_l-y_{l+1}$ 的大小关系. 例如, 当限定 $x_{100}=y_{101}$, 并要求比较 $\frac{x_{101}}{x_{100}}$ 与 $\frac{y_{100}}{y_{101}}$ 的大小(也可以是比较 $x_{101}-x_{100}$ 与 $y_{100}-y_{101}$ 的大小)时, 则等价于问题 1.2.

问题 1.2 的解答思路是: 记初值 $x_1=a, y_1=b$, 先由 $x_{100}=y_{101}$ 得到关系

$$\frac{a(a+2)\cdots(a+196)(a+198)}{(a+1)(a+3)\cdots(a+197)}=b\left(\frac{b}{b+1}\right)^{100}, \tag{②}$$

再将问题归结为比较 $\frac{x_{101}}{x_{100}}$ 与 $\frac{y_{100}}{y_{101}}$ 的大小, 进而转化为比较 $a+199$ 与 $b$ 的大小, 利用简单的分式放缩技巧, 可以证明 $a+199\le b$ 不可能成立, 于是 $a+199>b$, 从而有结论 $x_{101}<y_{100}$.

这一解法尽管步骤较多, 但入手容易, 各个环节的思路自然, 放缩较宽松, 没有特别大的思维跳跃, 因此笔者当时预估问题 1.2 处于高中联赛一试压轴题或加试容易题的水平, 而考虑到得分点的设置, 或许更适合作为 CGMO 赛题, 或者提升难度后作为 CMO 赛题 (因为按当前赛制, CGMO 与 CMO 每题能拆分出 7 个得分点, 而高中联赛一试解答题与加试容易题均只能拆分出 4 个得分点). 在问题的表述上, 亦可将“$x_1,\ y_1>0$” 改为“$\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均为正数列”, 以明确告知题中所涉及的数量均有意义, 并去掉一些不重要的推理环节.

这一创作阶段得到了一个较为成型的创作成果, 但并未充分考虑其更多解法和细节(事实上对难度的评估也并不准确). 由于不需要即刻在某项竞赛中使用, 故将其暂时留存, 待适当场合进一步打磨.

### 1.3 问题 1 的创作阶段三

2022 年 12 月, 笔者需要为 CMO 准备一个代数题, 故尝试在问题 1.2 的基础上发展出一个需要更精细放缩估计的任务. 尽管尝试的过程并不顺利, 但在反复尝试期间注意到了解决问题 1.2 的一条捷径.

由递推式①进行简单的归纳, 结合条件 $x_{100}=y_{101}$ 可得

$$0<x_1<\cdots<x_{99}<x_{100}=y_{101}<y_{100}<\cdots<y_1, \tag{③}$$

再次利用①, 即得

$$x_{101}=x_{100}+\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{100}\frac{1}{x_i}}<y_{101}+\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{100}\frac{1}{y_i}}=y_{100}. \tag{④}$$

由于存在这一捷径, 问题 1.2 的实际难度比最初预估的要低, 求通项也不再是必需的.

与此同时, 新的解题思路为发现新结论带来了契机. 特别地, 在③, ④的基础

上继续推得

$$\sum_{i=1}^{101}\frac{1}{x_i}=\sum_{i=1}^{99}\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_{100}}+\frac{1}{x_{101}}>\sum_{i=1}^{99}\frac{1}{y_i}+\frac{1}{y_{101}}+\frac{1}{y_{100}}=\sum_{i=1}^{101}\frac{1}{y_i},$$

进而有

$$x_{102}-x_{101}=\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{101}\frac{1}{x_i}}<\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{101}\frac{1}{y_i}}=y_{101}-y_{102},$$

移项得 $x_{101}+y_{101}>x_{102}+y_{102}$. 至此提出问题 1.3.

**问题 1.3** 数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $x_1$, $y_1>0$ 及递推关系①. 若 $x_{100}=y_{101}$, 请比较 $x_{101}+y_{101}$ 与 $x_{102}+y_{102}$ 的大小.

问题 1.3 的推理比问题 1.2 多了一个层次. 亦可仿照问题 1.2 最初的解法, 从数列的通项入手, 在②的基础上归结为比较 $\frac{x_{102}-x_{101}}{x_{100}}=\frac{a+200}{(a+199)(a+201)}$ 与 $\frac{y_{101}-y_{102}}{y_{101}}=\frac{1}{b+1}$ 的大小(仍记 $x_1=a$, $y_1=b$ ), 再通过更精细的放缩完成解答.

问题 1.3 的难度较问题 1.2 有所上升, 解题过程的复杂程度取决于入手角度如何选取, 实际难度可能相当于高中联赛加试容易题.

### 1.4 问题 1 的赛前打磨与答题情况

由于当届 CMO 需要一个容易的代数题, 故在问题 1.3 的基础上进行打磨.

首先, 配一个第 (1) 小题, 侧重考查基本的代数变形, 而将问题 1.3 作为第 (2) 小题, 侧重考查放缩技巧, 以更全面地考查参赛选手的代数基本功. 第 (1) 小题易于上手, 且两小题相对独立, 即使第 (1) 小题求解失败也不会导致第 (2) 小题无法入手, 这样有利于降低参赛选手发挥的偶然性. 此外, 第 (1) 小题的设置或多或少会将解题者的思维引向数列的通项, 从而对第 (2) 小题中更轻巧快捷的放缩路径起到一定的"掩护"作用, 使解决整个问题的思维要求又稍稍提升, 预计难度能够达到 CMO 容易题的水平.

其次, 由于求解 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的通项公式时, 前者稍难于后者, 故更换两个数列的呈现次序(记号 $\{y_n\}$ 和 $\{x_n\}$ 相应换成 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ ), 使问题的呈现更合乎"由易及难"的逻辑.

最后将题中的角标微调, 得到正式赛题 (问题 1), 其解答可参见文 [1], [2].

经赛后统计, 本题得分率约为 0.83, 约 60% 的选手答对 (21 分) 或近乎答对 (18 分), 有超过三分之一的选手得了 9 分、12 分、15 分, 他们主要是在第 (2) 小题上失分, 剩下的极少数选手也或多或少取得了进展, 此外本题对于银牌线附近的选手有很好的区分度 [2]. 因此认为, 本题合理充当了 CMO 第 1 题的角色, 达

到命题组的基本意图.

## II. 第 21 届 CGMO 第 5 题的创作经历

**问题 2** 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $K, L$ 是内部两点, $D$ 是边 $AB$ 上一点. 已知 $B, K, L, C$ 四点共圆, 且 $\angle AKD = \angle BCK, \angle ALD = \angle BCL$. 证明: $AK = AL$.[3]

(第 21 届中国女子数学奥林匹克)

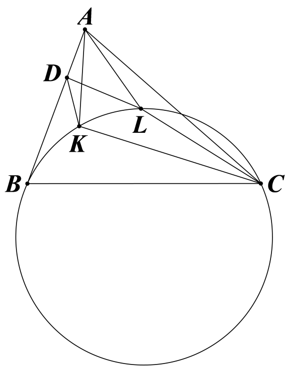


图 1

问题 2 是 2022 年 CGMO 第 5 题 (第二天比赛的第 1 题), 其创作过程有两个阶段.

### 2.1 问题 2 的创作阶段一

问题 2 创作的"启发物"是下述问题 2.1.

**问题 2.1** 已知点 $O$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心, $M, N, P$ 分别是边 $BC, CA, AB$ 的中点, $\triangle BOC, \triangle MNP$ 的外接圆交于点 $X, Y$, 且 $X, Y$ 在 $\triangle ABC$ 的内部. 证明: $\angle BAX = \angle CAY$. [4]

( 2013, 塞尔维亚数学奥林匹克)

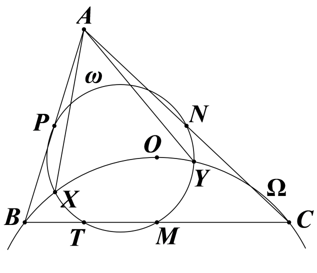


图 2

问题 2.1 的证明可参见文[4]. 另一种更具技巧性的证法是对图形作以 $A$ 为中心、 $\frac{AB \cdot AC}{2}$ 为幂的反演变换, 再作关于 $\angle BAC$ 平分线的对称变换. 在此复合变换

下, 如图 2, 点 $B, C$ 分别对应点 $N, P$, 点 $O$ 对应 $A$ 在 $BC$ 上的射影 $T$, 其中 $T$ 恰好也在 $\triangle MNP$ 的外接圆 $\omega$ (也是 $\triangle ABC$ 的九点圆)上, 故 $\triangle BOC$ 的外接圆 $\Omega$ 对应圆 $\omega$, 结合点 $X, Y$ 在两圆上的位置, 可知 $X$ 与 $Y$ 相互对应, 于是 $AX, AY$ 为 $\angle BAC$ 的等角线, 进而得 $\angle BAX = \angle CAY$.

2018 年 10 月, 笔者研究问题 2.1 的解法和图形时, 发现疑似有 $AX = AY$, 经多次作图后否定了这一猜测, 但同时意识到, 所作图形中 $\angle BAC \approx 60^\circ$ 或是 $AX = AY$ 近似成立的原因. 通过几何画板验证知 $\angle BAC = 60^\circ$ 的确是 $AX = AY$ 的充分条件.

对此结论的深层原因进行思考, 发现当 $\angle BAC = 60^\circ$ 时, 圆 $\Omega$ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆恰好关于 $BC$ 对称, 而一般情形下, 只要 $\triangle ABC$ 的外接圆关于 $BC$ 对称的圆 $\Gamma$ 与 $\triangle ABC$ 的九点圆 $\omega$ 交于两点 $X, Y$, 则有 $AX = AY$. 事实上, 记 $\varphi$ 是以 $A$ 为位似中心、 $1:2$ 为位似比的位似变换, 则易知 $\Gamma = \varphi(\omega)$, 特别地, 位似中心 $A$ 在两圆 $\omega, \Gamma$ 的连心线上, 又 $X, Y$ 为两圆的交点, 故由对称性知 $AX = AY$.

经条件的等价转化及字母记号的调整后, 给出下述问题 2.2.

**问题 2.2** 在 $\triangle ABC$ 中, $D, E, F$ 分别是边 $BC, CA, AB$ 的中点, $\triangle ABC$ 内两点 $K, L$ 位于 $\triangle DEF$ 的外接圆 $\omega$ 上, 满足 $\angle BKC = \angle BLC = 180^\circ - \angle BAC$ (如图 3). 证明: $AK = AL$.

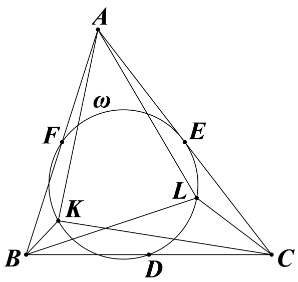


图 3

问题 2.2 明显比原型(问题 2.1) 容易, 证明中唯一的难点是发现圆 $\omega$ 与四边形 $BKLC$ 外接圆 $\Gamma$ 的位似关系并利用好这一关系, 因此笔者认为本题难点较集中, 思维链短, 若作为赛题似乎缺少一个层次. 当然, 本题所涉及的知识与方法已与原型较为不同, 故可视为有意义的创作成果.

### 2.2 问题 2 的创作阶段二

2022 年 6 月, 笔者为暑期的数学竞赛储备候选题, 期间对先前所创作的问题 2.2 作了进一步思考.

设 $\varphi$ 是前述定义的位似变换. 如图 4, 延长 $AK$ 交 $BKLC$ 的外接圆 $\Gamma$ 于点 $X$, 则有 $X=\varphi(K)$, 而 $B=\varphi(F)$, 故 $BX \parallel FK$, 所以

$$\angle AKF=\angle AXB=\angle KCB.$$

类似地, 延长 $AL$ 交圆 $\Gamma$ 于点 $Y$, 可推得

$$\angle ALF=\angle AYB=\angle LCB.$$

由对称性, 亦有 $\angle AKE=\angle KBC$ 与 $\angle ALE=\angle LBC$.

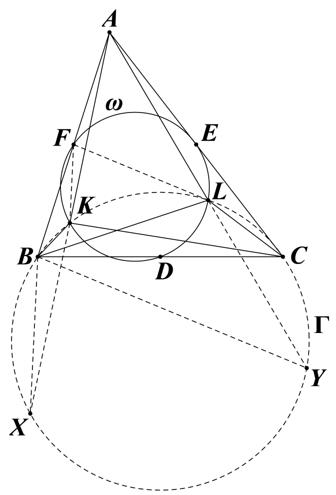


图 4

为简化图形, 去掉与点 $D,E$ 无关的信息, 聚焦于点 $F$, 不难发现可由 $\angle AKF=\angle KCB, \angle ALF=\angle LCB$ 重新定义点 $K,L$, 得到如下问题 2.3.

**问题 2.3** 在 $\triangle ABC$ 中, $F$ 为 $AB$ 的中点, $\triangle ABC$ 内两点 $K,L$ 满足 $B,K,L,C$ 四点共圆, 且 $\angle AKF=\angle KCB, \angle ALF=\angle LCB$. 证明: $AK=AL$.

问题 2.3 的证明方法与问题 2 一致(可参考文[3]), 检查证明过程不难发现, "$F$ 为 $AB$ 的中点"是冗余条件, 可以去掉, 再将字母 $F$ 改记为 $D$, 即得问题 2.

进一步提出问题 2 的一个逆命题, 即下述问题 2.4.

**问题 2.4** 在 $\triangle ABC$ 中, 边 $AB$ 上一点 $D$ 及内部两点 $K,L$ 满足 $AK=AL$, 且 $\angle AKD=\angle BCK, \angle ALD=\angle BCL$. 证明: $B,K,L,C$ 四点共圆.

为证明问题 2.4, 可分别延长 $AK,AL$ 至点 $X,Y$, 使 $BX \parallel DK, BY \parallel DL$, 结合条件易证 $B,K,C,X$ 四点共圆, $B,L,C,Y$ 四点共圆, 又 $KLYX$ 为等腰梯形, 其四个顶点共圆, 而这三个圆两两的根轴 $BC,KX,LY$ 既不平行也不共点, 所以这三个圆只能重合, 即 $B,K,L,C,Y,X$ 六点共圆.

问题 2 与问题 2.2 的难度大致相当, 但侧重点有所变化, 主要考查解题者能否将散乱的角度关系有效整合起来, 而其逆命题(问题 2.4 )要稍难一些, 综合性更强一些. 笔者认为这两个问题较适合作为 CGMO 的候选题.

### 2.3 问题 2 的赛前打磨与答题情况

在创作阶段二中, 问题 2 与问题 2.4 均已基本打磨成熟. 由于当届 CGMO 需要一个容易的几何题作为第二天比赛的第 1 题, 命题组在问题 2 与问题 2.4 之间选择了前者, 并且为了增强图形的直观性与亲和力, 特意将 $B, K, L, C$ 四点所在的圆一并给出(笔者提交的候选题中并未作该圆).

经赛后统计, 本题得分率约为 0.67, 约 65% 的选手答对 (21 分)或近乎答对 (18 分). 较多选手之所以未证出本题, 是由于未找到有效整合已知角度关系的办法, 例如有不少选手将问题归结为证明 $\angle AKL = \angle ALK$, 进而取 $P$ 为 $BK$ 的延长线与 $DL$ 的交点, 结合条件, 转化为证明 $\angle AKP = \angle DLK$, $\angle DKP = \angle DLB$ 之类的结论, 但这样做起码并没有简化问题. 此外, 几乎没有选手通过计算类方法证出本题, 意味着本题较有利于反映选手纯几何证明的水平. 综上, 本题在难度与试题风格方面均较符合命题组的意图.

## III. 其他若干创作经历

上述两道赛题的创作过程均包含不止一个阶段, 且都有较长(两年以上)的创作时间跨度. 另一个有详细记载的此类案例是下述问题 3 的创作经历.

**问题 3** 设 $n$ 为正整数, 称 $n \times n$ 的方格表 $T_n$ 的网格线的交点(共 $(n+1)^2$ 个交点)为格点. 现将数 1, 2, $\cdots$, $(n+1)^2$ 分配给 $T_n$ 的所有格点, 使不同的格点分到不同的数. 称 $T_n$ 的一个 $1 \times 1$ 格子 $S$ 为“好方格”, 如果从 $S$ 的某个顶点起按逆时针方向读出的 4 个顶点上的数依次递增(例如, 图 5 是将数 1, 2, $\cdots$, 9 分配给 $T_2$ 的格点的一种方式, 其中 $B, C$ 是好方格, 而 $A, D$ 不是好方格). 设 $T_n$ 中好方格个数的最大值为 $f(n)$.

(1) 求 $f(2)$ 的值;

(2) 求 $f(n)$ 关于正整数 $n$ 的表达式. [5]

( 2019, 上海市高三数学竞赛)

问题 3 创作的“启发物”是一道涉及三角剖分的组合最值问题. 笔者于 2014 年 2 月通过改编原题, 得到一个组合最值与组合计数的综合题, 又于 2019 年 3 月重拾该创作素材, 在新的创作阶段提出了一个涉及四边形剖分的更为新颖且有难度

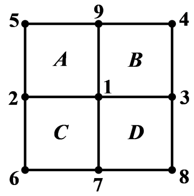


图 5

的组合最值问题, 最后根据命题工作的需要打磨形成正式赛题. 详细的记载与讨论可参见文[5].

此外还有许多印象颇深的创作经历, 下面简要介绍其中两例.

**问题 4** 在平面上给定三角形 $ABC$. 设点 $D, E, F$ 分别是边 $BC, CA, AB$ 上的动点, 满足 $BD = CE$, $CD = BF$. 过点 $B, D, F$ 三点的圆与过 $C, D, E$ 三点的圆交于点 $D$ 及另一点 $P$. 证明: 平面中存在一点 $Q$, 使得线段 $PQ$ 的长度为定值. [6]

( 2018, 中国国家集训队测试二)

在当届国家集训队中, 本题约有三分之一的队员做出, 在集训队第一阶段进入第二阶段的选拔中具有良好的效果. 题目的难度高于预期(从得分率看, 是当届集训队第一阶段 12 道题中第四困难的), 究其原因, 可能是定点 $Q$ 的位置不易猜测, 而这也对计算类方法的使用形成了不利影响.

问题 4 创作的主体工作早在笔者就读本科期间(约 2006 年)即已完成. 鉴于题中含有动点, 在由一个确定的图形发现结论后, 笔者一度感觉很难对点、线的各种位置关系进行详尽的分类讨论(当时并不熟悉有向角的计算), 因此并未严格整理解答, 仅对条件与结论做了简要的记录. 2017 年 5 月, 笔者无意间翻出十多年前的草稿纸, 发现引入有向角后即可概括所有情形, 故修补细节后将其作为储备赛题, 最终在 2018 年国家集训队准备工作期间将其打磨为正式赛题, 使早期的创作积累发挥了一些价值. 因此, 这是一个创作跨度特别长的难忘的创作案例.

**问题 5** 对正整数 $m, n$, 用 $f(m, n)$ 表示满足

$$\begin{cases} xyz = x + y + z + m, \\ \max\{|x|,\ |y|,\ |z|\} \le n \end{cases}$$

的有序整数组 $(x, y, z)$ 的个数. 是否存在正整数 $m, n$, 使得 $f(m, n) = 2018$? 证明你的结论. [7]

( 2018, 第 15 届中国东南地区数学奥林匹克高二年级)

问题 5 涉及多项式、余数分析、不定方程求解、计数、分类讨论等方面, 且适当利用了年份值“ 2018 ”的特殊性, 对参赛选手解题的基本功及知识方法的综合运用有一定要求.

这是一个将创作问题“珍藏”至特殊年份而使用的案例. 事实上, 对问题的构思始于 2012 年 6 月. 当时研究了若干种关于三个变元 $x, y, z$ 的轮换对称型不定方程, 考虑此类方程在一定范围内整数解 $(x, y, z)$ 的组数, 其中发现, 对于问题 5 所给的方程及限制条件( $m, n$ 视为参数), 当要求整数解的组数 $f(m, n)$ 是一个模 12 余 2 且比较大的数时, 恰好既能推出 $m = 2$, 又能进一步推出存在 $n$ 满足要求. 注意到 $2018 = f(2, 168)$, 于是笔者将创作素材留存至 2018 年再进行细节打磨, 最后用于当年的东南地区数学奥林匹克.

## IV. 思考与建议

### 4.1 关于创作经历特点及创作效率的思考

回顾笔者的赛题创作经历, 以截至 2023 年底笔者为 CMO、国家集训队、CGMO、中国东南地区数学奥林匹克、中国西部数学邀请赛这五项活动所提供的 68 道赛题 (含合作成果)为例, 经历至少两个创作阶段 (不计赛前打磨阶段) 的赛题约占四分之一, 而创作时间跨度 (从创作开始计至题目正式使用) 为 2 个月以内、 2 – 12 个月、1 – 3 年、3 年以上的赛题各约占到四分之一.

上述统计结果与文[8]所记载的 2017 年 CMO 各道赛题创作过程的调查结果可形成一定的对比. 按本文对“创作阶段”的理解, 根据文[8]中的相关文字描述可知, 当届的 CMO 第 1 题 (恰好由笔者所创作) 经历了两个创作阶段, 创作时间跨度为 2 年以上, 另五道赛题的创作过程尽管有“一天到一个月不等”及“断断续续”的特点, 但基本均可视为仅含一个创作阶段, 创作的时间跨度 (从创作开始计至题目正式使用) 最多是几个月. 这一对比反映出笔者创作经历中“多阶段”和“长时间跨度”的特点 (当然其内在的影响因素可能很复杂, 涉及到工作习惯、思维特点、与专业领域的关系等许多方面).

实际上, 考虑到创作过程受大量偶然因素的影响, 常常不能保证短期内稳定的产出, 因此笔者每年会尽量主动抽出几个相对空闲的时间段, 以自由创作形式为主, 进行素材积累. 待有明确的创作任务时, 经常可以在先前的积累中挑选相对合适的题材, 进行具体的发展, 这样就自然地形成了一些“多阶段”和“长时间跨度”的创作经历. 通过反思, “ 多阶段创作”的合理性可能在于: 一方面, 当需要产出创作成果时, 可以节省从头开始酝酿新问题的时间, 另一方面, 对创作素材放置

一段时间后重新思考, 更容易摆脱先前创作过程中的惯性思维, 获得一些新发现, 提升创作效率.

与此相对照, 在赛前的命题准备阶段, 则经常需要围绕特定创作任务进行短时间的定向创作, 此时目标更为聚焦, 工作节奏更紧凑, 且常常有同行相互合作、碰撞思维, 这是有助于提升创作效率的因素. 当然, 这一期间偶发的创作灵感可能会受到抑制(因为常常来不及展开进一步的思考).

### 4.2 实践建议

结合以上讨论及思考, 提出关于数学竞赛问题创作的如下实践建议.

一是注重积累. 首先, 在暂未达成创作意图或是对创作成果暂不满意时, 可以保留阶段性的成果. 问题创作常常不是一蹴而就的, 不必因得到半成品而全盘放弃努力, 有时需要"冷却"一段时间, 再开始下一段思考, 又或许在特定场合, 当前的半成品反而是一个贴切的创作成果. 其次, 平时多留意并记录下一些创作素材和想法, 以便在今后需要的场合能够及时回忆并加以发展. 特别是创作过程中多少会出现一些预期之外的、甚至与主题内容无关的创作灵感. 尽可能留意这些灵感, 如果不能立刻就此展开思考, 也希望及时地有所记录, 为未来的创作提供素材和启发.

二是主动实践. 实践是获得感悟、积累经验、提升能力的最有效的方式. 平时不妨主动安排一些时间投入问题创作, 可以围绕特定创作任务和创作目的进行, 也可以不限制创作目的, 进入自由式的创作之旅. 通过不同创作形式的实践, 既可积累创作成果与创作经验, 又能在实践中锻炼提出问题与解决问题的能力.

三是多与同行交流. 在各种交流的场合, 笔者时时能感受到优秀同行在问题创作方面带来的启发. 同行之间的交流经常有思维的碰撞和经验的传递. 可以多学习同行们的新知识、新成果, 多借鉴他们的数学观点、思考策略和命题技术, 力争创作出高质量、有数学品味和美感、兼有教育价值和良好测评功能的赛题.

## 参考文献

[1] 2022年全国中学生数学奥林匹克(决赛)[J]. 中等数学, 2023 (2): 34-40.

[2] 主试委员会. 2022年全国中学生数学奥林匹克(决赛)试题与答卷情况分析[J]. 中等数学, 2023 (3): 10-15.

[3] 第21届中国女子数学奥林匹克[J]. 中等数学, 2023 (3): 40-46.

[4] 2013塞尔维亚数学奥林匹克[J]. 中等数学, 2014(增刊二): 151-153.

[5] 何忆捷, 熊斌. 一道上海市高三数学竞赛试题的创作及思考[J]. 数学教学, 2019 (7): 1-4.

[6] 2018年IMO中国国家集训队教练组 编. 走向IMO: 数学奥林匹克试题集锦(2018)[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2018, 9: 110-111.

[7] 2019年IMO中国国家集训队教练组 编. 走向IMO: 数学奥林匹克试题集锦(2019)[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2019, 9: 78-80.

[8] 何忆捷. 第33届CMO命题工作的调查研究[J]. 中等数学, 2019 (9): 10-16.