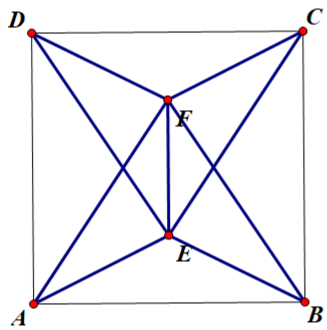
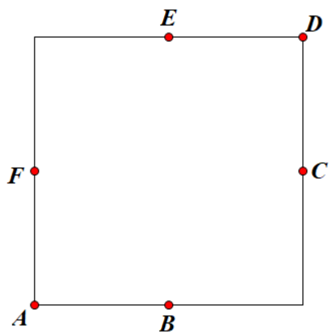
正方形区域中点构成的三角形的探究

朱磊克

(江苏省苏州中学, 215000)

单墫老师在《奥数教程》[2] 中有一道例题, 要求证明 9 个点在边长为 2 的正方形中, 必然存在三个点面积不超过 $\frac{1}{2}$; 田廷彦老师在《组合几何》[1] 中明确指出 6 个点在单位正方形中, 必有三个点构成的三角形面积不超过 $\frac{1}{8}$, 由下面两种结构差异较大的使等号成立的情况可知, 此问题较为困难. 本文给出了此问题的一种证明, 为证明此问题给出了四个引理的证明. 其中, 引理 2 与引理 4 的证明具有一定的巧妙之处, 也可以独立成题.





问题 单位正方形中有 6 个点, 无三点共线, 则必存在 3 个点构成的三角形面积不超过 $\frac{1}{8}$, 且 $\frac{1}{8}$ 是最优的界.

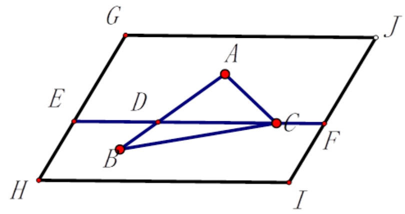
结合一个事实: 线性变化前后, 部分与整体的比值不发生改变. 我们可以知道单位正方形可以改成任意面积为 1 的平行四边形.

用 $S_{\min}(T)$ 表示集合 T 中任意三点构成的三角形面积的最小值.

引理 1 3 个点任意放在一个平行四边形中, 包括边界, 这个点的面积不超过平行四边形的 $\frac{1}{2}$.

证明 A, B, C 在平行四边形 $GHIJ$ 中, 考虑竖直方向, 不妨设 C 在 A,

修订日期: **2023-12-21.**

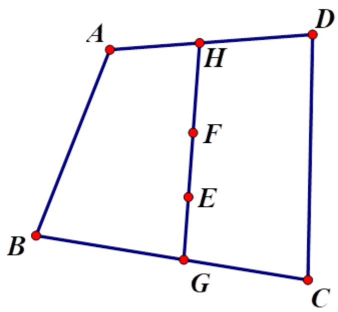


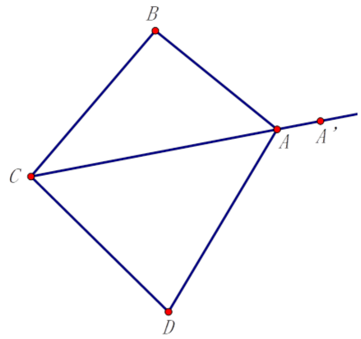
B 之间, 过 C 作 HI 的平行线与平行四边形 $GHIJ$ 交于点 E, F, 与 AB 交于点 D. 则有

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}+S_{\triangle ADC}\leq\frac{1}{2}S_{EHIF}+\frac{1}{2}S_{EGJF}=\frac{1}{2}S_{HIJG}.$$

引理 1 证毕! □

引理 2 凸包为四边形的 6 个点, 任意三点组成的三角形中面积最大值记作 S_1, 面积最小值记作 S_2, 则 $\frac{S_1}{S_2}\leq\frac{1}{4}$.





证明 设 EF 在四边形 $ABCD$ 内部.

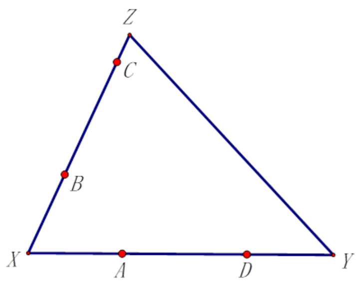
(1) 直线 EF 与四边形 $ABCD$ 的交点必然在邻边上, 不妨设在 $\triangle ACD$ 内部, 则 $\triangle ACD$ 可以三角剖分成 5 个三角形, 从而 $\frac{S_1}{S_2}\leq\frac{1}{5}$.

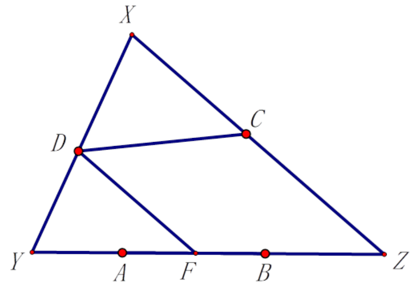
(2) 直线 EF 与四边形 $ABCD$ 的交点必然在对边上. 设 FE 与 BC 交于点 G, 与 AD 交于点 H. 同时假设 $HF\geq EG$, 则

$$\begin{aligned}S_1&\geq S_{\triangle BCH}\\&=S_{\triangle BCE}+S_{\triangle BEF}+S_{\triangle CEF}+S_{BFCH}\\&\geq 2S_{\triangle BCE}+S_{\triangle BEF}+S_{\triangle CEF}\\&\geq 4S_2,\end{aligned}$$

从而, $\frac{S_1}{S_2}\leq\frac{1}{4}$. □

引理 3 面积为 $\frac{1}{2}$ 的三角形中, 内部以及边界上有四个点, 且这四个点构成的凸包为凸四边形, 则其中必有三个点构成的三角形面积不超过 $\frac{1}{8}$.





证明 不难看出, 若 A' 在 CA 延长线上, 则

$$S(\{A,B,C,D\}) \le S(\{A',B,C,D\}),$$

因此不妨设 A, B, C, D 四个点均在 $\triangle XYZ$ 的边界上. 若存在一边不含任何给定点, 则如上图所示, 我们可以考虑 A, B, C, D 所构成三角形在 $\triangle XCY$ 的占比.

因此, 可以不妨设 A, B 从左往右分布在边 YZ 上, D 在边 XY 上, C 在边 XZ 上, 且设 $a = \frac{XD}{XY}$, 则 $a \ge \frac{XC}{XZ}$.

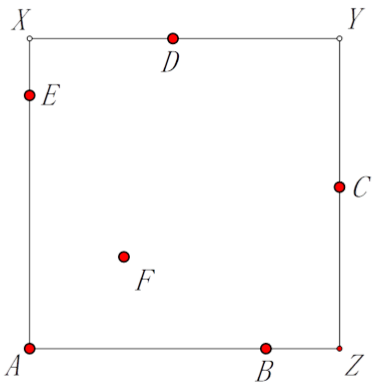
过 D 作 XZ 的平行线, 与 YZ 交于点 F, 则

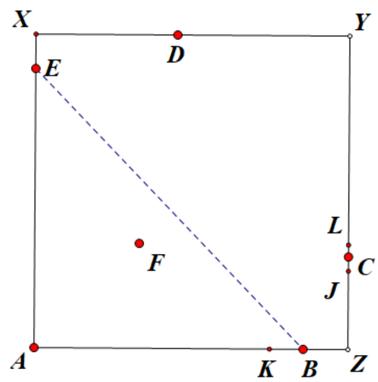
$$S_{\triangle DZF} = S_{\triangle DCF} = \frac{1}{2}a(1-a) \le \frac{1}{8}.$$

若 A 在线段 YF 上, 则 $S_{\triangle DCA} \le S_{\triangle DCF} \le \frac{1}{8}$.

若 A 在线段 FZ 上, 则 B 也在线段 FZ 上, $S_{\triangle ABD} \le S_{\triangle FZD} \le \frac{1}{8}$. 从而, 引理 3 成立. □

引理 4 单位正方形 $AXYZ$ 中分布着六个点, 其中 B, C, D, E 分别在正方形的四条边处, 其不在顶点处, F 在五边形 $ABCDE$ 内部, 求证: A, B, C, D, E, F 这 6 个点中, 存在三个点构成的三角形面积不超过 $\frac{1}{8}$.





证明 以 A 为原点, AZ 为 x 轴, AX 为 y 轴建立直角坐标系. 假设结论不成立, 存在合适的分布, 使得 $S_{\min}(\{A,B,C,D,E,F\}) > \frac{1}{8}$. 值得注意的是, 由

于仿射变换不改变部分占整体的比值, 因此, 单位正方形可以改成任意面积为 1 的平行四边形.

(1) $F(a,b)$ 在 $\triangle AEB$ 内部, 但是在 $\triangle ACB, \triangle AED$ 外部时,

$$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle AIE}+S_{\triangle AFI}+S_{\triangle AEI}>\frac{3}{4}.$$

因此, $AE>\frac{3}{4}; AF>\frac{3}{4}$. 又,

$$\frac{1}{4}<2S_{\triangle EBF}\leq 2S_{\triangle XFZ}=1-a-b,$$

即

$$a+b<\frac{3}{4}. \qquad ①$$

故

$$2S_{\triangle ABC}>\frac{1}{4}\Rightarrow CZ>\frac{1}{4}.$$

同理 $DX>\frac{1}{4}$.

取 YZ, AZ 边靠近 Z 点的四等分点分别为 J, K, YZ 靠近 Z 点的三等分点为 L, 则有

$$b-\frac{a}{4}=2S_{AFJ}>2S_{AFC}>\frac{1}{4}.$$

同理,

$$a-\frac{b}{4}>\frac{1}{4}. \qquad ②$$

于是,

$$\frac{3}{4}\min\{a,b\}\geq\min\{a,b\}-\frac{\max\{a,b\}}{4}>\frac{1}{4}\Rightarrow\min\{a,b\}>\frac{1}{3}.$$

若 $\min\{CZ,DX\}<\frac{1}{3}$, 不妨设 $CZ<\frac{1}{3}$. 注意到,

$$0\leq 2S_{\triangle FJK}=\begin{vmatrix}a & 0.75 & 1\\ b & 0 & \frac{1}{3}\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{b}{4}-\frac{a}{3}<\frac{1}{4},$$

从而 $S_{\triangle FBC}<S_{\triangle FKL}<\frac{1}{4}$. 矛盾. 这是因为 ① $\times\left(-\frac{1}{3}\right)+$ ②得:

$$\frac{2}{3}a-\frac{7}{12}b>0\Rightarrow\frac{a}{3}>\frac{7}{24}b>\frac{b}{4}.$$

若 $\min\{CZ,DX\}\geq\frac{1}{3}$, 有

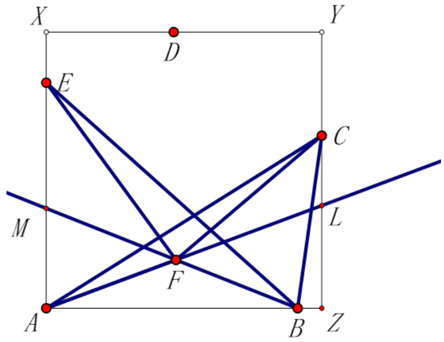
$$b-\frac{a}{3}=2S_{AFJ}>2S_{AFC}>\frac{1}{4}.$$

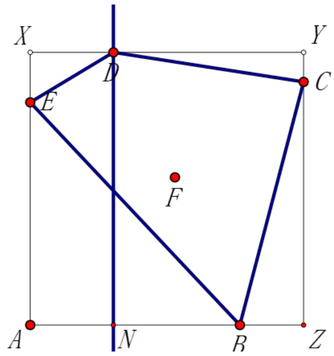
同理 $a-\frac{b}{3}>\frac{1}{4}$, 结合①, 有

$$2=2(1-a-b)+3\left(a-\frac{b}{3}\right)+3\left(b-\frac{a}{3}\right)>\frac{8}{4}=2,$$

矛盾.

(2) $F(a,b)$ 在 $\triangle AEB$ 内部, 也在 $\triangle ACB, \triangle AED$ 之一内部时, 设其在 $\triangle ABC$ 内部, 延长 AF 交 YZ 与 L, 延长 BF 交 AX 与点 M.





注意到, $\frac{BF}{BM} < 1-a; \frac{AF}{AL} = a$. 从而,

$$\frac{S_{\triangle AFC}+S_{\triangle AFB}}{S_{\triangle ACZ}} + \frac{S_{\triangle BFE}+S_{\triangle AFB}}{S_{\triangle AEB}} < \frac{AF}{AL} + \frac{BF}{BM} < 1.$$

结合引理 1 可知, $S_{\triangle ACZ} < \frac{1}{2}, S_{\triangle BEA} < \frac{1}{2}$, 从而,

$$\min\{S_{\triangle AFC}, S_{\triangle AFB}, S_{\triangle BFE}, S_{\triangle AFB}\} < \frac{1}{8},$$

矛盾.

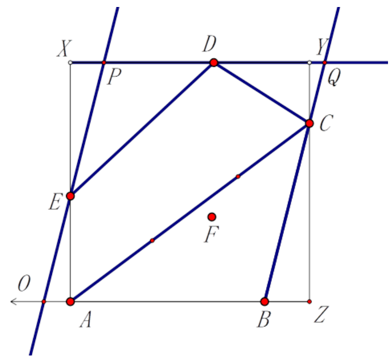
(3) F 不在 $\triangle AEB$ 中, 则 F 在四边形 $EDCB$ 中, 则

$$S_{BCDE} = S_{\triangle DEF} + S_{\triangle DCF} + S_{\triangle FBC} + S_{\triangle DEB} > \frac{1}{2}.$$

用 XE, YC, DY, BZ 表示四边形 $BCDE$, 代入可知,

$$(XE - YC)\cdot(DY - BZ) > 0,$$

不妨设 $XE > YC, BZ > DY$. 注意到, 此时 $S_{AEDC} < S_{\triangle AXC} = \frac{1}{2}$, 故 F 点不在四边形 $AEDC$ 中, 从而 F 在 $\triangle ABC$ 中.



延长 BC 与直线 XY 交于点 Q, 过 E 做 BC 平行线, 与直线 XY, AZ 交于点 P, O, 此时, 平行四边形 $PQBO$ 的面积小于 1, 且 F 在 $\triangle ABC$ 中, 由前面讨

论可知矛盾.

综上, 引理 4 得证. □

下面回到原问题.

证明 记由 6 个点中的任意 3 个点构成的三角形中面积最小值为 S, 按 6 个点的构成的凸包分类.

(1) 凸包为三角形, 凸包可以被三角剖分成 7 个三角形, 由引理 1 可知,

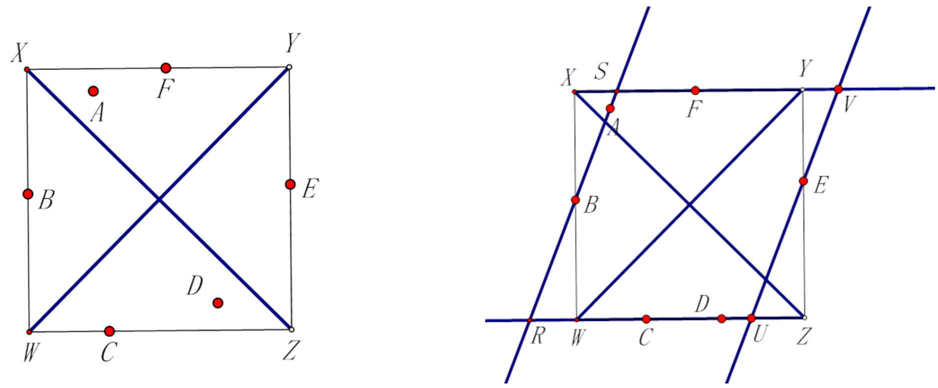
$$S \leq \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} < \frac{1}{8}.$$

(2) 凸包为四边形, 结合引理 1、引理 2 可知,

$$S \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

断论 面积为 1 的平行四边形中的 6 个点构成的凸包边数不小于 5 时, 则一定可以找到一个面积不超过 1 的平行四边形, 包含这六个给定点, 且相对的两条边至少有一条边上包含两个给定点 (平行四边形的顶点也算在边上).

证明 事实上, 我们首先可以通过平移, 使得每条边上至少有一个点, 若一组对边上均恰有一个给定点. 设 B, E 分别在边 WX, YZ 上, 如图所示, 可以不妨设 $XB \geq YE$, 同时为方便计算, $XYZW$ 可以设为单位正方形.



此时, 所有点均在直线 XW 与直线 YZ 之间. 过 B , E 两点直线 l_1, l_2 起始位置与 XW, YZ 重合, 然后顺时针旋转 l_1, l_2 (旋转过程中保持平行), 直到这两条直线首次有除 BE 之外的给定点落在 l_1 或者 l_2 上, 结束旋转.

设直线 l_1, l_2 与直线 XY 交于点 S, V, 与直线 WZ 交于点 R, U. 此时

$$UZ = EZ \cdot \tan\angle UEZ \geq BW \cdot \tan\angle RBW = RW,$$

从而, $RU \leq WZ$, $S_{RZVS} \leq S_{XYZW} = 1$. 显然平行四边形 $SRUV$ 包含给定的六个点 A, B, C, D, E, F. 而线段 SR 与线段 UV 至少有一条含至少两个给定点. 对另一组对边类似考虑, 可知断论成立.

(3) 凸包为五边形, 结合断论可知, 存在两条邻边, 均恰含有两个给定点. 此时, 6 个点的分布只有两种可能,

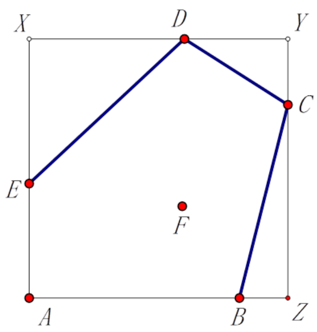


图 a

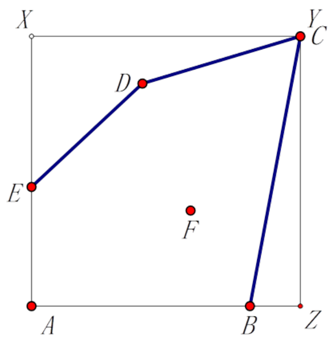
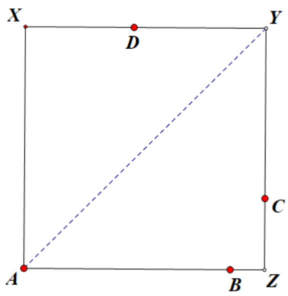


图 b

(I) 对于图 a, 由引理 4 可知此时结论成立;

(II) 对于图 b, 由引理 3 可知 $ACDE$ 这 4个点中有 3个点构成的三角形面积不超过 $\frac{1}{8}$.

(4) 凸包为六边形.



(I) 存在给定点在顶点处, 连结 AY, 由抽屉原理可知, $\triangle AXY$ 与 $\triangle AYZ$ 中必有一个三角形含另外 5 个点中的至少 3 个点, 这 3 个点再加上 A 点, 由引理 3 可知结论成立.

(II) 不存在给定点在顶点处, 则由断论可知, 必有两条邻边含两个给定点. 由引理 3 可知结论成立. □

致谢 感谢冷岗松教授, 刘炜老师, 沈浩老师对于本文给予的批评与指导.

参考文献

[1] 田廷彦著, 单墫编. 数学奥林匹克命题人讲座—组合几何[M], 上海: 科技教育出版社. 2010,7: 134.

[2] 单墫主编. 奥数教程—初一年级 [M], 上海: 华东师范大学出版社. 2002,1: 227.