第十六期问题征解解答与点评

牟晓生

第一题. 锐角 $\triangle ABC$ 的三条高分别为 AD, BE, CF, 垂心为 H. DE 交 CF 于 M, DF 交 BE 于 N. 过 A 作 MN 的垂线交 OH 于 K. 证明: $OA = 2KD$.

(广西南宁市第二中学学生 陈宝麟 供题)

证明 (根据东北师大附中郭鹏同学的解答整理):

我们取 K' 为 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心. 熟知三角形外接圆半径为九点圆半径的两倍, 因此只要证明 $K' = K$. 令 O' 为 O 关于 BC 的对称点, 则 A, K', O' 三点共线. 设 MN 的延长线交 $\triangle ABC$ 的九点圆于 X, Y 两点, 则

$$XN \cdot NY = FN \cdot ND = BN \cdot NH.$$

因此 B, X, H, Y 共圆, 同理 C, X, H, Y 共圆. 所以 X, Y 都在 $\triangle BCH$ 的外接圆上, 而熟知这个圆的圆心是 O' . 由此我们得到 O' 在 XY 的中垂线上, 而由定义知 K' 也在 XY 的中垂线上. 于是 $O'K' \perp XY$, 也即 $AK' \perp MN$. 而 K, K' 都在 OH 上, 这就说明了 $K' = K$. □

评注 东北师大附中于卓同学, 北师大二附中李泽宇同学, 吉林一中王巍翰同学, 湄潭求是高级中学孙运豪同学, 东营市第一中学张桐川同学, 武汉外国语学校张睿桐同学, 温州育英高级试验学校高敬翔同学, 长沙市长郡中学曾科荣同学, 重庆市巴蜀中学邹逸同学, 象山县第三中学　子宸同学以及雅礼中学团队也给出了本题的正确解答.

第二题. 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 m 维整系数向量的数列. 证明存在正整数 N, 使得每个 A_n 都能表示为 $A_n = \sum\limits_{i=1}^{N} k_{n,i} \cdot A_i$ 的形式, 其中 $k_{n,i}$ 为整数.

(或北武钢三中学生 王逸轩 供题)

证明 (根据湖南雅礼中学刘恺睿同学的解答整理):

我们对 m 归纳证明. 当 $m = 1$ 时 $\{A_n\}$ 即为整数列. 如果 A_n 恒为零则结

论显然. 否则不妨设 $A_1 \neq 0$. 令 $d_n = \gcd(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, 则是 $\{d_n\}$ 递减的正整数数列. 因此存在某个 N, 使得 $d_N = d_{N+1} = \cdots = d$. 由裴蜀定理, 存在整数 $t_1, t_2, \ldots, t_N$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{N} t_i A_i = d$. 因此对每个 n 我们有

$$A_n = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_n}{d} \cdot t_i A_i,$$

也就是说 $k_{n,i} = \frac{A_n}{d} \cdot t_i$ 满足条件.

假设命题对 m 成立, 考虑 $m+1$ 维的情况. 将 $\{A_n\}$ 中每一项的最 一维分量变为零, 得到新数列 $\{B_n\}$. 则由归纳假设, 存在 N_1 使得每个 B_n 可以写为 $B_n = \sum\limits_{i=1}^{N_1} k'_{n,i} B_i$. 现在令

$$C_n = A_n - \sum_{i=1}^{N_1} k'_{n,i} A_i = (A_n - B_n) - \sum_{i=1}^{N_1} k'_{n,i}(A_i - B_i).$$

于是 C_n 的前 m 维分量都是零. 由归纳假设, 存在 N_2 使得每个 C_n 可以写为 $C_n = \sum\limits_{i=1}^{N_2} k''_{n,i} C_i$. 所以

$$A_n = C_n + \sum_{i=1}^{N_1} k'_{n,i} A_i = \sum_{i=1}^{N_2} k''_{n,i} C_i + \sum_{i=1}^{N_1} k'_{n,i} A_i = \sum_{i=1}^{N_2} k''_{n,i} \sum_{j=1}^{N_1} (A_i - k'_{i,j} A_j) + \sum_{i=1}^{N_1} k'_{n,i} A_i.$$

这样我们就得到 A_n 是 $A_1, A_2, \ldots, A_N$ 的整系数线性和, 其中 $N = \max\{N_1, N_2\}$. 归纳成立! □

评注 (1). 雅礼中学刘哲成, 尹龙晖同学也给出了本题的正确解答.

(2). 本题的背景是有限维阿贝尔群的分类定理. 考虑任意有限个 (可重复) $\pm A_n$ 的和, 这些向量构成 $\mathbf{Z}^m$ 的一个子群, 因此其维数有限, 由分类定理知一定存在一组整 . 设 A_N 出现在这组整 中且具有最大的下标, 则 $A_1 \sim A_N$ 也是一组整 , 即得本题结论.

第三题. 在 $n \times n$ 方格表的每个格中填入一个实数. 称 n 个不同行也不同列的格子为一个"好组". 已知每个好组中 n 个数之和非负, 且每个格子都在至少一个和为零的好组中. 证明: 每个好组的数之和都是零.

(人大附中学生 欧阳铭晖 供题)

证明 (根据湖南雅礼中学刘恺睿同学的解答整理):

我们首先证明如下引理:

引理 假设从方格表中标记若干个格 (可以重复), 满足每行每列均有 k 个格被标记, 则所有标记的格可以被 分为 k 个"好组".

引理的证明不难, 只需重复使用 尔定理即可.

接下来我们用反证法, 假设存在某个好组 T_0 的元素和大于零.

对每个属于 T_0 的格子 x, 令 S_x 为包含 x 且和为零的一个好组, 然 我们将 S_x 中除去 x 的所有格子作上标记. 这样一来, 每一行每一列都恰有 $n-1$ 个格子被作上了标记, 于是由引理知它们可被分为 $n-1$ 个好组. 而言之, 假设我们考虑 S_x 允许重复元素的并集 S, 则它可被 分为 n 个好组, 其中一个是 T_0. 因此 S 中所有格子上的数之和大于零. 但由我们的选择, 每个 S_x 中的数和为零, 这便导出了矛盾! □

第四题. 设正整数 $n>5$. 证明 $n!$ 不整除它的正约数之和.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):

假设 $n! \mid \sigma(n!)$, 我们将导出矛盾. 我们有

$$r \times n! = \sigma(n!) = \prod_p \frac{p^{v_p(n!)+1}-1}{p-1}. \tag{1}$$

这里我们约定 p 指代素数. 首先我们可以估计正整数 r 的大小:

$$r < \prod_{p \le n} \frac{p}{p-1} \le 2 \prod_{0<k<\frac{n}{2}} \frac{2k+1}{2k} < \frac{n}{2}, \forall n \ge 10.$$

因此 (1) 式左边不含有大于 n 的素因子, 并且不含有大于 $\frac{n}{2}$ 的素因子平方.

另一方面, (1) 式右边含有因子 2^m-1, 其中 $m=v_2(n!)+1>\frac{n}{2}$. 为证明 (1) 式不可能成立, 我们只需下面的引理:

引理 设 $m>12$ 是正整数, 则要么 2^m-1 含有大于 $2m$ 的素因子, 要么 $m+1$ 是素数且 $(m+1)^2 \mid 2^m-1$.

由此引理和之前的分析, 我们知道 (1) 式在 $m>12$ (即 $n>15$)时不可能成立. 剩下检验 $6 \le n \le 15$ 是容易的.

引理的证明 考虑 m 阶分圆多项式 $\Phi_m(x)=\prod_{d\mid m}(x^d-1)^{\mu(\frac{m}{d})}$, 其中 μ 是 Mobius 函数. 熟知这是一个整系数多项式, 且 $\Phi_m(x) \mid x^m-1$. 于是只要证明数 $\Phi_m(2)$ 含有一个大于 $2m$ 的素因子, 者 $m+1$ 是素数且 $(m+1)^2 \mid \Phi_m(2)$. 令 q 是 $\Phi_m(2)$ 的任意一个素因子. 我们将证明如果 $q \nmid m$, 则 $q \equiv 1 \pmod{m}$; 而如果 $q \mid m$, 则 $q \,||\, \Phi_m(2)$.

为此, 设 k 是 2 模 q 的阶, 并设 $q^t \,||\, 2^k-1$. 如果 $q \nmid m$, 则由 LTE 引理可知对任意 $d \mid m$, 我们有 $q \mid 2^d-1$ 当且仅当 $k \mid d$, 而那时 $q^t \,||\, 2^d-1$. 于

是 $\Phi_m(2)=\prod_{d|m}(2^d-1)^{\mu(\frac{m}{d})}$ 含 q 的幂次等于($m_1=\frac{m}{k}$, $d_1=\frac{d}{k}$):

$$t\sum_{d:k|d,d|m}\mu(\frac{m}{d})=t\sum_{d_1:d_1|m_1}\mu(\frac{m_1}{d_1}).$$

由假设 $q\mid\Phi_m(2)$, 故上面的和不为零. 因此只可能是 $m_1=1$, 即 $k=m$. 所以 2 模 q 的阶是 m, 导出 $q\equiv 1 \pmod m$.

如果 $q\mid m$, 则显然 $k\le q-1<m$. 此时 LTE 引理告诉我们 $q\mid 2^d-1$ 当且仅当 $k\mid d$, 且 $q^{t+v_q(\frac{d}{k})}\mid\mid 2^d-1$. 于是类似的计算可得 $\Phi_m(2)$ 含 q 的幂次等于:

$$t\sum_{d_1:d_1|m_1}\mu(\frac{m_1}{d_1})+\sum_{d_1|m_1}v_q(d_1)\mu(\frac{m_1}{d_1})$$

这里前一项必然为零, 因为 $m_1=\frac{m}{k}>1$. 如果 $q\nmid m_1$, 一项也为零. 如果 $q\mid m_1$ 而 m_1 含有另外的素因子 r, 则 一项 是零. 这是因为所有使得 $\mu(\frac{m_1}{d_1})$ 非零的 d_1 可以被 分为两个一组, 每组中一个数是另一个数的 r 倍, 而这样的每一组对上面和的总贡献是零. 所以要使得 $q\mid\Phi_m(2)$, 只有可能 m_1 是 q 的幂次. 此时上面的和恰为1, 即 $q\mid\mid\Phi_m(2)$.

至此我们完成了对数 $\Phi_m(2)$ 的素因子刻 . 由上面的结论, 我们可以写 $\Phi_m(2)=a\cdot b$, 其中 a 的素因子都是 m 的素因子, 且 a 无平方因子, 而 b 的素因子都模 m 余 1. 如果 $b>m+1$, 则引理自然成立. 于是只剩下 $\Phi_m(2)=ab\le a(m+1)\le m(m+1)$ 的特殊情况. 由于 $\Phi_m(2)\approx 2^{\phi(m)}$, 这种情况只在 m 较小时才可能发生. 严格来说, $\Phi_m(2)>2^{\phi(m)}\prod_{i=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2^i})>0.288\cdot 2^{\phi(m)}$. 所以只有当 $m\le 36$ 时才可能有 $\Phi_m(2)\le m(m+1)$. 对这些 m 直接验证知引理成立, 命题得证! □

评注 (1). 这道题的难点在于它用到的反向思维. 通常而言, 要证明 $n!\nmid\sigma(n!)$ 我们 考虑取某个小素数, 看它在 $\sigma(n!)$ 中出现的幂次是否能达到它在 $n!$ 中较高的幂次. 然而由于 $\sigma(n!)$ 有很多乘 项不好控制, 这个思路很难奏效. 上面的解答反其道而行之, 通过考虑 $\sigma(n!)$ 含有的较大素因子以及不等式估计证明无法整除.

(2). 我们用到的引理可以看作是 Zsigmondy 定理的一个量 加强. Zsigmondy 定理告诉我们除了几种特殊情况外, 数 a^m-b^m 一定含有一个本原素因子 (阶是 m). 来许多学者研究 a^m-b^m 的最大素因子至少是多大. Schinzel 在 1962 年证明了除去几个特殊情况外, a^m-b^m 含有一个大于 $2m$ 的素因子, 因此我们引理结论的 半部分是多余的. 之 近五十年人们没能对一般的 m 给出更好的结论, 直到最近 Stewart 证明了 $m\exp(\frac{\log m}{104\log\log m})$ 的下界.

(3). 这道题的一个特殊情况出现在 2015 年西部数学竞赛的第 8 题. 那里假设了 n 为 2 的幂次, 于是 $m=v_2(n!)+1=n$ 也是 2 的幂次. 对于这样的 m, 我们的引理是很容易证明的.

(4). Erdös曾经提出一个相关的问题, 当 $n>5$ 时一定有 $\tau(n!)|n!$, 其中 $\tau(\cdot)$ 表示正约数个数. 有兴趣的同学可以对此进行思考及拓展.