

数学新星问题征解

第五十一期 (2023.09)

主持: 张端阳

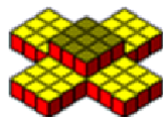
第一题. 在 $\triangle ABC$ 中, A 所对的旁切圆 $\odot J$ 与 BC, AB 分别切于点 S, T . P 为平面上一点, 满足 $AP \perp PJ$, 延长 BP, AC 交于点 Q , Q 关于 JP 的对称点为 Q' . 过 B 作 PS 的平行线交 PT 于点 L . 证明: 若 Q' 在直线 BC 上, 则 $Q'L$ 平分线段 SP .

(马鞍山市第二中学学生 孙浩翔 供题)

第二题. 用不超过 4 个小立方体只能拼成如下图所示的七种非凸立体图形, 其中每个立体图形称为一个部件, 七个不同的部件组成一套立体积木.



问: 至少需要几套立体积木, 才能拼出下图中的“花朵”(共 54 个小立方体) 形状?



(赣州市厚德外国语学校学生 王庆宇 供题)

第三题. 设非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ 满足对任意 $2 \leq i \leq 99$, 有

$$\max\{a_{i-1} + a_i, a_i + a_{i+1}\} \geq i + 10.$$

求 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2$ 的最小值.

(中国人民大学附属中学 张端阳 陈宇轩 供题)

第四题. 设 m 是正整数. 证明: 对任意整数 $n > 2m$, 可以将 n 写为 m 个大于 1 的整数之和, 使得这 m 个数中每一个的最大素因子都不超过 $cn^{\frac{8}{15m-10}}$, 其中 c 是只与 m 有关的常数.

(北京大学学生 关乃粼 供题)