2023 年上海新星夏季数学奥林匹克试题解析

胡珏伟　吴尉迟　冷岗松

2023 年上海新星春季数学奥林匹克于 2023 年 6 月 2 日 8 点到 12 点在上海举行. 下面介绍此次考试的试题和解答. 不当之处, 敬请读者批评指正.

I. 试 题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别是三边 BC, CA, AB 上的点满足 AD, BE, CF 交于一点且 AD 是 $\angle EDF$ 的角平分线. 证明: $AD \perp BC$.

(华东师范大学 罗振华 供题)

2. 设 x_1, x_2, $\cdots$, $x_n \in \mathbb{R}^+$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{1-x_i} \geq \frac{1}{n-1} + \frac{n}{(n-1)^2} \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i - x_j)^2.$$

(上海中学 张甲 供题)

3. 设正整数 a, b, n 满足 $a < b \leq \frac{n}{2}$, 记 $d = \gcd\left(\binom{n}{a}, \binom{n}{b}\right)$. 证明: $d \geq 2^a$.

(上海大学 胡珏伟　冷岗松 供题)

4. 正实数数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意正整数 $n \geq 101$, 均有

$$a_n = \max_{1\leq i\leq 100} a_{n-i} - \min_{1\leq i\leq 100} a_{n-i}.$$

证明: 存在正整数 k, 使得对任意正整数 $n > k$, 均有 $a_n < 1$.

(华威大学 吴茁 供题)

修订日期: **2023-07-03.**

5. 给定 n, k 是正整数满足 $n > 4k$, X 是 n 元集. 求最小的正整数 m, 使得 X 的任意两两不同 k 元子集 $X_1, X_2, \cdots, X_m$, 满足对任意 $a_i \in X_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 都存在 $1 \le j \le m$, 使得

$$X_j \subset \bigcup_{i=1}^{m} \{a_i\}.$$

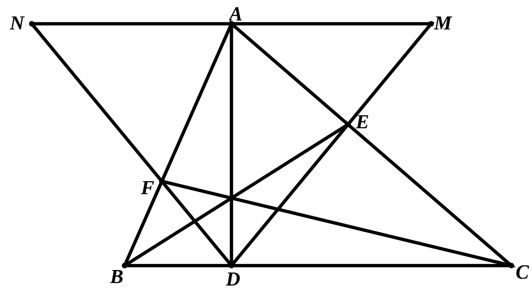
(华东师范大学 吴尉迟 , 上海大学 胡珏伟 供题)

6. 在单位正方形 $ABCD$ 中, X 是 AB 的中点, Y, Z 分别在边 CD, DA 上. 求最小的实数 λ, 使得 $\triangle XYZ$ 的外接圆半径总不超过 λ.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

II. 解答与评注

题 1 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别是三边 BC, CA, AB 上的点满足 AD, BE, CF 交于一点且 AD 是 $\angle EDF$ 的角平分线. 证明: $AD \perp BC$.



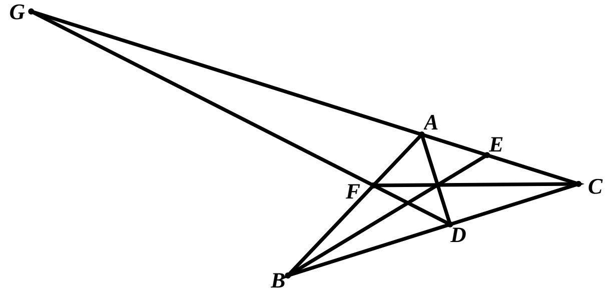
证明 1 过点 A 作直线 BC 的平行线 l, 分别交 DF, DE 于 M, N, 则

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AN}{BD}, \ \frac{AE}{EC} = \frac{AM}{CD}.$$

由塞瓦定理知

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$

故 $AM = AN$. 因此 $AD \perp MN$, 即 $AD \perp BC$. $\square$



证明 2 若 AC 不平行 DF. 延长 CA, DF 交于点 G. 由塞瓦定理知

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

由梅涅劳斯定理知

$$\frac{CG}{GA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=1.$$

故

$$\frac{CE}{EA}=\frac{CG}{GA},$$

即 (G,E,A,C) 调和. 由 AD 平分 $\angle EDF$ 知 $AD\perp BC$.

若 $AC\parallel DF$, DE 不平行 AB, 可延长 DE 与 AB, 同理得到证明.

若 $AC\parallel DF$, $DE\parallel AB$, 则 $AFDE$ 为菱形, 易证 $AD\perp BC$. □

评注 此题是简单的几何题, 考试中约 96% 做对此题. 证明 1 直接利用塞瓦定理得到证明; 证明 2 则是基于调和点列的性质转化角平分线和垂直的关系得到的.

题 2 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in\mathbb{R}^+$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=1,$$

证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{1-x_i}\geq\frac{1}{n-1}+\frac{n}{(n-1)^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2.$$

证明 1 由

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{1-x_i}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2-x_i+x_i}{1-x_i}\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{1-x_i}-x_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}-1\end{aligned}$$

可知等价于证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}\geq\frac{n}{n-1}+\frac{n\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2}{(n-1)^2}.$$

由 Cauchy 不等式知

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{(1-x_i)x_i}\geq\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)x_i}=\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2},$$

结合

$$\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}-\frac{n}{n-1}=\frac{n\sum\limits_{i=1}^n x_i^2-n+n-1}{(n-1)\left(1-\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)}$$

$$=\frac{n\sum\limits_{i=1}^n x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^2}{(n-1)\left(1-\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)}$$

$$=\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2}{(n-1)\left(1-\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)}.$$

故只需证明

$$1-\sum_{i=1}^n x_i^2\ge\frac{n-1}{n}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n x_i^2\ge\frac{1}{n},$$

由 Cauchy 不等式知后者成立. □

证明 2 (长沙市南雅中学 邓昊恩) 原不等式等价于

$$\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{1-x_i}+\sum_{i=1}^n x_i-1\ge\frac{1}{n-1}+\frac{n}{(n-1)^2}\sum_{1\le i<j\le n}(x_i^2+x_j^2-2x_ix_j)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{1-x_i}-1\ge\frac{1}{n-1}+\frac{n}{(n-1)^2}\left((n-1)\sum_{i=1}^n x_i^2-\sum_{1\le i<j\le n}2x_ix_j\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{1-x_i}\ge\frac{n}{n-1}+\frac{n}{(n-1)^2}\left(n\sum_{i=1}^n x_i^2-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{1-x_i}\ge\frac{n}{n-1}+\frac{n^2}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^n x_i^2-\frac{n}{(n-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{1-x_i}+\frac{n^2}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^n x_i(1-x_i)$$

$$\ge\frac{n}{n-1}+\frac{n^2}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^n x_i-\frac{n}{(n-1)^2}=\frac{2n}{n-1}.$$

最后一步不等式成立是由于

$$\sum_{i=1}^n\left(\frac{x_i}{1-x_i}+\frac{n^2}{(n-1)^2}x_i(1-x_i)\right)\ge\sum_{i=1}^n\frac{2n}{n-1}x_i=\frac{2n}{n-1}.$$

等号成立当且仅当

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}.$$

证毕. □

评注 此题是简单的代数题, 考试中约 54% 做对此题. 问题的关键是如何处

理 $(x_i-x_j)^2$ 项, 再结合 Cauchy 不等式就可以得到证明. 证明 2 是利用均值不等式给出的证明.

题 3 设正整数 $a,\ b,\ n$ 满足 $a<b\le\frac{n}{2}$, 记 $d=\gcd\left(\binom{n}{a},\ \binom{n}{b}\right)$. 证明: $d\ge 2^a$.

证明 由
$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b-a}=\binom{n}{b}\binom{b}{a},$$
知
$$\frac{\binom{n}{a}}{d}\binom{n-a}{b-a}=\frac{\binom{n}{b}}{d}\binom{b}{a}.$$
故 $\frac{\binom{n}{a}}{d}$ 整除 $\binom{b}{a}$, 即
$$\frac{\binom{n}{a}}{d}\le\binom{b}{a}.$$
因此
$$\begin{aligned}d\ge\frac{\binom{n}{a}}{\binom{b}{a}}&=\frac{n(n-1)\cdots(n-a+1)}{b(b-1)\cdots(b-a+1)}\\&=\frac{n}{b}\frac{n-1}{b-1}\cdots\frac{n-a+1}{b-a+1}\ge 2^a.\end{aligned}$$
证毕! □

评注 此题是中等难度的数论题, 考试中约 30% 做对此题. 问题的关键是得到如下组合恒等式
$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b-a}=\binom{n}{b}\binom{b}{a}.$$
若使用库默尔定理等反而会使得问题复杂化.

题 4 正实数数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意正整数 $n\ge 101$, 均有
$$a_n=\max_{1\le i\le 100}a_{n-i}-\min_{1\le i\le 100}a_{n-i}.$$
证明: 存在正整数 k, 使得对任意正整数 $n>k$, 均有 $a_n<1$.

证明 我们分几步完成证明.

结论 1 对任意实数 $\varepsilon>0$, 均存在无穷多个正整数 k, 使得 $a_k<\varepsilon$.

若不然, 则存在正整数 M, 使得对任意正整数 $n\ge M$ 时均有 $a_n\ge\varepsilon$. 定义
$$M_k=\max_{0\le i\le 99}a_{M+100k-i}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots),$$
则由 $\{a_n\}$ 的递推关系易见 $M_k-M_{k+1}\ge\varepsilon$, 这与 $\{M_k\}$ 为正项数列矛盾! 结论 1

获证.

结论 2　存在正整数 $p,\ q\ (100 \le p < q \le p+99)$ 使得 $\max(a_p, a_q) < \frac{1}{2}$.

若不然, 根据结论 1 知, 存在 $r > 100$ 使得 $a_r = \delta < \frac{1}{2}$, 且

$$a_{r\pm1},\ a_{r\pm2},\ \cdots,\ a_{r\pm99} \ge \frac{1}{2}.$$

设

$$S = \max_{1\le i\le 100} a_{r-i} = a_{r-s},$$

则由 $\{a_n\}$ 的定义得 $a_{r+1} = S - \delta$, 且

$$a_{r+2},\ a_{r+3},\ \cdots,\ a_{r+99} \in [a_{r+1} - a_r,\ a_{r-s} - a_r] = [S - 2\delta,\ S - \delta].$$

于是,

$$a_{r+100} = a_{r+1} - a_r = S - 2\delta,$$

且

$$a_{r+101} = a_{r+1} - a_{r+100} = \delta,$$

由假设知 $S - 2\delta \ge \frac{1}{2}$. 因此, 重复以上过程我们便得到了数列 $\{a_{r+101k}\}$ 中的各项均为常数 δ, 进而由假设可得对任意正整数 $r' \ge r$, 均有 $a_{r'} \ge \delta$. 但这与结论 1 相悖, 矛盾! 结论 2 获证.

结论 3　若正整数 $p,\ q\ (100 \le p < q \le p+99)$ 使得 $\max(a_p,\ a_q) < \frac{1}{2}$, 则 $a_n < 1 (n \ge q)$.

因为

$$\frac{1}{2} > a_q = \max_{1\le i\le 100} a_{q-i} - \min_{1\le i\le 100} a_{q-i} \ge \max_{1\le i\le 100} a_{q-i} - a_p > \max_{1\le i\le 100} a_{q-i} - \frac{1}{2},$$

所以

$$\max_{1\le j\le 100} a_{q-j} < 1.$$

据此及 $\{a_n\}$ 的定义递推易见 $a_n < 1 (n \ge q)$. 结论 3 获证.

注意到结论 2, 结论 3 蕴含了原命题, 这就完成了证明. □

评注 此题是困难的代数题, 考试中约 4% 做对此题. 要证明对任意的 $n > k$ 均有 $a_n < 1$, 只需证明存在 a_q 使得 a_q 的前 100 项均小于 1. 结合 a_n 的递推关系, 这又可以转化为 a_q 与 a_q 的前 100 项最小值之和. 因此只需找到下标差不超过 100 的两项均小于 $\frac{1}{2}$, 即结论 2. 难点在于利用反证假设仔细分析相邻 99 项的最大值和最小值关系得到连续 100 项最小值为常数, 这与结论 1 矛盾.

值得指出的是: 结论中的 1 可以替换为任意正常数, 因此 a_n 的极限为零.

题 5 给定 n,k 是正整数满足 $n>4k$, X 是 n 元集. 求最小的正整数 m, 使得 X 的任意两两不同 k 元子集 $X_1,X_2,\cdots,X_m$, 满足对任意 $a_i\in X_i, i=1,2,\cdots,m$, 都存在 $1\le j\le m$, 使得

$$X_j\subset\bigcup_{i=1}^{m}\{a_i\}.$$

解 所求 m 的最小值为

$$\binom{n}{k}-\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{k}-\binom{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{k}+1.$$

先证:

$$m=\binom{n}{k}-\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{k}-\binom{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{k}+1$$

时, 命题成立.

任取 $a_i\in X_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$, 记

$$Y=\bigcup_{i=1}^{m}\{a_i\}.$$

设 $|Y|=t$. 考虑包含于 Y 或包含于 $X\setminus Y$ 的 k 元集个数,

$$\binom{t}{k}+\binom{n-t}{k}\ge\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{k}+\binom{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{k}.$$

故不包含于 Y 且不包含于 $X\setminus Y$ 的 k 元集个数不超过

$$\binom{n}{k}-\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{k}-\binom{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{k}.$$

由抽屉原理, $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m$ 至少有一个包含于 Y 或包含于 $X\setminus Y$, 不妨设为 X_j, 注意到 $X_j\cap Y\ne\varnothing$, 故 $X_j\subset Y$.

下证:

$$m\ge\binom{n}{k}-\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{k}-\binom{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{k}+1.$$

$k=1$ 时结论成立. $k\ge 2$ 时, 不妨设 $X=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$. 记 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_l$ 中所有不包含于 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}$ 且不包含于 $\{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1,\ \cdots,\ n\}$ 的所有 k 元集, 则

$$l=\binom{n}{k}-\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{k}-\binom{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{k}.$$

下证: $l\ge\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$.

n 是偶数时,

$$\begin{aligned}&\binom{n}{k}-\binom{\frac{n}{2}}{k}-\binom{\frac{n}{2}}{k}\ge\frac{n}{2}\\ \Leftrightarrow\ &n(n-1)\cdots(n-k+1)-2\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-k+1\right)\ge\frac{n}{2}k!\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2(n-1)\cdots(n-k+1)-2\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-k+1\right)\geq k!.$$

上式在 $k\geq 2$ 时成立.

同理可证 n 为奇数时, $l\geq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 成立.

由

$$A_i\cap\left\{1,\ 2,\ \cdots,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}\neq\varnothing,$$

且

$$\left\{1,\ 2,\ \cdots,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}\subset\bigcup_{i=1}^{l}A_i,$$

故可取 $a_i\in A_i$, 使得

$$\bigcup_{i=1}^{l}\{a_i\}=\left\{1,\ 2,\ \cdots,\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}.$$

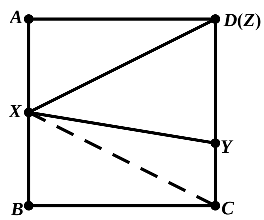
又由 $A_i\not\subset\{1,\ 2,\ \cdots,\ \lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}$, 知满足要求的 $m\geq l+1$. $\square$

评注 此题是困难的组合题, 考试中约 4% 做对此题. 题目所求的 m 最小值不容易直接猜测, 事实上是在集合"平分"的情形下取得. 对 $m=\binom{n}{k}-\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{k}-\binom{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{k}+1$ 的情形通过计数结合抽屉原理得到证明. 证明 $m\geq\binom{n}{k}-\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{k}-\binom{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{k}+1$ 时需要比较 $\binom{n}{k}-\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{k}-\binom{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{k}$ 与 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 的大小关系, 事实上这个大小关系是较为宽松的, 直接展开即可验证.

题 6 在单位正方形 $ABCD$ 中, X 是 AB 的中点, Y, Z 分别在边 CD, DA 上. 求最小的实数 λ, 使得 $\triangle XYZ$ 的外接圆半径总不超过 λ.

解 记 R 为 $\triangle XYZ$ 的外接圆半径.

固定点 Z 时, XZ 的长固定, 此时只需求 $\sin\angle XYZ$ 的最小值.



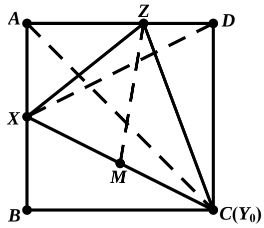
当 $Z=D$ 时, 因为

$$\angle XCD\leq\angle XYD<180^\circ-\angle XDC,$$

所以 $\sin\angle XYD\geq\sin\angle XCD=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, 从而

$$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{XZ}{\sin\angle XYD}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}/2}{2/\sqrt{5}}=\frac{5}{8}<\frac{5}{4}.$$

当 $Z \neq D$ 时, 设点 Y_0 使 $\sin\angle XYZ$ 达到最小值. 此时 $\angle XY_0Z$ 达到最小或最大, 所以 $Y_0 = C$ 或 $Y_0 = D$ 或 $\triangle XY_0Z$ 的外接圆与 CD 相切.

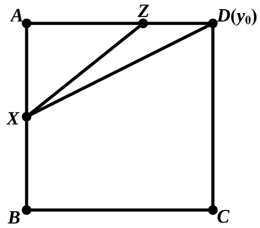


当 $Y_0 = C$ 时, 一方面, $\angle XZC \geq \min\{\angle XAC,\ \angle XDC\} = 45^\circ$. 另一方面, 取 XC 的中点 M, 则

$$MZ \geq \frac{3}{4} > \frac{\sqrt{5}}{4} = MX = MC,$$

所以 $\angle XZC < 90^\circ$. 于是 $\sin\angle XZC \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 从而

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{XC}{\sin\angle XZC} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{10}}{4} < \frac{5}{4}.$$

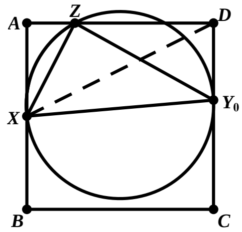


当 $Y_0 = D$ 时, $\angle XDA < \angle XZA \leq 90^\circ$, 所以

$$\sin\angle XZD > \sin\angle XDA = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

从而

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{XD}{\sin\angle XZA} < \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}/2}{1/\sqrt{5}} = \frac{5}{4}.$$



当 $\angle XY_0Z$ 最大时, $\angle XY_0Z > \angle XDZ$, 又

$$\angle XY_0Z \leq \angle XY_0D < 180^\circ - \angle XDC,$$

所以 $\sin\angle XY_0Z > \min\{\sin\angle XDZ,\ \sin\angle XDC\} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, 从而

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{XZ}{\sin\angle XY_0Z} < \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}/2}{1/\sqrt{5}} = \frac{5}{4}.$$

故总有 $R < \dfrac{5}{4}$, 于是当 $\lambda = \dfrac{5}{4}$ 时满足要求.

由上述证明可知, 当 $Y = D, Z \to D$ 时, $R \to \dfrac{5}{4}$.

综上, 所求最小值为 $\dfrac{5}{4}$. $\square$

评注 此题是中等偏难的几何题, 考试中约 21% 做对此题. 讨论 $\triangle XYZ$ 外接圆半径的上确界即讨论 $\sin\angle XYZ$ 的最小值. 本题源于对 Funar 猜想的讨论.

单位正方形内接三角形内切圆半径的最大值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.