教 者 的 智 慧
——谈数学资优生的培养

冷 岗 松

上 海 大 学

厦门　2023 年 6 月 10 日

一. 数学英才的早期发现与培养

1. 英才与人才

- 数学英才: 在创造数学或应用数学的某个方面成绩卓著者。
- 数学人才: 在数学研究、应用或教育普及方面有贡献者。
- 英才与人才的边界是模糊的。
- 数学英才的层级: 优秀; 杰出; 大师; 大神。
- 英才的主要特征: 创新能力强。

- 成为数学英才需要:
  - 天赋: 理解、欣赏、整体把握及操作数学的能力。
  - 机遇: 自由宽松的环境; 好的导师;
    好的合作伙伴; 问题足够幸运。
- 英才培养的三个阶段
  - 中学 (早期培养);
  - 大学 (成长与提高的关键时期);
  - 职业初期 (成熟与爆发)。
- 问题: 人才可以培养英才吗?

2. 什么样的学生具有英才的潜质——英才的早期发现

捕捉天才的光芒，宛如夜空中寻找最亮的那颗星。

- “伯乐”的视角:
  - 浓厚的兴趣;
  - 好问、善问;
  - 令人惊讶的解法;
  - 独特与深刻的视角;

- 热衷于寻找问题之间关联，善于推广和改进问题;
- 能轻松看懂抽象的数学专著。

- 数学资优生
  - 一般称具有英才潜质的学生为数学资优生。
  - 数学资优生未必是全面发展的学生。
  - 可能有不善于考试的数学资优生。
  - 问题: 为什么不能完全根据考试成绩发现资优生?

3. 数学资优生的培养与保护

- 保护好奇心，切忌高强度训练！
- 保护自信心，尊重学生，切忌太严厉。
- 营造一个有讨论和交流的环境。
- 鼓励学生参加数学竞赛。
- 设置合理的升学绿色通道 (管理部门的职责)。

- 若干具体措施:
  - 扩大知识的架构，建议学一些大学数学专业的课程。
  - 发掘合适的经典文献，指导学生向大师们学习。
  - 培养学生对数学的鉴赏能力。
  - 少做低水平重复的应试问题。
  - 规范数学语言的表达。

二. 教者的自我修养

- 情怀与责任感
  - 得天下英才而育之，教者的第一乐事也！
  - 高贵而辛苦的职业？
- 提高数学品味
  - 阅读大学数学或中学数学的名著
  - 阅读数学文化方面的书籍文章

- 教学相长:
  - 耐心批阅学生的解答;
  - 组织并参与学生的讨论。
- 教学与研究并进
  - 把握竞赛的前沿动态
  - 研究者的眼光和心态;
  - 写作是最好的锻炼。

三. 改进数学教学

懂数学就是“做”数学，学生要经过收集资料，发现创造，将书本知识化为自己的思想，用自己的语言将数学知识重新组装起来。

— 摘自全美数学教师理事会 (NCTM) 的报告
《学校数学课程原则与评价标准》

1. 回到波利亚数学教育理论

- 波利亚认为数学有二重性，它既是欧几里得式的演绎科学，但在创造与认识过程中，它又是一门实验性的归纳科学。
- 数学教学与学习的心理三原则:
  - 主动学习原则;
  - 最佳动机原则;
  - 阶段循序原则。
- 波利亚教育理念的核心是合情推理。
- 实例见附录 1

2. 简约化的教学原则 (裘宗沪先生寄语)

- 希尔伯特认为: 所谓好问题就是简明且富有挑战性的问题。
- 资优生面临的三个增函数 (三座大山):
    - 题目越来越多;
    - 题目越来越难;
    - 解答越来越长。

- 简约化是最重要的破解策略
  - 精心选择问题，控制题量。
  - 尽量回避过难过繁的初等问题 (这些问题大多没有较高的数学价值和教育功能)。
  - 提倡简短的证明。

    最简单的证明就是最好的证明 (陈建功)。

  - 裘宗沪先生推荐的两个简短证明范例: 2002 年 IMO 第一题和 2001 年 IMO 第三题。
- 实例见附录 2 (一套简约化的试题)。

四. 挖掘经典 —— 数学家的初等定理

优秀的数学家研究好的问题, 而好问题都有其历史.

- 数学家的初等定理是数学教育的丰富矿藏, 也是数学竞赛命题的重要源泉.
- 经典定理往往蕴含着深刻的数学思想.
- 通过文献检索追踪经典问题的发展 (历史和现状).
- 经典问题往往蕴含着基本的哲学思辨: 你从哪里来? 你到哪里去?

例 1 (Euler,1737)

设 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ 是所有素数的排列. 证明

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \to \infty.$$

- 这是一个非常著名的经典问题. 著名数学家

  Euler (1737), Erdös (1938), Bellman (1943), Dux (1956),

  Moser (1958), Clarkson (1966), Metrovi (2013)

  均给出了不同的证明.

- 下面仅介绍 Euler 的分析证明和 Erdös 的组合证明.

- Euler 的证明:

因为每个正整数都可表示为若干素数的乘积, 故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\le\prod_{p\le n}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right)=\prod_{p\le n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

由 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ge\ln n$, 知

$$\prod_{p\le n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\ge\ln n.$$

注意到当 $0\le t\le\frac{1}{2}$ 时,$\ln(1-t)\ge-2t$. 对上式取对数有

$$2\sum_{p\le n}\frac{1}{p}\ge\ln\ln n$$

结论成立. $\square$

- Erdös 的证明:

假设 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}<\infty$, 则存在 $k\in\mathbb{N}^*$ 满足

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{p_i}<\frac{1}{2}.$$

对 $n\in\mathbb{N}^*$, 记 $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$.

$$A_n=\{k\mid k\in[n]\text{ 且 }k\text{ 不含素因子 }p_{k+1},p_{k+2},\cdots\},$$

$$B_n=[n]\setminus A_n.$$

任取 $m\in A_n$, 则 m 可以表示为 $m=st^2$ 的形式. 因为 s 无平方因子且是 $p_1,\cdots,p_k$ 中若干项乘积. 这样 s 对应 $\{p_1,\cdots,p_k\}$ 的子集,s 最多有 2^k

种选择. 由 $t^2 \leq n$ 知 t 最多有 $\sqrt{n}$ 种选择. 故

$$|A_n| \leq 2^k \sqrt{n}.$$

对 $m \in B_n$, 至少是一个 $p_{k+1}, p_{k+2}, \cdots$ 的倍数, 故

$$|B_n| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{n}{p_i} < \frac{n}{2}.$$

因此

$$n = |A_n| + |B_n| < 2^k \sqrt{n} + \frac{n}{2}.$$

当 $n \geq 2^{2(k+1)}$ 时上式不成立, 矛盾! □

- 注
  - 欧拉的证明连接着 Riemann zeta 函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

对任意 $s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, s > 1$ 成立.

  - 欧拉的证明思想可用于解决下面的问题 (Kömal A.240): 设 m, n 是正整数. 证明

$$\sum_{\substack{1 \le k \le n \\ (k,m)=1}} \frac{1}{k} \ge \frac{\varphi(m)}{m} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

提示: 设 m 的质因数为 $p_1, p_2, \cdots, p_s$, 则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\alpha_i}} \right) \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ (k,m)=1}} \frac{1}{k}.$$

例 2 (Erdös,Szekeres,1978)

若 $0 < a < b \leq \frac{n}{2}$, 记 $d = \gcd\left(\binom{n}{a}, \binom{n}{b}\right)$. 证明:$d \geq 2^a$.

证明概要: 由

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b-a} = \binom{n}{b}\binom{b}{a}$$

知 $\binom{n}{a}/d$ 整除 $\binom{b}{a}$. 因此

$$d \geq \frac{\binom{n}{a}}{\binom{b}{a}} = \frac{n}{b}\frac{n-1}{b-1}\cdots\frac{n-a+1}{b-a+1} \geq 2^a. \qquad \square$$

- 注: Erdös 在组合和数论领域中留下了大量宝贵的初等问题. 这些问题大多有很好的研究背景, 简洁而深刻, 常被用作数学竞赛试题.

- 下面介绍关于级数的 Riemann 定理.

- 古典的埃及分数定理可表述为:

  任意正有理数都可以表示成有限个不同整数的倒数和.

  证明用到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的发散性.

- 一个自然的问题是对于实数是否有类似的表示?

  任意正实数 C 都存在正整数序列的子列 $\{n_i\}$ 使得

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}.$$

- 更一般的我们有如下定理.

例 3 (Riemann, 1854)

设 $\{a_n\}$ 是趋于零的正实数序列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. 证明对任意正实数 C, 存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = C.$$

证明概要: 取 $a_k < C$, 令 $n_1 = k$. 归纳定义 $n_{i+1} > n_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 是使 $a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_{i+1}} < C$ 时的最小数. 记

$$l = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}.$$

易知 $l \leq C$, 下面证明 $l = C$.

对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $m > k$ 使得对任意 $n > m$ 有 $a_n < \varepsilon$. 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

和 $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, 知存在 $j > m, j \neq n_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 使得 j 满足 $n_{i-1} < j < n_i$, 其中 i 是正整数. 由 n_i 选取时的最小性知:

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_{i-1}} + a_j \geq C.$$

故

$$C - (a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_{i-1}}) \leq a_j < \varepsilon.$$

因此 $l = C$. □

- 注
  - 上述定理来源于黎曼在 1854 年发表在德国科学院年鉴上的论文《关于幂级数性质的研究》.
  - 基于这个方法可以证明著名的黎曼重排定理:

    设数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 条件收敛, 则对任意的 S (S 为有限实数或 $\pm\infty$),

    都存在 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的重排 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)}$, 使得 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)} = S$.

例 4 (Brocard,1875)

对于任意正实数 u, v, w, 存在唯一的三角形使得它的三条角平分线长度分为等于 u, v, w.

证明概要: 由三角形角平分线长公式, 则问题可转化为:

对给定的 u, v, w, 求如下方程组的解 a, b, c, 且使得 a, b, c 可以构成三角形的三边长.

$$\begin{cases} u = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) \\ v = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right) \\ w = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) \end{cases} . \tag{1}$$

再作规范化处理. 令

$$p = a + b + c,$$

$$\xi = \frac{a}{p}, \eta = \frac{b}{p}, \zeta = \frac{c}{p}.$$

方程 (1) 可转化为如下方程

$$\begin{cases} \varphi(\xi) = \frac{t}{u^2} \\ \varphi(\eta) = \frac{t}{v^2} \\ \varphi(\zeta) = \frac{t}{w^2} \\ \xi + \eta + \zeta = 1,\ \xi,\ \eta,\ \phi \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \end{cases} . \tag{2}$$

其中 $\varphi = \frac{(1-x)^2 x}{1-2x}, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), t = p^2 \xi\eta\zeta.$

注意到 $\varphi(x)$ 在区间 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 上是单调递增的连续函数. 因此 φ 的反函数 f 存在且在区间 $(0, +\infty)$ 上也是递增的连续函数. 由 (2) 知

$$\xi = f\left(\frac{t}{u^2}\right), \ \eta = f\left(\frac{t}{v^2}\right), \ \zeta = f\left(\frac{t}{w^2}\right). \tag{3}$$

因此

$$f\left(\frac{t}{u^2}\right) + f\left(\frac{t}{v^2}\right) + f\left(\frac{t}{w^2}\right) = 1. \tag{4}$$

这样问题转化为: 关于 t 的方程 (3) 在 $(0, +\infty)$ 上是否存在唯一解 t_0 (将 t_0 带入 (3) 中就可求得 ξ_0, η_0, ζ_0).

事实上, 记方程 (4) 的左边为 $F(t)$, 则 $F(t)$ 单调递增. 取 $t \to 0$ 时, $F(t) \to 0$. 取 $t \to \infty$ 时, 于 $F(t) \to \frac{3}{2}$. 故方程 (4) 的解存在且唯一. □

例 5 (Mathieu-Berg 不等式)

设 c 是任意整数. 证明:

$$\frac{1}{c^2+\frac{1}{2}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+c^2)^2} < \frac{1}{c^2}.$$

- 上述不等式最早由 Mathieu 猜测, 后被 Berg 证明.
- Berg 的证明富有技巧性, 值得欣赏.
- 更令人惊讶的是 Mathieu 能给出如此精准的上下界 (可用积分探索).

- 证明概要

$$\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2+c^2-\frac{1}{4}}-\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2+c^2-\frac{1}{4}}=\frac{2n}{(n^2+c^2-n)(n^2+c^2+n)}>\frac{2n}{(n^2+c^2)^2}.$$

$$\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2+c^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2+c^2+\frac{1}{4}}=\frac{2n}{(n^2+c^2)^2+c^2+\frac{1}{4}}<\frac{2n}{(n^2+c^2)^2}.$$

因此

$$\frac{1}{c^2+\frac{1}{2}}-\frac{1}{m^2+m+c^2+\frac{1}{2}}<\sum_{n=1}^{m}\frac{2n}{(n^2+c^2)^2}<\frac{1}{c^2}-\frac{1}{m^2+m+c^2}$$

令 $m\to\infty$ 即为所要证的不等式.

五. 正确认知无限

- 从有限到无限是认知的一个跨越.
  - 可与其真子集建立一一映射的集合称为无限集.
  - 注意“无限”和“无界”的区别.
  - 任意多个 (包括无限个) 集合都可以进行交并运算.
  - 可与正整数集建立一一映射的集合称为可列集.
  - 可列个可列集的并是可列集.

- 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列集.
  - 有理数集的可列性与稠密性并不矛盾.
  - 有理数集不能按大小顺序排成一列.
- 实数集 $\mathbb{R}$ 不是可列集.
  - 可由有限覆盖定理证明.
  - 无理数远远“多于”有理数.
- 下面是帮助学生正确认知无限的四个实例.

例 1

证明在调和序列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ 中存在任意长度的的等差数列, 但不存在无限项的等差数列.

- 取
$$\frac{n}{n!}, \frac{n-1}{n!}, \cdots, \frac{1}{n!},$$
就得到长度为 n 的等差数列.
- 这是一个经典名题, 衍生出了不少数学竞赛试题.
- 这个题目有助于学生认识“任意长”和“无限长”的区别.

例 2 (France TST)

$f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ 是一个双射. 证明存在正整数 $a<b<c$ 使得

$$f(a)+f(c)=2f(b).$$

证明概要: 令 $g=f^{-1}$, 则问题等价于:

证明: 存在正整数 $x<y<z$ 是等差数列且满足

$$g(x)<g(y)<g(z).$$

假设命题不成立, 不妨设 $g(s)=1$. 对给定的正整数 $t>s$, 可得无穷序列

$$g(s)<\cdots<g(8t-7s)<g(4t-3s)<g(2t-s)<g(t),$$

矛盾. □

例 3

设 $m \geq 2$ 是给定的整数. 证明: 可将正整数集 $\mathbb{N}^*$ 可分划成两个集合 A, B 使得 A, B 中都不包含无穷项非常数的等差数列且对 $\forall x, y \in A$, 有 $|x-y| \geq m$.

证明概要: 设 P 是 $\mathbb{N}^*$ 中所有无穷项非常数等差数列的集合, 则 P 是可列的, 记

$$P = \{s_1, s_2, \cdots\}.$$

在每个等差数列 s_i 中选取元素 x_i $(i = 1, 2, \cdots)$, 满足

$$x_{i+1} - x_i \geq m + i.$$

记集合

$$A = \{x_1, x_2, \cdots\}, \quad B = \mathbb{N}^* \setminus A.$$

显然 A, B 满足要求. $\square$

例 4 (集合的不动点定理)

设 $P(X)$ 是非空集合 X 的所有子集的集族.f 是 $P(X)$ 到自身的映射, 满足对 X 的任意子集 A, B, 若 $A \subseteq B$, 则 $f(A) \subseteq f(B)$. 证明: 存在 X 的子集 T 使得 $f(T) = T$.

证明概要: 构造集合

$$S = \{A \mid A \text{ 是 } X \text{ 的子集且 } A \subseteq f(A)\},$$

令

$$T = \bigcup_{a \in S} A.$$

再验证 T 满足要求即可. □

- 学生常犯错误:
  - 默认 X 是有限集, 对 X 的元素个数归纳.
  - 不理解无穷并运算的定义

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \mid \text{存在 } \alpha \in I \text{ 使得 } x \in A_\alpha\},$$

想当然认为是有限并的极限, 事实上

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

附录 1 合情推理的一个实例

2022 北大夏令营

已知实数 c 满足对任意正整数 n, n^c 是整数. 证明:c 是整数.

- 初等方法的局限性
  - 使用代数变形无法解决问题.
  - 无法转换成初等数论的问题.
- 函数 $f(x) = x^c$ 的分析特点.
  - 在 c 不是整数的时候, 取足够大的 m 可使

$$f^{(m)}(x) \in (0, 1).$$

- 诱导学生发现高阶拉格朗日中值定理.
  - 由导数联想到使用拉格朗日中值定理.
  - n^c 的 m 阶差分是整数 (不变量).
  - 对 m 阶连续函数记

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

归纳定义

$$\Delta^{t+1} f(x) = \Delta(\Delta^t f(x)).$$

利用归纳法, 可以得到如下结论:

n 阶拉格朗日中值定理

对 $x_0 \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^+$, 有

$$\Delta^m f(x_0) = f^{(m)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_0 + m).$$

- 诱导发现原问题证明:

用反证法.

取 k 是 c 的整数部分. 由 n 阶拉格朗日中值定理, 存在

$$\xi \in (n, n+k+1),$$

满足

$$\Delta^{k+1} f(n) = f^{(k+1)}(\xi) = c(c-1)\cdots(c-k)\xi^{c-k-1},$$

取 $n \to \infty$, 左边始终为整数, 右边属于区间 $(0,1)$, 矛盾!

- 提出新的类似问题:

Kömal A.751

设 c 是正实数. 若对每个正整数 n, $1^c, 2^c, \cdots, n^c$ 中至少有 1% 是整数, 则 c 是整数.

- 诱导学生发现这是北大夏令营试题的推广.
  - 北大夏令营题目要求函数 $f(x) = x^c$ 在正整数集上是整数.
  - 本题事实上只要求函数 $f(x) = x^c$ 在正整数集的无穷子集上是整数.
- 诱导学生发现 n 阶差分公式

n 阶差分公式

对 $n \in \mathbb{N}^+, x_0, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, 有

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}, \quad \xi \in (x_0, x_n).$$

- 由学生独立给出问题证明.

 反证法. 记 c 的整数部分为 k. 对任意 N, 取

$$f(N), f(N+1), \cdots, f(N+200(k+2))$$

其中至少有 $k+2$ 个整数, 从小到大记为

$$f(N+d_1), \cdots, f(N+d_{k+2}).$$

应用上述差分公式得存在 $\xi \in (N+d_1, N+d_{k+2})$, 满足

$$\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} = \sum_{i=1}^{k+2} \frac{f(N+d_i)}{\prod_{j\neq i}(d_i-d_j)}.$$

左右同乘 $(200(k+2))!$ 后右边为正整数而左边取 $N\to\infty$ 时极限为 0, 矛盾!

- 诱导学生思考更多问题如下:

推广 1

设 c 是正实数. 函数 $f(x)=x^c$ 在 $x\in P$(P 是正整数集的无穷子集) 上是整数, 则 c 是整数.

推广 2

给定实数 $c, f(x)=x^c$ 满足对任意正整数 $n, f(n)$ 是有理数. 证明: c 是整数.

推广 3

给定实数 $a, f(x) = a^x$ 满足对任意正整数 $n, f(n)$ 是有理数. 证明: a 是整数.

推广 4

$f(x)$ 是多项式满足对任意正整数 $n, f(n)$ 是整数. 问 $f(x)$ 的系数应满足什么条件?

附录 2 简约化原则的一套试题

1. 设 $0 < m < n$ 是整数, $z_k \in \mathbb{C}$, $|z_k| \geq 1$, $k = 1, 2, \cdots, n - m$. 记

$$P(z) = \frac{m}{|z|} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{1}{z - z_k}.$$

证明: $P(z)$ 在圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{m}{n}\}$ 内没有根.

2. 设 $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ 是一一映射. 证明: 存在正整数 $a < b < c$ 使得

$$f(a) + f(c) = 2f(b).$$

3. 设 ω 是 $\triangle ABC$ 的外接圆. D 是边 BC 上固定的一点, E 是 ω 上一个动点. 记 AE 与直线 BC 的交点为 F. 求 $\triangle DEF$ 的外心的轨迹.

4. 对整数 $n > 2$, 定义集合

$$A(n) = \{(k,l) : 1 \le k \le l \le n,\ k+l \le n,\ \gcd(k,l) = 1\},$$

$$B(n) = \{(k,l) : 1 \le k \le l \le n,\ k+l > n,\ \gcd(k,l) = 1\},$$

证明: $|A(n)| = |B(n)|$.

谢谢大家!