第十五期问题征解解答与点评

牟晓生

第一题. 设 z_1, z_2, z_3 是单位复数. 证明存在单位复数 z 使得

$$\frac{1}{|z-z_1|^2}+\frac{1}{|z-z_2|^2}+\frac{1}{|z-z_3|^2} \le \frac{9}{4}.$$

(湖北武钢三中学生 王逸轩, 上海大学 冷岗松 供题)

证明 (根据人大附中陈炤桦同学的解答整理):

设单位圆上 z_1, z_2, z_3 对应的点分别为 A, B, C. 不妨设它们是逆时针排列的, 且 BC 是最长边. 取 D 为弧 BC (不含 A 那段) 的中点, 我们证明点 D 对应的复数 z 满足条件. 令 $\triangle ABC$ 的三个内角分别是 α, β, γ, 分两种情况讨论:

1) $\alpha > \frac{\pi}{2}$. 此时 $|DA|, |DB|, |DC|$ 均大于 $\sqrt{2}$, 于是

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{|z-z_i|^2}=\frac{1}{|DA|^2}+\frac{1}{|DB|^2}+\frac{1}{|DC|^2}<\frac{3}{2}<\frac{9}{4}.$$

2) $\alpha \le \frac{\pi}{2}$. 此时有

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{|z-z_i|^2}=\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{4\sin^2(\beta+\frac{\alpha}{2})}.$$

为证等式右边$\le \frac{9}{4}$, 等价于要证

$$\sin^2(\beta+\frac{\alpha}{2}) \ge \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{9\sin^2\frac{\alpha}{2}-2},$$

也就是

$$1-\cos(2\beta+\alpha) \ge \frac{2-2\cos\alpha}{5-9\cos\alpha}. \tag{1}$$

由假设 $\alpha \ge \beta, \gamma$, 因此 $\pi-2\alpha \le \beta \le \alpha$. 于是 $\frac{\pi}{2} \le 2\pi-3\alpha \le 2\beta+\alpha \le 3\alpha \le \frac{3\pi}{2}$. 由此可知 $\cos(2\beta+\alpha) \le \cos(3\alpha)$. 将它代入到要证的 (1) 式, 化归为

$$1-\cos(3\alpha)=3\cos\alpha+1-4\cos^3\alpha \ge \frac{2-2\cos\alpha}{5-9\cos\alpha}.$$

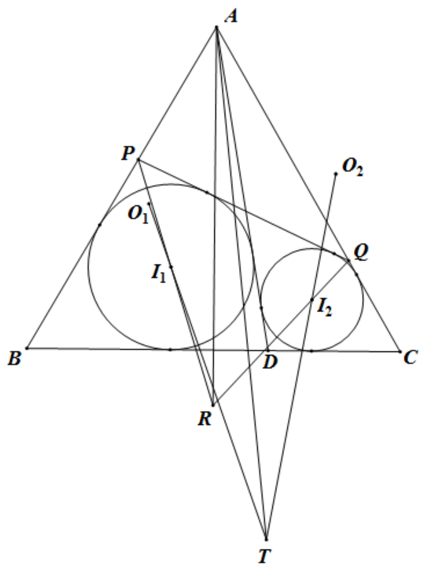
整理后即 $(1-\cos\alpha)(1-2\cos\alpha)(3+17\cos\alpha+18\cos^2\alpha) \ge 0$. 这对 $\cos\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ 显然成立, 命题得证! □

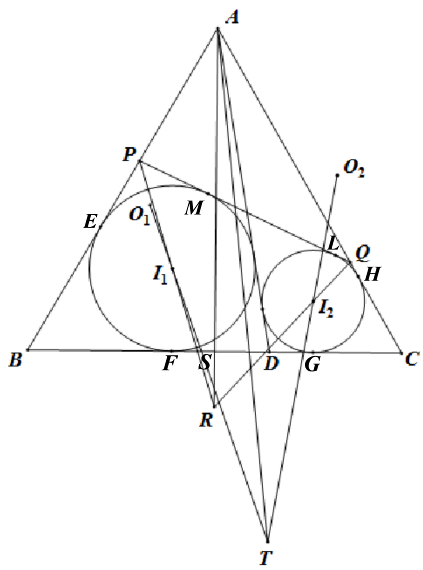
评注 (1). 浙江省富阳中学黄昊中同学, 西工大附中吴庆彤同学, 巴蜀中学叶安宁, 崔郝好同学, 长沙市一中方浩同学, 雅礼中学陈钦品, 邱添, 谢添乐, 黄磊等同学也给出了本题的正确解答.

(2). 更一般地可以考虑对 n 个单位复数的相应问题. Ambrus, Ball 以及 Erdelyi 在 2013 年发表的论文“Chebyshev constants for the unit circle”证明了最佳常数是 $\frac{n^2}{4}$.

第二题. 如图, D 是正三角形 ABC 的边 BC 上一点, $BD > CD$. 记 O_1, I_1 为 $\triangle ABD$ 的外心与内心, O_2, I_2 为 $\triangle ACD$ 的外心与内心. 圆 I_1 与圆 I_2 除 BC 外的另一条外公切线交 AB, AC 于 P, Q. 设直线 PI_1 与 QI_2 交于 R, 而直线 O_1I_1 与 O_2I_2 交于 T. 证明: $AT^2 = AR^2 + AD \cdot BC$.

(广西钦州 卢圣 供题)





证明 (**根据长沙市一中胡冬础同学的解答整理**):

如图标点. 首先注意到 R 是 $\triangle APQ$ 的对应顶点 A 的旁心. 因此 $\angle RAB = 30°$, 并且有

$$\begin{aligned}AR^2 &= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}(AP+PQ+QA)\right)^2 = \frac{1}{3}(AE+ML+AH)^2 \\ &= \frac{1}{3}(AE+FG+AH)^2 = \frac{1}{3}(3AB-2BE-2CH)^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(3AB-(AB+BD-AD)-(AC+CD-AD)\right)^2 \\ &= \frac{4}{3}AD^2.\end{aligned} \tag{2}$$

接下来我们有

$$AO_1 = DO_1 = AO_2 = DO_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}AD,$$

而 $\angle O_1AO_2 = 60^\circ$, 因此 AO_1DO_2 是两个正三角形拼成的菱形. 另外由 $\angle AO_1D = \angle AI_1D = 120^\circ$ 知 AO_1I_1D 四点公圆, AO_2I_2D 同理. 利用这些我们有如下计算:

$$\begin{aligned}\angle O_1TO_2 &= 180^\circ - \angle I_1O_1O_2 - \angle I_2O_2O_1\\ &= 60^\circ - \angle I_1O_1D - \angle I_2O_2D\\ &= 60^\circ - \angle I_1AD - \angle I_2AD = 30^\circ.\end{aligned}$$

而 $DO_1 = DO_2$ 且 $\angle O_1DO_2 = 60^\circ$, 故 D 是 $\triangle O_1TO_2$ 的外心.

令 S 为 O_1I_1 与 BC 的交点, 那么

$$\begin{aligned}\angle DSO_1 &= 360^\circ - \angle ADB - \angle DAO_1 - \angle AO_1I_1\\ &= 360^\circ - (120^\circ - 2\angle I_1AD) - 30^\circ - (120^\circ + I_1O_1D)\\ &= 90^\circ + 2\angle I_1AD - \angle I_1O_1D\\ &= 90^\circ + \angle I_1O_1D.\end{aligned}$$

于是 $\angle TSD = 90^\circ - \angle I_1O_1D = 90^\circ - \angle I_1TD$, 即 $DT \perp BC$. 由余弦定理知

$$\begin{aligned}AT^2 &= \frac{4}{3}AD^2 + DT^2 + 2\sin\angle ADB \cdot AD \cdot DT\\ &= AD^2 + DO_1^2 + 2\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}BC}{AD} \cdot AD \cdot DO_1\\ &= AD^2 + \frac{1}{3}AD^2 + \sqrt{3}BC \cdot \frac{AD}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{4}{3}AD^2 + BC \cdot AD.\end{aligned} \tag{3}$$

比较 (2), (3)两式, 命题得证! □

评注 象山第三中学黄子宸同学, 如东高级张陈成同学, 人大附中陈炤桦同学, 巴蜀中学叶安宁, 崔郝好同学, 雅礼中学陈钦品, 刘麟轩, 李师铨同学, 长沙市一中胡宇涵, 李疆来等同学也给出了本题的正确解答.

第三题. 给定正整数 m, n, 考虑在 $m \times n$ 白棋盘上先将一些格染成黑色. 在之后的每一时刻, 若存在一个白格至少与两个黑格相邻, 则可将它也染成黑色. 求最初至少要染多少个黑色格才能在某一时刻染黑整个棋盘?

(哈佛大学 牟晓生 供题)

证明 (根据雅礼中学刘舰徽同学的解答整理):

答案是 $\lceil \frac{m+n}{2} \rceil$.

一方面, 我们注意到黑色区域的周长在题设的操作下单调不增. 这里一条线段被算作周长当且仅当它恰是一个 (而不是两个) 黑格的某条边. 周长单调不增是因为当一个格被染黑时, 它的四条边里至少有两条从周长的一部分消失了. 由于要染黑全部棋盘, 最终黑色区域的周长是 $2(m+n)$, 因此最初的周长至少也是 $2(m+n)$. 而每个黑格至多贡献 4 条边, 因此前面说的答案是一个下界.

接下来我们进行构造. 不妨假设 $m \le n$. 将 $m \times n$ 棋盘划分为左边 $m \times m$ 以及右边 $m \times (n-m)$ 两部分. 在左边的正方形部分, 我们将对角线上的 m 个格子染黑, 这样可以保证左边部分沿着一条一条对角线最终全部成为黑色. 在右边部分, 如果 $n-m$ 是偶数 (奇数), 则将这部分第一行所有偶数 (奇数) 列格子染黑, 恰好是 $\lceil \frac{n-m}{2} \rceil = \lceil \frac{m+n}{2} \rceil - m$ 个. 在左边部分全部染黑以后, 右边第一行也按条件全部染黑, 之后一行一行直到棋盘全部变黑. 于是构造成立! □

评注 (1). 人大附中陈炤桦, 张峰玮同学, 西工大附中吴庆彤同学, 巴蜀中学叶安宁, 崔郝妤同学, 长沙市一中胡宇涵同学, 雅礼中学刘哲成, 肖尧, 邱添等同学也给出了本题的正确解答.

(2). 这个问题被收录在 Bollobas 的书《The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis》中. 那本书里有几百个精彩的问题与证明, 非常值得一读.

第四题. ABC 是一个三角形, 而 P, Q, R 分别是 BC, CA, AB 上的点. 证明 $\triangle PQR$ 的周长不小于 $\triangle AQR, \triangle BRP, \triangle CPQ$ 周长的最小值.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):

我们用反证法. 假设命题不成立, 则有:

$$PQ + PR < AQ + AR; \tag{4}$$

$$QP + QR < BP + BR; \tag{5}$$

$$RP + QR < CP + CQ. \tag{6}$$

自然地, 我们希望将三条内部的边 PQ, QR, RP 用外面的 AQ, AR, BP, BR 以及 CP, CQ 表示出来. 最直接的方法是用余弦定理, 比如

$$PQ = \sqrt{AQ^2 + AR^2 - 2AQ \cdot AR \cdot \cos A}.$$

然而这样的话上面式子的左边会有两个根号, 计算非常不易. 为了简化问题, 我们试图将 PQ 进行放缩, 而一种方法就是将 PQ 放为它在直线 AB 上的投影. 由此我们得到

$$\begin{aligned} PQ &\geq AB - AQ\cdot\cos A - BP\cdot\cos B; \\ PR &\geq AC - AR\cdot\cos A - CP\cdot\cos C; \\ QR &\geq BC - BR\cdot\cos B - CQ\cdot\cos C. \end{aligned} \tag{7}$$

在我们进行接下来的计算之前, 注意到原命题在 P, Q, R 为三条边中点时取等号. 而此时 PQ 平行于 AB, 因此上面的放缩并没有放过头. 这一点给我们继续下去提供了信心.

令 $BC = a, CA = b, AB = c$, 另外设 $BP = \frac{a}{2} + \alpha$, $CQ = \frac{b}{2} + \beta$, $AR = \frac{c}{2} + \gamma$, 其中 α, β, γ 不一定是正的. 将 (7) 代入到 (4) 式中, 我们得到

$$b + c - (\frac{b}{2} - \beta + \frac{c}{2} + \gamma)\cdot\cos A - (\frac{a}{2} + \alpha)\cos B - (\frac{a}{2} - \alpha)\cos C < \frac{b}{2} - \beta + \frac{c}{2} + \gamma.$$

经过整理也就是

$$\frac{(b+c)(1-\cos A) - a(\cos B + \cos C)}{2} < \alpha(\cos B - \cos C) - (\beta - \gamma)(1 + \cos A).$$

由于 $b\cos A + a\cos B = c, c\cos A + a\cos C = b$, 上面左边是零 (也对应了 $\alpha = \beta = \gamma = 0$ 时等号成立). 于是我们简化为:

$$\alpha(\cos B - \cos C) > (\beta - \gamma)(1 + \cos A).$$

利用和差化积公式约去 $\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{B+C}{2}$, 我们进一步得到

$$\alpha\sin\frac{C-B}{2} > (\beta - \gamma)\cos\frac{A}{2}. \tag{8}$$

类似地, 我们由 (5), (6) 结合 (7) 可以得到

$$\beta\sin\frac{A-C}{2} > (\gamma - \alpha)\cos\frac{B}{2}. \tag{9}$$

$$\gamma\sin\frac{B-A}{2} > (\alpha - \beta)\cos\frac{C}{2}. \tag{10}$$

我们将要从 (8)-(10) 导出矛盾. 为此我们将 (8) 式乘上 $\sin\frac{A}{2}$, (9) 式乘上 $\sin\frac{B}{2}$, (10) 式乘上 $\sin\frac{C}{2}$, 然后相加.

我们来证明最后得出的不等式左右相等. 为此考虑 α 的系数. 在左边它只出现在 (8) 式中, 因此系数是

$$\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{B+C}{2} = \frac{\sin C - \sin B}{2}.$$

而在右边 α 的系数来自 (9), (10) 二式, 一共也是

$$-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{\sin C-\sin B}{2}.$$

由此我们导出了矛盾, 命题得证! □

评注 我记得是在熊斌老师的《奥数教程》上看到这个问题的. 关于面积的结论也成立, 被称作 Erdös-Debrunner 不等式.