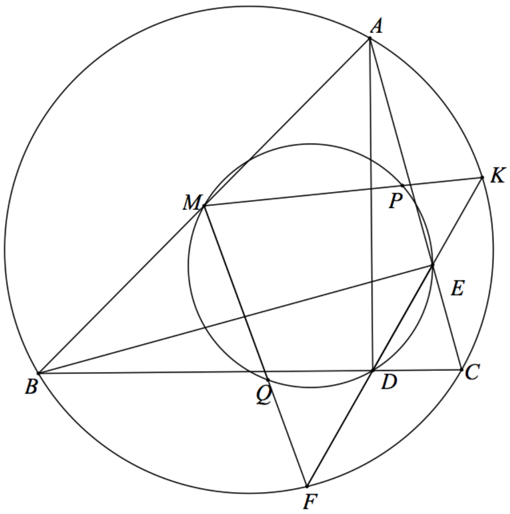
数学新星问题征解

第十七期（2016.10）

主持：牟晓生

第一题. 如图, AD, BE 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的边 BC, AC 上的高. AB 中点为 M, 直线 DE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 F, K, 线段 MK 和 MF 分别与 $\triangle MDE$ 的外接圆交于除 M 以外的点 P, Q. 证明: A, P, Q, B 四点共圆.



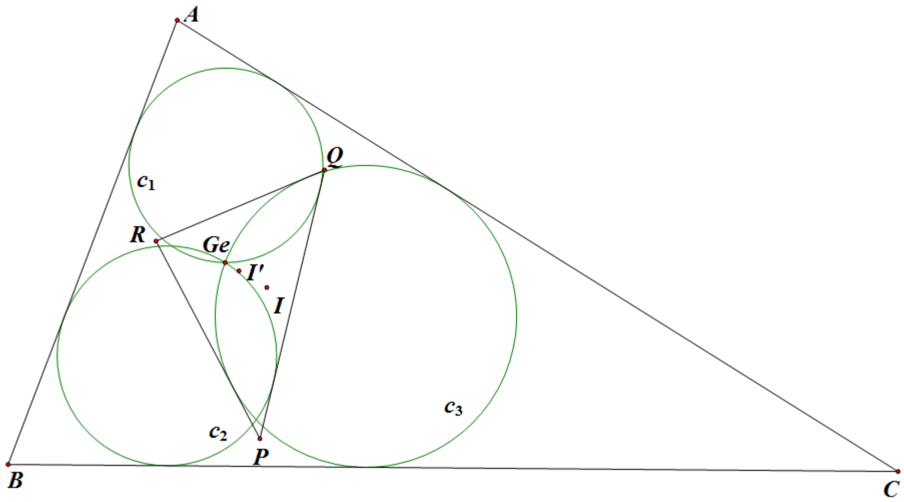
(福建厦门一中 徐小平 供题)

第二题. 证明对任意正整数 n 以及任意实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x_j\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}(k+1)x_k^2 .$$

(湖南师大附中 羊明亮 供题)

第三题. 如图所示, Ge 是 $\triangle ABC$ 的 Gergonne 点, c_1 是过 Ge 且与 AB, AC 相切的圆中较小的那个, 类似定义 c_2, c_3. 设 c_1, c_2, c_3 两两间的另一条外公切线彼此交于 P, Q, R. 证明: $\triangle ABC$ 的内心 I, $\triangle PQR$ 的内心 I' 以及 Ge 三点共线.



(北京人大附中学生 杨泓暕 供题)

第四题. 设 $f(x)$ 是一个复系数多项式, 满足

$$x^2 \mid f(x) - e^{\frac{2\pi i}{m}} \cdot x,$$

其中 $m > 1$ 是给定的正整数. 令 $f^{(m)}(x)$ 为 f 的 m 次迭代, 证明:

$$x^{m+1} \mid f^{(m)}(x) - x.$$

(清华大学 刘畅 供题)