Szemerédi-Trotter 定理与多项式方法

张瑞祥

说到平面上的组合几何, 你可能很容易想到它的两个最基本的元素——点和直线. 然而你也许不知道, 点和直线的关系中可以挖掘出一个很深刻的定理, 这就是我们今天要介绍的 Szemerédi-Trotter 定理.

定理 1 (Szemerédi-Trotter). *平面上有有限点集 P 和有限直线集 L, 若 $p \in P$ 在 $l \in L$ 上, 就称 (p, l) 是一个“关联”, 所有关联的集合记为 $I(P, L)$. 则存在与 P, L 无关的常数 C, 使得*

$$|I(P,L)| \leq C\big(|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + |P| + |L|\big). \tag{1}$$

(1) 式是非常不平凡的. 根据乘法原理, 关联总数 $|I(P,L)| \leq |P||L|$. 但稍一想我们便知 $|P||L|$ 是达不到的: 两点只能同在一条直线上! 当 $|P|$ 与 $|L|$ 相近时, (1) 式右边是 $|P|^{\frac{4}{3}}$ 量级, 比我们的“平凡估计”$|P|^2$ 量级省了很多.

我们介绍定理 1 的一个证明. 这个证明中有一个十分有趣的方法, 它就是在当代关联几何领域大放异彩的“多项式方法”. 这里说的关联几何, 是组合几何的一个重要分支. 它重点研究点、线等基本几何元素的“关联度”最好能是什么样子. 不难看出, 定理 1 给出了任意多个点与任意多条线的“关联度”的一个非平凡上界.

现在我们设法证明定理 1. 对于 $I(P, L)$, 我们能说些什么呢? 如果 $l \in L$ 过 P 中 $p_l \geq 2$ 个点, 则 L 上的点对至少有 $\binom{p_l}{2} \geq p_l$ 个. 如果 l 只过 P 中至多一个点, 则所有这样的 l 产生的关联数至多为 $|L|$. 由于总的点对数只有 $\binom{|P|}{2} < |P|^2$, 我们可得“平凡估计”:

$$|I(P,L)| \leq |P|^2 + |L|. \tag{2}$$

对偶地, 我们可由“两条线至多交于一点”得

$$|I(P,L)| \leq |L|^2 + |P|. \tag{3}$$

但 (2) 与 (3) 离 (1) 还相去甚远. 这时, 就该我们的多项式方法出场了. 说起多项式方法, 其实大家对其精神也许并不陌生, 这个方法的核心只有两步:

1). 构造一个多项式;

2). 利用多项式来研究原问题.

如果大家还记得 2007 年 IMO 第 6 题, 那里便是用的这种方法.

用多项式方法来解决定理 1 的好处在于: 如下 Stone-Tukey 定理保证了我们可以很有效地用多项式的零点集对平面进行分割.

定理 2 (Stone-Tukey). 对平面上任意点集 P 和任意正整数 d, 存在一个次数不超过 d 的非零多项式 Q, 使得 Q 的零点集至多将平面分割成 Cd^2 部分, 每部分内部 (不含边界) 至多有 $C\frac{|P|}{d^2}$ 个点. 其中 C 是一个与 P, d 无关的常数.

注 定理 2 的证明超出了初等数学的范围, 我们在此承认它.

定理 2 告诉我们, 一个 d 次的多项式的零点集可以把**任意**一个平面点集均匀分成大约 d^2 份. 实践证明, 这是一个非常有效的划分!

利用定理 2, 我们来证明定理 1.

定理 1 的证明 我们对 $|L|$ 归纳证明:

$$|I(P,L)| \le C_0\big(|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + |P| + |L|\big). \tag{4}$$

这里 C_0 是一个待定的常数.

当 $|L| = 1$ 时, $|I(P,L)| \le |P|$, 因此只要 $C_0 \ge 1$, (4) 就成立.

假设 (4) 对 $|L| < t$ $(t \ge 2)$ 成立. 现考虑 $|L| = t$ 的情形.

如果 $|L| \ge \frac{|P|^2}{1000}$, 则由 (2) 得

$$|I(P,L)| \le 1001|L|.$$

故只要 $C_0 > 1001$, (4) 便成立.

以下假设 $|L| < \frac{|P|^2}{1000}$, 同理可设 $|P| < \frac{|L|^2}{1000}$.

令 d 是一个待定的正整数, 由定理 2, 存在常数 C_1 和多项式 Q 使得 $\deg Q \le d$, 且 Q 的零点集 $Z(Q)$ 将平面至多分成 $C_1 d^2$ 部分, 每部分内部至多有 $C_1\frac{|P|}{d^2}$ 个点.

对任意 $l \in L$, Q 限制在 l 上是一个单变量的多项式, 则若它不等于 0, 其至多有 $\deg Q \le d$ 个根. 因此, l 至多与以上说的至多分成的 $C_1 d^2$ 部分中的 $d + 1 \le 2d$ 个部分的内部相交. 注意在这里我们得到了一个很不平凡的界, 任一条直线只能与 d^2 (量级) 个部分中的 d (量级) 个部分相交!

记 $Z(Q)$ 把平面切成的部分 (内部, 不含边界) 分别为 $S_1, \cdots, S_k$, $k \le C_1 d^2$.

对 $1 \le i \le k$, 设有 l_i 条线与 S_i 的内部相交, 则由以上讨论知,

$$\sum_{i=1}^{k} l_i \le 2d|L|. \tag{5}$$

对于 $I(P,L)$ 中的关联 (p,l), 我们将它们分成 3 类: 记所有满足 $l \not\subseteq Z(Q)$, $p \notin Z(Q)$ 的 (p,l) 形成集合 $I_1(P,L)$; 所有满足 $l \not\subseteq Z(Q)$, $p \in Z(Q)$ 的 (p,l) 形成集合 $I_2(P,L)$; 而所有满足 $l \subseteq Z(Q)$ 的 (p,l) 形成集合 $I_3(P,L)$. 我们对三者逐一估计.

对任意 $(p,l) \in I_1(P,L)$, p 一定落在某个 S_i 的内部, 因此 l 也一定穿过 S_i 内部. 故结合 (2) 和 (5), 得

$$\begin{aligned}
|I_1(P,L)| &\le \sum_i (S_i \text{ 内部的关联数}) \\
&\le \sum_i \big((S_i \text{ 内部的点数})^2 + l_i\big) \\
&\le \sum_i \left(\left(C_1 \frac{|P|}{d^2}\right)^2 + l_i\right) \\
&\le C_1^3 \frac{|P|^2}{d^2} + 2d|L|.
\end{aligned} \tag{6}$$

对任意 $(p,l) \in I_2(P,L)$, p 一定在 $Z(Q)$ 上, 但 l 与 $Z(Q)$ 至多有 d 个交点, 故

$$|I_2(P,L)| \le d|L|. \tag{7}$$

对任意 $(p,l) \in I_3(P,L)$, l 一定在 $Z(Q)$ 上, 这意味着满足对任意 $p \in l$, $f_l(p) = 0$ 的一次多项式 f_l 整除 Q. 但 Q 至多有 d 个不同的一次因子, 则所有这种直线 l 至多有 d 个. 如果我们在选取 d 时, 令 $d \le \frac{|L|}{2}$, 则由归纳假设,

$$|I_3(P,L)| \le C_0\left(\frac{|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} + |P| + |L|\right). \tag{8}$$

综合 (6), (7), (8) 知, 只要 $d \le \frac{|L|}{2}$ 就有

$$|I(P,L)| \le C_1^3 \frac{|P|^2}{d^2} + 3d|L| + \frac{C_0}{2^{\frac{2}{3}}}|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + C_0|P| + C_0|L|. \tag{9}$$

我们试图令 (9) 中前两项尽量接近, 则可取

$$d = \left\lfloor \frac{|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{-\frac{1}{3}}}{100} \right\rfloor + 1.$$

由假设 $|L| < \frac{|P|^2}{1000}$ 知,

$$d \le \frac{|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{-\frac{1}{3}}}{50}.$$

由 $|P| < \frac{|L|^2}{1000}$ 知,

$$d \leq \frac{|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{-\frac{1}{3}}}{50} \leq \frac{|L|}{2}.$$

因此 (9) 成立. 故

$$|I(P,L)| \leq 10000C_1^3|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{50}|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + \frac{C_0}{2^{\frac{2}{3}}}|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + C_0|P| + C_0|L|. \tag{10}$$

因此只要令 $C_0 > 10000C_1^3 + \frac{3}{50} + \frac{C_0}{2^{\frac{2}{3}}}$ 便可完成归纳. □

这种“分而治之”的本领, 是多项式方法的一大优势和特色, 也奠定了它在现代关联几何学中基石的地位.

定理 1 还有一个用图嵌入平面的交叉数的上界的证明. 知道我们提到的这个定理的同学不妨自己想一想.