数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

2022 年越南 TST 试题解答与评析

刘家瑜

(长沙市雅礼中学, 410007)

指导教师: 申东

本年度越南 TST 试题的难度与 CMO 试题的难度基本相当. 3, 4 两个几何题比较漂亮, 难度比 CMO 稍小, 1, 2, 5 题中等难度, 第 6 题较难.

I. 试 题

1. 已知函数 $\varphi(x) = x^2e^{ax}$ (a 为给定实数). 求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 使得对任意 x, $y \in \mathbb{R}$, 都有 $f(\varphi(x) + f(y)) = y + \varphi(f(x))$.

2. 给定一个凸 2022 面体. 随机选择 3 个面, 并在上面填数 26, 4, 2022 (每个面上填 1 个数). 甲想在每个其它的面上填一个实数, 使得它是每个与之有公共棱的面上的实数的平均数. 证明: 有且仅有一种填数的方法.

3. 平行四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 I. $\triangle ABI$ 内有一点 G, 使得 $\angle IAG = \angle IBG \neq 45^\circ - \frac{\angle AIB}{4}$. 设 E 为 C 在 AG 上的投影, F 为 D 在 BG 上的投影. $\triangle BEF$ 的 E-中线和 $\triangle AEF$ 的 F-中线交于点 H.

(1) 证明: AF, BE, IH 三线共点 (记该点为 L).

(2) CE, DF 相交于点 K, 设 $\odot LAB$, $\odot EIJ$, $\odot FIJ$ 的圆心分别为 J, M, N. 证明: $\odot GAB$, $\odot KCD$ 的连心线和 EM, FN 三线共点.

4. 锐角不等边 $\triangle ABC$ 的外心为 O, BC 边的中点为 I. 直线 OI 分别交 AB, AC 于点 E, F. D 为 A 关于 O 的对称点, G 为 A 关于 $\triangle AEF$ 外心的对称点, K 为 O 关于 $\triangle OBC$ 外心的对称点.

(1) 证明: D, G, K 三点共线.

(2) 设 M, N 分别是 KB, KC 上的点, 满足 $IM \perp AC$, $IN \perp AB$. IK 的

修订日期: **2022-05-26.**

垂直平分线交 MN 于点 H, IH 分别交 AB, AC 于点 P, Q. 证明: $\triangle APQ$ 的外接圆与圆 O 的另一个交点 (不同于 A) 在直线 AI 上.

5. 对于实数 x, 若存在 $b \in \{2,\ 3,\ \cdots,\ 2022\}$, 使得 x 在 b 进制下可表示为有限小数, 则称 x 为"漂亮数". 证明: 仅存在有限个正整数 n $(n \geq 4)$, 使得对于任意正整数 $m \in \left(\frac{2}{3}n,\ n\right)$, 两数 $\frac{n}{m-n}$, $\frac{n-m}{m}$ 当中至少有一个漂亮数.

6. 已知集合 $A \in \{1, 2, \cdots, 4044\}$.甲将其中 2022 个数染成白色, 剩余 2022 个数染成黑色. 对于每个 $i \in A$, 所有小于 i 的白色数与所有大于 i 的黑色数之和称为 i 的"重要数". 求所有可能的正整数 k, 使得存在自然数 m 和一种染色方式, 满足有 k 个数的重要数为 m.

II. 解答与评注

题 1 *已知函数 $\varphi(x) = x^2 e^{ax}$ (a 为给定实数). 求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 使得对任意 x, $y \in \mathbb{R}$, 都有 $f(\varphi(x) + f(y)) = y + \varphi(f(x))$.*

解 先证明 f 为一一映射.

记 $f(\varphi(x) + f(y)) = y + \varphi(f(x))$ 为 (1) 式. 在 (1) 式中令 $x = 0$, 并注意到 $\varphi(0) = 0$, 可得

$$f(f(y)) = y + \varphi(f(0)). \tag{2}$$

一方面, 由 (2) 知, 当 y 遍历 $\mathbb{R}$ 时, $f(f(y))$ 也遍历 $\mathbb{R}$, 故 f 为满射.

另一方面, 若 $f(y_1) = f(y_2)$, 则由 (2) 可得

$$y_1 + \varphi(f(0)) = f(f(y_1)) = f(f(y_2)) = y_2 + \varphi(f(0)) \Rightarrow y_1 = y_2,$$

故 f 为单射.

综上, f 为一一映射.

由 (1), (2) 可得

$$f(\varphi(x) + f(y)) = f(f(y)) - \varphi(f(0)) + \varphi(f(x)),$$

注意到 f 为满射, 可用 y 代替上式中的 $f(y)$, 得

$$f(\varphi(x) + y) = f(y) - \varphi(f(0)) + \varphi(f(x)). \tag{3}$$

在 (3) 中用 $\varphi(y)$ 代替 y, 得

$$f(\varphi(x) + \varphi(y)) = f(\varphi(y)) - \varphi(f(0)) + \varphi(f(x)). \tag{4}$$

在 (4) 中交换 x, y, 得

$$f(\varphi(x)+\varphi(y))=f(\varphi(x))-\varphi(f(0))+\varphi(f(y)). \tag{5}$$

由 (4), (5) 可得

$$f(\varphi(y))+\varphi(f(x))=f(\varphi(x))+\varphi(f(y)),$$

在上式中令 $y=0$, 可得

$$f(0)+\varphi(f(x))=f(\varphi(x))+\varphi(f(0)). \tag{6}$$

由 (3), (6) 可得

$$f(\varphi(x)+y)=f(y)+f(\varphi(x))-f(0). \tag{7}$$

注意到 $\varphi(x)$ 为连续函数且 $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=e^a>0$, 由 (7) 可得

$$f(x+y)=f(y)+f(x)-f(0)$$

对于 $x\in[0,\ e^a]$, $y\in\mathbb{R}$ 成立.

令 $g(x)=f(x)-f(0)$, 则由上可知, $g(x+y)=g(y)+g(x)$ 对于 $x\in[0,e^a]$, $y\in\mathbb{R}$ 成立.

又由 (6) 可得,

$$\begin{aligned}g(\varphi(x))&=f(\varphi(x))-f(0)=\varphi(f(x))-\varphi(f(0))\\&\geq-\varphi(f(0)),\ (\text{注意}\varphi(f(x))\geq 0)\end{aligned}$$

这表明, 当 $x\in[0,\ e^a]$ 时, $g(x)\geq-\varphi(f(0))$ 有下界.

由柯西方程性质知, $g(x)=cx\ (x\in\mathbb{R})$, 故 $f(x)=cx+b\ (c,\ b\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R})$. 将其代回 (1) 式可得, $c^2=1$ 及 $c\varphi(x)+(c+1)b=\varphi(cx+b)$.

若 $c=-1$, 则 $\varphi(x)+\varphi(-x+b)=0$, 注意到当 $x\neq 0$ 时, $\varphi(x)>0$, 故 $\varphi(x)+\varphi(-x+b)=0$ 不会恒成立, 矛盾.

故 $c=1$, 有 $\varphi(x)+2b=\varphi(x+b)$, 结合 $\varphi(0)=0$ 可得 $\varphi(b)=2b$, $\varphi(-b)=-2b$, 而 $\varphi(x)\geq 0$ 恒成立. 故 $b=0$, 此时 $f(x)=x(x\in\mathbb{R})$.

检验可知, $f(x)=x\ (x\in\mathbb{R})$ 是原方程的解. □

评注 本题的关键是转化为柯西方程形式后求解, 需要熟练掌握柯西方程的相关知识和基本方法.

题 2 给定一个凸 2022 面体. 随机选择 3 个面, 并在上面填数 26, 4, 2022 (每个面上填 1 个数). 甲想在每个其它的面上填一个实数, 使得它是每个与之有公共棱的面上的实数的平均数. 证明: 有且仅有一种填数的方法.

证明 先证明存在性.

设 2022 个面为 $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{2022}$. 若 $P_i,\ P_j$ 有公共棱, 则称它们"相邻". 不妨设 26, 4, 2022 分别填在 $P_1,\ P_2,\ P_3$ 上. 我们先将一只小虫放在面 P_i 上, 每过 1 秒, 小虫等概率地移动到相邻的某个面上, 且小虫移动到 $P_1,\ P_2,\ P_3$ 之一后就不再移动. 记时刻 j 小虫在面 P_k 上的概率为 $P_k^i(j)$ (特别地, $P_1^1(j), P_2^2(j), P_3^3(j)$ 恒为 1). 则有 $P_i^i(0)=1,\ \sum\limits_{k=1}^{2022} P_k^i(j)=1,\ P_1^i(j),\ P_2^i(j),\ P_3^i(j)$ 单调不减.

我们在面 P_i 上填数

$$t_i=\lim_{j\to+\infty}\left(26P_1^i(j)+4P_2^i(j)+2022P_3^i(j)\right).$$

有 $t_1=26,\ t_2=4,\ t_3=2022$, 符合题意.

且当 $i>3$ 时,

$$\begin{aligned}
t_i&=\lim_{j\to+\infty}\left(26P_1^i(j)+4P_2^i(j)+2022P_3^i(j)\right)\\
&=\lim_{j\to+\infty}\left(\sum_{P_l\text{与}P_i\text{ 相邻}}\left(26P_1^l(j-1)+4P_2^l(j-1)+2022P_3^l(j-1)\right)\right)\\
&\quad\cdot\frac{1}{\text{与}P_i\text{ 相邻的面数}}\\
&=\frac{1}{\text{与}P_i\text{ 相邻的面数}}\sum_{P_l\text{ 与}P_i\text{ 相邻}}t_l\ (\text{此即与 }P_i\text{ 有公共棱的面上的实数的平均数})\,.
\end{aligned}$$

存在性得证.

再证明唯一性.

假设还有满足条件的另一组数 $t_i'\ (1\le i\le 2022)$, 其中 $t_1'=26,\ t_2'=4,\ t_3'=2022$. 我们令 $x_i=t_i'-t_i$, 则 $x_1=x_2=x_3=0$, 数组 $x_i\ (1\le i\le 2022)$ 对应代替 $t_i\ (1\le i\le 2022)$, 也满足每个面 ($P_1,\ P_2,\ P_3$ 除外) 上的数等于与之有公共棱的面上的实数的平均数.

若 $\max\limits_{4\le i\le 2022} x_i=M>0$, 考虑到 M 等于与之有公共棱的面上的实数的平均数, 结合 M 最大性可得, 任意与填 M 的面相邻的面上也只能填 M, 由连通性, 可得面 $P_1,\ P_2,\ P_3$ 上也填写 M, 即 $x_1=x_2=x_3=0=M>0$, 矛盾.

若 $\min\limits_{4\le i\le 2022} x_i<0$, 类似可得矛盾. 故 $\min\limits_{4\le i\le 2022} x_i=\max\limits_{4\le i\le 2022} x_i=0$, 有 $x_i=0\ (1\le i\le 2022)$. 于是数组 $t_i'\ (1\le i\le 2022)$ 与数组 $t_i\ (1\le i\le 2022)$ 完全相同, 亦矛盾. 唯一性得证.

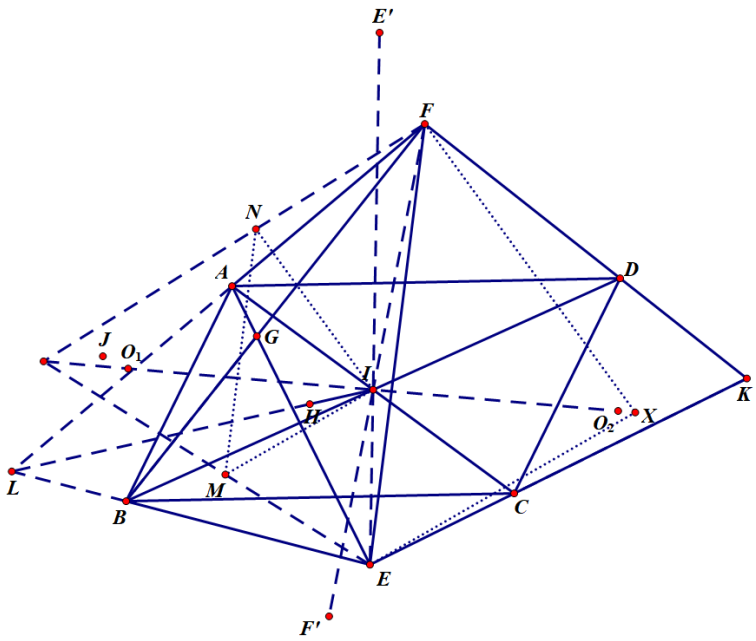
综上, 有且仅有一种填数的方法. □

评注 本题比较新颖. 借助概率方法证明存在性很有意思, 用反证法和极端原理证明唯一性是经典手法.

题 3 平行四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 I. $\triangle ABI$ 内有一点 G, 使得 $\angle IAG = \angle IBG \neq 45^\circ - \frac{\angle AIB}{4}$. 设 E 为 C 在 AG 上的投影, F 为 D 在 BG 上的投影. $\triangle BEF$ 的 E-中线和 $\triangle AEF$ 的 F-中线交于点 H.

(1) 证明: AF, BE, IH 三线共点 (记该点为 L).

(2) CE, DF 相交于点 K, 设 $\odot LAB$, $\odot EIJ$, $\odot FIJ$ 的圆心分别为 J, M, N. 证明: $\odot GAB$, $\odot KCD$ 的连心线和 EM, FN 三线共点.



证明 (1) I 为 $\mathrm{Rt}\triangle AEC$ 中斜边 AC 的中点, 故 $IA = IE$. 同理, $IB = IF$. 又

$$\angle BIF = 180^\circ - 2\angle IBF = 180^\circ - 2\angle IAE = \angle AIE,$$

故

$$\angle AIF = \angle BIE. \qquad ①$$

所以

$$\triangle AIF \cong \triangle EIB. \qquad ②$$

由 $\triangle BEF$ 的 $E-$中线和 $\triangle AEF$ 的 $F-$中线交于 H 得,

$$S_{\triangle BEH} = S_{\triangle FEH} = S_{\triangle AFH}. \qquad ③$$

设 IH 分别交 AF, BE 于点 L_1, L_2, 则

$$\frac{L_1H}{L_1I} = \frac{S_{\triangle AFH}}{S_{\triangle AIF}}, \ \frac{L_2H}{L_2I} = \frac{S_{\triangle BEH}}{S_{\triangle BIE}},$$

结合 ②, ③ 可得 $\frac{L_1H}{L_1I} = \frac{L_2H}{L_2I}$. 故 L_1, L_2 重合, 即 AF, BE, IH 三线共点.

(2) 设 $\odot GAB$, $\odot KCD$ 的半径分别为 R_1, R_2, 记两圆的圆心分别为 O_1, O_2.

由 $\angle AGB = \angle FGE = 180^\circ - \angle DKC$, $AB = DC$ 可得

$$R_1 = \frac{AB}{2\sin\angle AGB} = \frac{DC}{2\sin\angle DKC} = R_2.$$

故 $\triangle AO_1B \cong \triangle CO_2D$, 又 $\triangle AIB \cong \triangle CID$. 故四边形 $AIBO_1 \cong$ 四边形 $CIDO_2$. 显然 I 为这两个四边形的位似中心, 故 I 为 O_1O_2 的中点. ④

又由②可得 $\angle IBE = \angle IFA$, 所以 L, B, I, F 四点共圆.

同理, L, A, I, E 四点共圆.

所以, I 为完全四边形 $FALBEG$ 的密克尔点. ⑤

延长 FI 交 $\odot ALE$ 于 F', 延长 EI 交 $\odot BFL$ 于 E'. 则有

$$\angle IF'E = \angle IAE = \angle IBF = \angle IE'F,$$

所以, F, E', F', E 四点共圆, 于是, $E'I \cdot IE = FI \cdot IF'$. ⑥

故

$$\begin{aligned} FJ^2 - EJ^2 &= F \text{ 到 } \odot J \text{ 的幂} - E \text{ 到 } \odot J \text{ 的幂} \\ &= FA \cdot FL - EB \cdot EL \\ &= FI \cdot FF' - EI \cdot EE' \\ &= FI \cdot (FI + IF') - EI \cdot (EI + IE') \\ &= FI^2 - EI^2. \text{ (用到 ⑥)} \end{aligned}$$

由定差幂线定理的逆定理可得: $IJ \perp EF$.

又 $IJ \perp MN$. (因为 IJ 为 $\odot EIJ$, $\odot FIJ$ 的根轴)

所以 $MN \parallel EF$.

取点 X, 使得 $XF \parallel NI$ 且 $XE \parallel MI$, 则 $\triangle XEF$ 与 $\triangle IMN$ 位似. 所以, FN, EM, XI 三线共点. 结合④可知, 只需证明点 O_1 在 XI 上. ⑦

注意到

$$\begin{aligned} \angle EIF &= 360^\circ - \angle BIF - \angle AIE + \angle AIB \\ &= 360^\circ - 2\left(180^\circ - 2\angle IBG\right) + \angle AIB \\ &= 4\left(\angle IBG + \frac{\angle AIB}{4}\right) \neq 180^\circ, \end{aligned}$$

故 I, E, F 三点不共线.

而 $\angle IFX = \angle NIF = 90^\circ - \angle IJF = \angle JFE$. 同理 $\angle IEX = \angle JEF$. 所以, X, J 为 $\triangle IEF$ 的一对等角共轭点.

于是, 要证明⑦, 只需证明 $\angle JIF = \angle O_1IE$. 结合①可知, 只需证明

$\angle AIJ=\angle BIO_1$. 又 $\angle AIJ+\angle BIJ=\angle AIB=\angle BIO_1+\angle AIO_1$, 故只需证明

$$\frac{\sin\angle AIJ}{\sin\angle BIJ}\cdot\frac{\sin\angle AIO_1}{\sin\angle BIO_1}=1. \qquad ⑧$$

由正弦定理, 得

$$\begin{aligned}\frac{\sin\angle AIJ}{\sin\angle BIJ}\cdot\frac{\sin\angle AIO_1}{\sin\angle BIO_1}&=\frac{\frac{\sin\angle AIJ}{AJ}}{\frac{\sin\angle BIJ}{BJ}}\cdot\frac{\frac{\sin\angle AIO_1}{AO_1}}{\frac{\sin\angle BIO_1}{BO_1}}=\frac{\frac{\sin\angle IAJ}{IJ}}{\frac{\sin\angle IBJ}{IJ}}\cdot\frac{\frac{\sin\angle IAO_1}{IO_1}}{\frac{\sin\angle IBO_1}{IO_1}}\\&=\frac{\sin\angle IAJ\sin\angle IAO_1}{\sin\angle IBJ\sin\angle IBO_1},\end{aligned} \qquad ⑨$$

又

$$\begin{aligned}\angle IAJ+\angle IBO_1&=\angle JAB+\angle O_1BA+\angle BAI+\angle ABI\\&=(90^\circ-\angle ALB)+(\angle AGB-90^\circ)+180^\circ-\angle AIB\\&=(\angle AGB-\angle AIB)-\angle ALB+180^\circ\\&=\angle GAI+\angle GBI-\angle ALI-\angle BLI+180^\circ=180^\circ,\end{aligned}$$

(由⑤知, $\angle ALI=\angle GBI=\angle GAI=\angle BLI$).

同理, $\angle IBJ+\angle IAO_1=180^\circ$. 结合⑨可得, ⑧成立. 证毕. □

评注 本题简洁自然. 第 (1) 问难度不大, 第 (2) 问需要大胆的猜想和细致的观察, 熟练位似、等角共轭等基本的几何模型及三角计算.

题 4 锐角不等边 $\triangle ABC$ 的外心为 O, BC 边的中点为 I. 直线 OI 分别交 AB, AC 于点 E, F. D 为 A 关于 O 的对称点, G 为 A 关于 $\triangle AEF$ 外心的对称点, K 为 O 关于 $\triangle OBC$ 外心的对称点.

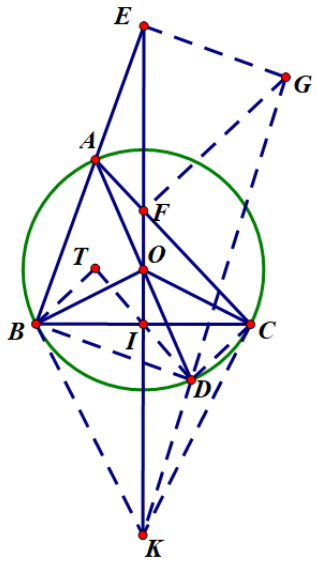
(1) 证明: D, G, K 三点共线.

(2) 设 M, N 分别是 KB, KC 上的点, 满足 $IM\perp AC$, $IN\perp AB$. IK 的垂直平分线交 MN 于点 H, IH 分别交 AB, AC 于点 P, Q. 证明: $\triangle APQ$ 的外接圆与圆 O 的另一个交点 (不同于 A) 在直线 AI 上.

证明 (1) 不妨设 $AB<AC$, 记 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R, 三个内角分别为 A, B, C. OI 为 BC 的中垂线且 K 在 OI 上.

由 $AE\perp BD$, $AF\perp CD$, $EF\perp BC$ 可得 $\triangle AEF\sim\triangle DBC$. 又 G 为 A 关于 $\odot AEF$ 的对径点, A 为 D 关于 $\odot DBC$ 的对径点, 所以 G, A 也是相似对应点. 故四边形 $AEGF\sim$ 四边形 $DBAC$. 两个相似形的 5 组对应边互相垂直, 可得 $AG\perp AD$. 于是,

$$\tan\angle ODG=\frac{AG}{AD}=\frac{AF}{DC}=\frac{AC-FC}{DC}$$



$$
\begin{aligned}
&= \frac{2R\sin B - \frac{R\sin A}{\cos C}}{2R\cos B} \\
&= \frac{\sin(B-C)}{2\cos B\cos C}. \quad ①
\end{aligned}
$$

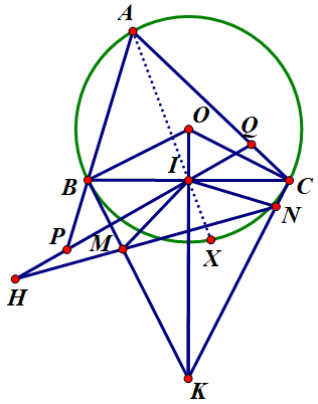
K 为 O 在 $\odot OBC$ 上的对径点, $\therefore \angle OBK = \angle OCK = 90^\circ$. $\therefore OD^2 = OB^2 = OI\cdot OK$. $\therefore \angle ODK = \angle OID = 90^\circ + \angle TIB$. (设 D 关于 I 的对称点为 T, 由熟知结论, T 为 $\triangle ABC$ 的垂心). 于是,

$$
\begin{aligned}
\tan\angle ODK = -\cot TIB &= -\frac{BI - BT\cos\angle TBC}{BT\sin\angle TBC} \\
&= -\frac{\frac{\sin A}{2\cos B} - \sin C}{\cos C} = -\frac{\sin(B-C)}{2\cos B\cos C}.
\end{aligned} \quad ②
$$

由①, ②得, $\angle ODG + \angle ODK = 180^\circ$. 故 D, G, K 三点共线.

(2) 延长 AI 交 $\odot O$ 于点 X, 设 $\triangle IXK$ 的外心为 H', 则 H' 在 AK 的中垂线上, 我们证明 H', M, N 共线. 这只需证明

$$
\frac{\sin\angle IH'M}{\sin\angle KH'M} = \frac{\sin\angle IH'N}{\sin\angle KH'N}. \quad ③
$$



对 $\triangle IH'K$ 及点 M, N, 由角元塞瓦定理得

$$\frac{\sin\angle IH'M}{\sin\angle KH'M}\cdot\frac{\sin\angle H'KM}{\sin\angle MKI}\cdot\frac{\sin\angle KIM}{\sin\angle H'IM}=1 \qquad ④$$

$$\frac{\sin\angle IH'N}{\sin\angle KH'N}\cdot\frac{\sin\angle H'KN}{\sin\angle NKI}\cdot\frac{\sin\angle KIN}{\sin\angle H'IN}=1 \qquad ⑤$$

又 $OI\cdot IK=IB\cdot IC=AI\cdot IX$, 所以 O, K, A, X 共圆.

$\therefore \angle H'IK=\angle H'KI=\angle IXK-90^\circ=\angle AOI-90^\circ=90^\circ-(B-C)$,

于是,

$$\angle NKI=\angle MKI=90^\circ-A,$$

$$\angle H'KM=\angle H'KI-\angle MKI=180^\circ-2B,$$

$$\angle H'KN=2C,\ \angle KIM=C,$$

$$\angle H'IM=90^\circ-B,\ \angle KIN=B,$$

$$\angle H'IN=90^\circ+C.$$

故由④, ⑤可得,

$$\frac{\sin\angle IH'M}{\sin\angle KH'M}=\frac{\sin\angle MKI}{\sin\angle H'KM}\cdot\frac{\sin\angle H'IM}{\sin\angle KIM}=\frac{\cos A}{\sin 2B}\cdot\frac{\cos B}{\sin C}=\frac{\cos A}{2\sin B\sin C}.$$

$$\frac{\sin\angle IH'N}{\sin\angle KH'N}=\frac{\sin\angle NKI}{\sin\angle H'KN}\cdot\frac{\sin\angle H'IN}{\sin\angle KIN}=\frac{\cos A}{\sin 2C}\cdot\frac{\cos C}{\sin B}=\frac{\cos A}{2\sin B\sin C}.$$

所以③式成立. H', M, N 共线. 从而 $H'=H$, H 为 $\triangle IXK$ 的外心.

$\therefore \angle BPQ=B-\angle BIH=B-(90^\circ-\angle HIK)=B-(B-C)=C.$

$\therefore B$, P, C, Q 共圆. $\therefore PI\cdot IQ=BI\cdot IC=AI\cdot IX.$

$\therefore X$ 在 $\odot APQ$ 上.

即 $\triangle APQ$ 的外接圆与圆 O 的另一个交点 X 在直线 AI 上. 证毕. □

评注 本题难度不大, 方法经典. 需要从整体上分析图形的结构并熟练同一法及三角计算.

题 5 对于实数 x, 若存在 $b\in\{2,\ 3,\ \cdots,\ 2022\}$, 使得 x 在 b 进制下可表示为有限小数, 则称 x 为"漂亮数". 证明: 仅存在有限个正整数 n $(n\geq 4)$, 使得对于任意正整数 $m\in\left(\frac{2}{3}n,\ n\right)$, 两数 $\frac{n}{m-n}$, $\frac{n-m}{m}$ 当中至少有一个漂亮数.

证明 我们先证明如下引理.

引理 存在 N_0, 当正整数 $n>N_0$ 时, 必有

$$\frac{\varphi(n)}{3}>2+2^{w(n)}+\left(\frac{\ln n}{\ln 2}+1\right)\left(\frac{\ln n}{\ln 3}+1\right)\cdots\left(\frac{\ln n}{\ln 2022}+1\right).$$

其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数, $w(n)$ 为 n 的素因子的个数.

证明　设 $n=\prod\limits_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i}$ (p_i 为互异的素数, $\alpha_i\in\mathbb{N}_+$). 我们只需证明下面两个命题.

命题 (1): 存在 N_1, 当正整数 $n>N_1$ 时,

$$\frac{\varphi(n)}{6}>2+2^{w(n)}.$$

命题 (2): 存在 $N_2>2022$, 当正整数 $n>N_2$ 时,

$$\frac{\varphi(n)}{6}>\left(\frac{\ln n}{\ln 2}+1\right)\left(\frac{\ln n}{\ln 3}+1\right)\cdots\left(\frac{\ln n}{\ln 2022}+1\right).$$

对于命题 (1), 注意到

$$2+2^{w(n)}=2+2^t\le 2^{t+1},$$

$$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)\ge\prod_{i=1}^{t}\frac{p_i^{\alpha_i}}{2}\ \left(\because p_i-1\ge\frac{p_i}{2}\right).$$

故只需 $\frac{\prod\limits_{i=1}^{t}\frac{p_i^{\alpha_i}}{2}}{6}>2^{t+1}$, 即只需 $\prod\limits_{i=1}^{t}\frac{p_i^{\alpha_i}}{4}>12$.

当 n 足够大时, 上式显然成立, 命题 (1) 得证.

对于命题 (2), 注意到

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\ln n}{\ln 2}+1\right)\left(\frac{\ln n}{\ln 3}+1\right)\cdots\left(\frac{\ln n}{\ln 2022}+1\right)\\&<2^{2021}\cdot\frac{(\ln n)^{2021}}{\ln 2\cdots\ln 2022}\ \left(\because n>N_2>2022\ge i\ge 2\text{ 时},\ \frac{\ln n}{\ln i}+1<2\frac{\ln n}{\ln i}\right)\\&<2^{2021}(\ln n)^{2021},\end{aligned}$$

$$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)\ge\prod_{i=1}^{t}\frac{p_i^{\alpha_i}}{2}=\frac{n}{2^t}.$$

故只需 $\frac{n}{6\cdot 2^t}>2^{2021}(\ln n)^{2021}$, 即只需 $\frac{n}{(\ln n)^{2021}\cdot 2^t}>6\cdot 2^{2021}$.

又 $n\ge p_1\cdots p_t\ge 2\cdot 3^{t-1}$, $\therefore t\le\log_3\left(\frac{3}{2}n\right)$, $\therefore 2^t\le\left(\frac{3}{2}n\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}$,

故只需

$$\frac{n^{1-\frac{\ln 2}{\ln 3}}}{(\ln n)^{2021}}>6\cdot 2^{2021}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

当 n 足够大时, 上式成立 (取自然对数可知, $\frac{n^{1-\frac{\ln 2}{\ln 3}}}{(\ln n)^{2021}}$ 在 n 足够大时递增且无上界), 命题 (2) 得证. 引理证毕.

回到原题.

当 $n>N_0$ 时 (满足引理的 $n>N_0$), 设满足 $m\in\left(\frac{2}{3}n,\ n\right)$ 且 $(m,\ n)=1$ 的 m 的个数为 S. 则

$$S=\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-\left(\left[\frac{\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1}{p_1}\right]+\cdots+\left[\frac{\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1}{p_t}\right]\right)+\sum_{1\le i<j\le t}\left[\frac{\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1}{p_ip_j}\right]-\cdots$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1 - \frac{\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1}{p_1} - \cdots - \frac{\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1}{p_t} + \sum_{1 \leq i < j \leq t} \left(\frac{\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1}{p_i p_j} - 1 \right) - \cdots \\
&\geq \left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_t} \right) - 2^t \\
&\geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_t} \right) - 2^t - 1 \\
&\geq \frac{\varphi(n)}{3} - 2^t - 1 \\
&> 1 + \prod_{i=2}^{2022} (\log_i n + 1) \quad (\text{由引理}) \\
&\geq 1 + \prod_{i=2}^{2022} (1 + [\log_i n]) \\
&= 1 + |\{(x_2, \cdots, x_{2022}) \mid x_i \in \mathbb{N},\ x_i \leq \log_i n\}| .
\end{aligned}
$$

对于 $y \leq n$, 若只有不超过 2022 的素因子, 则可唯一对应 $(\beta_2, \cdots, \beta_{2022})$, 其中 $i^{\beta_i} \mid y$, $i^{\beta_i+1} \nmid y$, $\beta_i \in [0, \log_i n]$. 故可建立集合 $\{y \mid y \leq n,\ y$ 的素因子都不超过 $2022\}$ 到 $\{(x_2, \cdots, x_{2022}) \mid x_i \in \mathbb{N},\ x_i \leq \log_i n\}$ 的单射. 所以

$$
\begin{aligned}
S &> 1 + |\{(x_2, \cdots, x_{2022}) \mid x_i \in \mathbb{N},\ x_i \leq \log_i n\}| \\
&\geq 1 + |\left\{y \mid y \leq n,\ y\text{的素因子都不超过}2022\right\}| .
\end{aligned}
$$

又 $m \in \left(\frac{2}{3}n,\ n\right)$ 时, $n - m \in \left(0,\ \frac{n}{3}\right)$, 由抽屉原理可得, 当 $n > N_0$ 时, 存在 $m \in \left(\frac{2}{3}n,\ n\right)$, $(m,\ n) = 1$ 且 m 与 $n - m$ 均存在大于 2022 的素因子, 于是两数 $\frac{n}{m-n}$, $\frac{n-m}{m}$ 均不是漂亮数. (注意到对 $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, 其中 $p,\ q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1$, x 不为漂亮数的一个充分条件是 q 有大于 2022 的素因子).

综上, 满足条件的 $n \leq N_0$ 个数有限, 命题得证. □

评注 本题的关键是等价转化为当 n 充分大时, 一定能找到满足条件的 m. 不等式估计是常见的手法, 而当 n 充分大时, 放缩时只要注意"级别"即可.

题 6 已知集合 $A \in \{1, 2, \cdots, 4044\}$.甲将其中 2022 个数染成白色, 剩余 2022 个数染成黑色. 对于每个 $i \in A$, 所有小于 i 的白色数与所有大于 i 的黑色数之和称为 i 的"重要数". 求所有可能的正整数 k, 使得存在自然数 m 和一种染色方式, 满足有 k 个数的重要数为 m.

解 若 $a,\ b$ $(1 \leq a < b \leq 4044,\ a,\ b \in \mathbb{N}_+)$ 的重要数均为 m, 且区间 $(a,\ b)$ 中每个数的重要数都不等于 m, 则记 $\Delta = b - a$, 并设 $(a,\ b)$ 中的黑色数之和为 S_1, 白色数之和为 S_2. 我们考虑下面三种情形.

情形 ①: 当 a, b 均为黑色时, 有 $S_2 - S_1 = b$.

若 $\Delta = 1$, 则 $S_1 = S_2 = 0$, 矛盾.

若 $\Delta = 2$, 则 $S_1 = a + 1$, $S_2 = 0$, 或 $S_1 = 0$, $S_2 = a + 1$, 矛盾.

若 $\Delta = 3$, 则 $S_2 - S_1 = \pm 1$, $\pm(2a + 3)$, 有 $S_2 - S_1 \neq b$, 矛盾.

所以, $\Delta \geq 4$, 且若 $\Delta = 4$, 则区间 $(a, b]$ 中的 4 个整数必染为两黑两白 (依次为"黑白白黑").

情形 ②: 当 a, b 均为白色时, 有 $S_1 - S_2 = a$.

类似 ① 可得, $\Delta \neq 1$, 2.

若 $\Delta = 3$, 则 $a = 1$, $b = 4$, 1, 2, 3, 4 依次染为"白白黑白", 1 和 3 的重要数相等, 矛盾.

所以, $\Delta \geq 4$, 且若 $\Delta = 4$, 则区间 $(a,\ b]$ 中的 4 个整数必染为两黑两白 (依次为"黑黑白白").

情形 ③: 当 a 为白色, b 为黑色时, 有 $S_2 - S_1 = b - a$.

若 $\Delta = 1$, 则 $S_1 = S_2 = 0$, 矛盾.

若 $\Delta = 2$, 则 $a = 1$, $b = 3$, 所以 1, 2, 3 依次染为"白白黑".

若 $\Delta = 3$, 则 $S_2 - S_1 = \pm 1$, $\pm(2a + 3)$, 有 $S_2 - S_1 \neq b - a$, 矛盾.

若 $\Delta = 4$, 分类讨论可知区间 $(a,\ b)$ 中的整数染"黑"的恰好 1 个. 可能的情形如下:

- $a = 2$, $b = 6$, 2, 3, 4, 5, 6 依次染为"白白黑白黑";
- $a = 4$, $b = 8$, 4, 5, 6, 7, 8 依次染为"白白白黑黑".

若 $\Delta = 5 = S_2 - S_1$, 可得 $S_2 + S_1 = a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 = 4a + 10$ 为偶数. 这不可能.

若 $\Delta = 6$, 则可知区间 $(a,\ b)$ 中的整数染"黑"的恰好 2 个. 这是因为, 若染"黑"的个数多于 2 个, 则

$$6 = S_2 - S_1 \leq (a + 5) + (a + 4) - (a + 3) - (a + 2) - (a + 1) = 3 - a < 6,$$

矛盾. 若染"黑"的个数少于 2 个, 则

$$6 = S_2 - S_1 \geq (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) - (a + 5) = 3a + 5 > 6,$$

也矛盾. 可能的情形如下:

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 依次染为"白黑白白黑白黑"或"白白黑黑白白黑";
- 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 依次染为"白黑白白白黑黑"或"白白黑白黑白黑";
- 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 依次染为"白白黑白白黑黑"或"白白白黑黑白黑";

• 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 依次染为“白白白黑白黑黑”;

• 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 依次染为“白白白白黑黑黑”.

若 $\Delta = 7 = S_2 - S_1$, 若区间 $(a,\ b)$ 中的整数染“黑”的个数多于 3 个, 则

$$7 = S_2 - S_1 \le (a+6)+(a+5)-(a+1)-(a+2)-(a+3)-(a+4) = 1-2a < 7,$$

矛盾. 若区间 $(a,\ b)$ 中的整数染“黑”的个数少于3 个, 则

$$7 = S_2 - S_1 \ge (a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)-(a+6)-(a+5) = 2a-1,$$

$\Rightarrow a \le 4,\ b \le 11$.

故 $b > 11$ 时, 若 $\Delta = 7$, 区间 $(a,\ b]$ 中的 7 个整数必染为 4 黑 3 白.

我们证明: 所求的 $k \le 1013$.

假设存在自然数 m 和一种染色方式, 满足有 $k\ (k \ge 1014)$ 个数的重要数为 m, 称这 k 个数均为“好数”并设为 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. 设 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ 中“黑段”的长依次为 $x_1,\ x_2,\ \cdots$,“白段”的长依次为 $y_1,\ y_2,\ \cdots$ (记 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ 中连续若干个染黑色的数为“黑段”(至少 1 个, 连续多个相邻数染黑时取完整记为一段), 其中整数的个数为黑段的长, 类似定义“白段”和白段的长). 下面分四类讨论.

(1) a_1 为黑色, a_k 为白色. 则

$$4043 \ge a_k - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_k - a_{k-1}).$$

注意到相邻的两个好数同色, 则 $\Delta \ge 4$ (情形①, ②), 相邻两个好数若依次染为“白黑”, 则 $\Delta = 2,\ 4,\ 6$ 的情形至多各出现一次 (特别地, 第 (1) 类中 $\Delta > 2$) 余下的情形 $\Delta \ge 7$ (情形③), 相邻两个好数若依次染为“黑白”, 则 $\Delta \ge 1$, 故

$$\begin{aligned}
\text{上式} &\ge 4(x_1-1)+1+4(y_1-1)+4+4(x_2-1)+1+4(y_2-1)+6 \\
&\quad +4(x_3-1)+1+4(y_3-1)+7+4(x_4-1)+\cdots+1+4(y_u-1) \\
&= (4x_1+4y_1-7)+(4x_2+4y_2-3)+(4x_3+4y_3-1)+4(x_4+y_4) \\
&\quad +\cdots+4(x_u+y_u) \\
&\ge 4(x_1+y_1+x_2+y_2+\cdots+x_u+y_u)-11 \\
&= 4k-11. \quad (u \le 3 \text{ 时也成立}) \\
&\Rightarrow k \le \left[\frac{4054}{4}\right] = 1013. \text{ 矛盾.}
\end{aligned}$$

(2) a_1 为黑色, a_k 为黑色. 类似 (1) 可得

$$4043 \ge a_k - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_k - a_{k-1})$$

$$
\begin{aligned}
&\geq (4x_1+4y_1-7)+(4x_2+4y_2-3)+(4x_3+4y_3-1)+4(x_4+y_4)\\
&\quad+\cdots+4(x_{u-1}+y_{u-1})+4+(4x_u-1)\\
&\geq 4(x_1+y_1+x_2+y_2+\cdots+x_{u-1}+y_{u-1}+x_u)-8\\
&=4k-8.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow k\leq\left[\frac{4051}{4}\right]=1012$. 矛盾.

(3) a_1 为白色, a_k 为黑色. 类似 (1) 可得

$$
\begin{aligned}
4043\geq a_k-a_1&=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_k-a_{k-1})\\
&\geq 4(y_1-1)+2+4(x_1-1)+1+4(y_2-1)+4+4(x_2-1)\\
&\quad+\cdots+1+4(y_u-1)+7+4(x_u-1)\\
&\geq (4x_1+4y_1-6)+(4x_2+4y_2-3)+(4x_3+4y_3-1)\\
&\quad+4(x_4+y_4)+\cdots+4(x_u+y_u)\\
&\geq 4(x_1+y_1+x_2+y_2+\cdots+x_u+y_u)-10\\
&=4k-10.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow k\leq\left[\frac{4053}{4}\right]=1013$. 矛盾.

(4) a_1 为白色, a_k 为白色. 类似 (1) 可得

$$
\begin{aligned}
4043\geq a_k-a_1&=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_k-a_{k-1})\\
&\geq (4x_1+4y_1-6)+(4x_2+4y_2-3)+(4x_3+4y_3-1)+4(x_4+y_4)\\
&\quad+\cdots+4(x_{u-1}+y_{u-1})+1+4(y_u-1)\\
&\geq 4(x_1+y_1+x_2+y_2+\cdots+x_{u-1}+y_{u-1}+y_u)-13\\
&=4k-13.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow k\leq\left[\frac{4056}{4}\right]=1014$.

而 $k=1014$ 时, 必有 $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=4$, $a_4=8$, $a_5=9$, $a_6=15$, $a_7=16$, $a_l=4044$ (结合③中 $\Delta=2$, 4, 6 的情形可知). 1, 2, $\cdots$, 16 依次染为“白白黑白白白黑黑白白白白黑黑黑白”, 其中白比黑多4 个. $a_8\geq 17>11$, 结合①, ②中 $\Delta=4$ 及③中 $\Delta=7$ 的情形可知,

对于 $i\geq 7$, 若 a_i, a_{i+1} 染为“黑白”, 则 $a_{i+1}-a_i=1$, a_i, a_{i+1} 相邻; 若 a_i, a_{i+1} 染为“白黑”, 则 $a_{i+1}-a_i=7$, 区间 $(a_i,\ a_{i+1}]$ 中的数 3 白 4 黑; 若 a_i, a_{i+1} 染为“白白”或“黑黑”, 则 $a_{i+1}-a_i=4$, 区间 $(a_i,\ a_{i+1}]$ 中的数 2 白 2 黑.

所以, 区间 $(a_7,\ a_k]$ 中黑, 白的个数相等 (注意到 a_7, a_l 均为白, 故区间

$[a_7, a_l]$ 中“a_i, a_{i+1} 黑白对”与“ a_i, a_{i+1}白黑对”个数相等.“黑白”对的情形可以看成区间 $(a_i,\ a_{i+1}]$ 中的数只有 1 个, 为白色), 于是, 区间 [1, 4044] 中的白比黑多 4 个, 矛盾.

综上, $k \le 1013$.

下面我们对 n $(n \ge 4)$ 归纳. 对任意自然数 $k \in [0,\ \left[\frac{n}{2}\right] + 2]$, 存在自然数 m 和一种染色方式, 将 1, 2, $\cdots$, $2n$ 中的 n 个数染白, 另 n 个数染黑, 使得恰有 k 个数的重要数为 m. (重要数的定义相同)

$n = 4$ 时, $0 \le k \le 4$. 若 $k = 4$, 将 1, 2, $\cdots$,8 依次染为“黑白白黑白黑白黑”, 则仅有 1, 2, 6, 7 的重要数均为 18; 若 $k = 3$, 依次染为“黑白白黑白黑黑白”, 则仅有 1, 2, 6 的重要数均为 17; 若 $k = 2$, 依次染为“黑黑黑黑白白白白”, 则仅有 4, 5 的重要数相等且均为 0; 若 $k = 1$ 依次染为“白白白白黑黑黑黑”, 则仅有 4 的重要数为 32; 若 $k = 0$, 取 $m = 10^{100}$, 可随便染. 故 $n = 4$ 时命题成立.

若 $n = 2l$ $(l \ge 2)$ 时命题成立, 考虑 $n = 2l+1$ 时的情形, 对于 $0 \le k \le l+2$, 由归纳假设, 存在自然数 m_0 和一种染色方式, 将 1, 2, $\cdots$, $4l$ 中的 $2l$ 个数染白, 另 $2l$ 个数染黑, 使得恰有 k 个数的重要数为 m_0.

若 $m_0 \ne X - (4l+1)$, (其中 X 为区间 $[1,\ 4l]$ 中的所有白色数之和), 只需染黑 $4l+1$, 染白 $4l+2$, $[1,\ 4l]$ 中的数的染色不变, 则恰有 k 个数的重要数为 $m_0 + 4l + 1$.

若 $m_0 = X - (4l+1)$, 只需染白 $4l+1$, 染黑 $4l+2$, $[1,\ 4l]$ 中的数的染色不变, 则恰有 k 个数的重要数为 $m_0 + 4l + 2$. ($4l+1$ 的重要数为 $m_0 + 8l + 3$, $4l+2$ 的重要数为 $m_0 + 8l + 2$).

所以 $n = 2l + 1$ 时命题成立.

再考虑 $n = 2l + 2$ 时的情形.

对于 $0 \le k \le l + 2$, 类似上面可证命题成立. 对于 $k = l + 3$, 只需将 1, 2, $\cdots$, $4l + 4$ 依次染为“白白黑白 黑黑白白 白黑黑白 $\cdots$ 白黑黑白 白黑黑黑”, 则 1, 3, 4, 8, 9, 13, $\cdots$, $4l + 1$ 的重要数相同, 且与其它数的重要数不相等, 命题也成立.

综上，所求的 k 为所有不超过 1013 的自然数. □

评注 本题的关键是分析猜测出临界值 1013, 证明结论需要细致的分类和大胆的放缩. 另外, Aops 上的英文版试题不知道是否有误, 翻译出来是“对于任意自然数, 求所有可能的正整数, 使得存在一种染色方式, 满足有 k 个数的重要数为 m.”这种情形笔者并没有解决, 有兴趣的同学不妨一试.