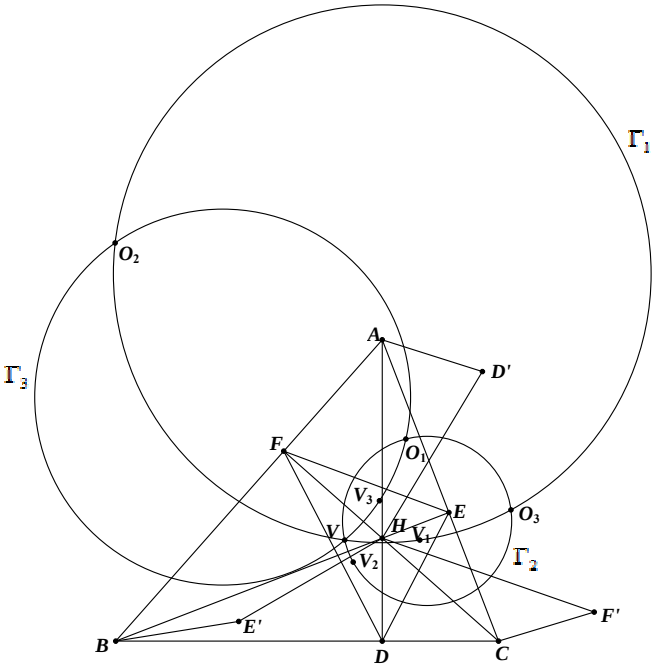
第四十四期问题征解解答与点评

张端阳

第一题 在锐角非等腰 $\triangle ABC$ 中，AD, BE, CF 是高, H 是垂心. D' 是 D 关于 EF 的对称点, O_1 是 $\triangle AD'H$ 的外心, 类似定义点 O_2, O_3. Γ_1 是过 O_2, O_3 且圆心在直线 AD 上的圆, 类似定义圆 Γ_2, Γ_3. 证明: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 交于一点.

(人大附中学生 方大容 占扬 孙家瑞 供题)

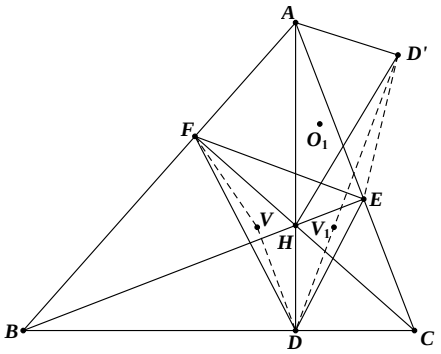
证明 (根据深圳中学邓博文同学的解答整理):



设 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心为 V, 我们证明 V 是 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 的公共点.

设 V 关于 AD, BE, CF 的对称点分别为 V_1, V_2, V_3. 下面依次证明 (1) V_1 在 $\odot O_1$ 上; (2) V_2, V_3, O_1 共线; (3) V, V_1, O_2, O_3 共圆.

(1) 因为 V 是 $\triangle DEF$ 的外心, 且由 HD 平分 $\angle EDF$ 知 V_1D 和 VD 是 $\angle EFD$ 的等角线, 所以 $V_1D \perp EF$, 于是 D, V_1, D' 共线.



易知 $\triangle DVF \sim \triangle DED', \triangle DHF \sim \triangle DEA$, 所以

$$DV_1 \cdot DD' = DV \cdot DD' = DE \cdot DF = DH \cdot DA.$$

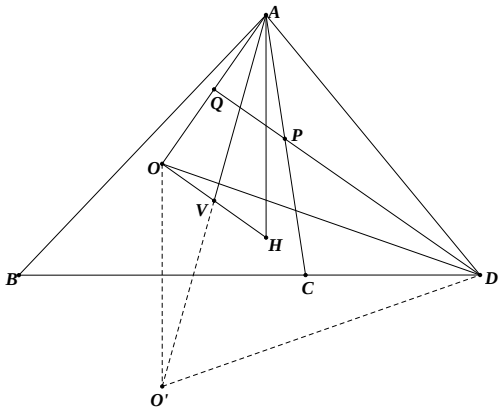
从而 V_1, D', A, H 共圆, 即 V_1 在 $\odot O_1$ 上.

同理, V_2 在 $\odot O_2$ 上, V_3 在 $\odot O_3$ 上.

为了证明 (2),(3), 我们需要一个引理.

引理 在 $\triangle ABC$ 中, O, V, H 分别是外心、九点圆圆心、垂心, R 是外接圆半径. 设 AO 的垂直平分线与直线 BC 交于点 D, 则 $\angle ADO = 2\angle VAH$, 且

$$CD \sin \angle OAH = 2R \sin^2 B - \frac{R}{2}.$$



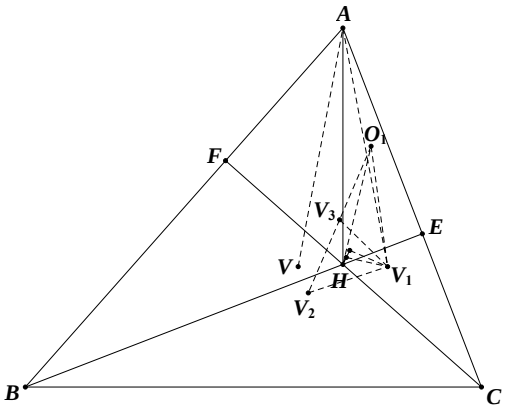
证明 设 O 关于 BC 的对称点是 O', 则 OO' 与 AH 平行且相等, 于是 A, V, O' 共线. 由 $DA = DO = DO'$, 知 $\angle ADO = 2\angle AO'O = 2\angle VAH$.

设 AO 的垂直平分线与 AC, AO 分别交于点 P, Q. 由 $AO \perp DP, AH \perp DC$ 知 $\angle OAH = \angle PDC$, 所以

$$\begin{aligned} CD \sin \angle OAH &= CD \sin \angle PDC = PC \sin \angle CPD \\ &= (AC - AP) \sin \angle APQ \\ &= 2R \sin B \cdot \sin B - AQ \end{aligned}$$

$$= 2R\sin^2 B - \frac{R}{2}.$$

引理证毕.



(2) 由 $HV = HV_1 = HV_2 = HV_3$ 知 V, V_1, V_2, V_3 共圆且 H 是圆心, 所以

$$\begin{aligned}\angle V_2V_1V_3 &= \frac{1}{2}\angle V_2HV_3 = \frac{1}{2}(\angle VHV_2 + \angle VHV_3)\\ &= \angle VHB + \angle VHF = \angle BHF = \angle BAC.\end{aligned}$$

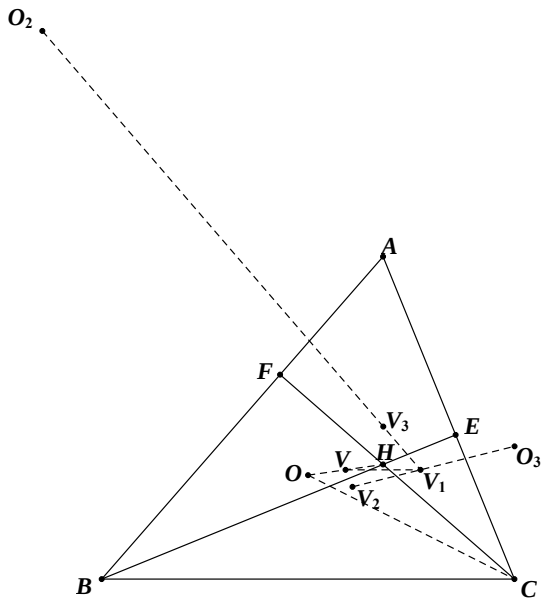
同理 $\angle V_1V_2V_3 = \angle ABC$, 所以 $\triangle V_1V_2V_3 \sim \triangle ABC$.

设 X, Y 分别是 $\triangle V_1V_2V_3$ 的九点圆圆心和垂心(图中未标出), 则由相似, $\angle VAH = \angle XV_1Y$. 这样,

$$\angle V_1O_1H = 2\angle V_1AH = 2\angle VAH = 2\angle XV_1Y.$$

又 O_1 在 V_1H 的垂直平分线上, 所以对 $\triangle V_1V_2V_3$ 用引理得, V_2, V_3, O_1 共线.

同理, V_3, V_1, O_2 和 V_1, V_2, O_3 分别共线.



数学新星网

(3) 由三弦定理逆定理, 只需证明

$$VV_1\sin\angle O_2V_1O_3+O_3V_1\sin\angle O_2V_1V=O_2V_1\sin\angle O_3V_1V,$$

即

$$VV_1\sin\angle V_3V_1V_2+O_3V_1\sin\angle V_3V_1V=O_2V_1\sin\angle V_2V_1V.$$

设 R_1,R_2 分别是 $\triangle ABC,\triangle V_1V_2V_3$ 的外接圆半径, 则 $R_2=VH=\frac{1}{2}OH$.

由 $\angle V_3V_1V=\frac{1}{2}\angle V_3HV=\angle FHO$ 知

$$\sin\angle V_3V_1V=\sin\angle OCH\cdot\frac{OC}{OH}=\sin\angle HV_3Y\cdot\frac{R_1}{2R_2}.$$

又对 $\triangle V_1V_2V_3$ 用引理得

$$O_3V_1\sin\angle HV_3Y=2R_2\sin^2\angle V_1V_2V_3-\frac{R_2}{2}=2R_2\sin^2B-\frac{R_2}{2},$$

所以

$$O_3V_1\sin\angle V_3V_1V=\frac{R_1}{2R_2}\left(2R_2\sin^2B-\frac{R_2}{2}\right)=R_1\left(\sin^2B-\frac{1}{4}\right).$$

同理,

$$O_2V_1\sin\angle V_2V_1V=R_1\left(\sin^2C-\frac{1}{4}\right).$$

又

$$VV_1=2d(V,AH)=d(O,AH)=R_1\sin\angle OAH=R_1\sin(C-B),$$

所以

$$VV_1\sin\angle V_3V_1V_2=R_1\sin(C-B)\sin A=R_1(\sin^2C-\sin^2B).$$

于是只需证明

$$R_1(\sin^2C-\sin^2B)+R_1\left(\sin^2B-\frac{1}{4}\right)=R_1\left(\sin^2C-\frac{1}{4}\right),$$

这显然成立.

最后, 因为 V,V_1,O_2,O_3 所共圆的圆心在 VV_1 的垂直平分线 AH 上, 所以该圆即为 Γ_1, 从而 V 在 Γ_1 上.

同理, V 也在 Γ_2 和 Γ_3 上.

综上, 命题得证. □

评注 (1). 可以证明 O_1,O_2,O_3 共线, V 是完全四边形 $V_1V_2V_3O_1O_2O_3$ 的密克点.

(2). 东北育才学校朱家庆、湖南雅礼中学曾午午等同学也给出了本题的正确解答.

第二题 设 A 是 n 元正整数集合. 证明: 存在 A 的子集 B, 使得 $|B| > \frac{n}{2022}$, 且对任意 $x_1, x_2, \cdots, x_{32} \in B$, 都有 $x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 31x_{31}^2 \neq x_{32}^2$.

(湖南师大附中学生 刘祚旭 供题)

证明 (根据深圳中学姜志诚同学的解答整理):

取素数 p, 使得 p 大于 10^9 以及 A 中所有元素.

设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 对 $1 \leq i \leq p-1$, 记 $A_i = \{ia_1^2, ia_2^2, \cdots, ia_n^2\}$.

称一个正整数是好的, 如果它除以 p 的余数属于区间 $\left(\frac{p}{(31\times16)^2}, \frac{p}{31\times16}\right)$.

对固定的 $1 \leq j \leq n$, 由 $p > a_j$ 知 $a_j^2, 2a_j^2, \cdots, (p-1)a_j^2$ 构成模 p 的缩系, 于是其中有

$$\left[\frac{p}{31\times16}\right] - \left[\frac{p}{(31\times16)^2}\right] + 1 > \frac{p}{500}$$

个好数, 这里用到了 $p > 10^9$.

这样 $A_1, A_2, \cdots, A_{p-1}$ 中至少有 $n \cdot \frac{p}{500}$ 个好数. 由平均值原理, 存在 $1 \leq i \leq p-1$, 使得 A_i 中至少有 $\frac{n}{500}$ 个好数, 不妨设为 $ia_1^2, ia_2^2, \cdots, ia_s^2$, 其中 $s > \frac{n}{500}$.

此时令 $B = \{a_1, a_2, \cdots, a_s\}$, 下面验证其满足要求.

若存在 $x_1, x_2, \cdots, x_{32} \in B$, 使得 $x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 31x_{31}^2 = x_{32}^2$, 则

$$(ix_1^2) + 2(ix_2^2) + \cdots + 31(ix_{31}^2) = ix_{32}^2.$$

模 p 后, 上式左边的余数介于

$$\frac{p}{(31\times16)^2} \times (1 + 2 + \cdots + 31) = \frac{p}{31\times16}$$

与

$$\frac{p}{31\times16} \times (1 + 2 + \cdots + 31) = p$$

之间, 即属于 $\left(\frac{p}{31\times16}, p\right)$. 但右边的余数属于 $\left(\frac{p}{(31\times16)^2}, \frac{p}{31\times16}\right)$, 两者交集是空集, 矛盾!

又 $|B| > \frac{n}{500} > \frac{n}{2022}$, 所以命题得证. □

评注 (1). 本题与如下经典问题的证明方法相同:

设 A 是由 n 个非零整数构成的集合, 则存在 A 的子集 B, 使得 $|B| \geq \frac{n}{3}$, 且不存在 $x, y, z \in B$, 满足 $x + y = z$.

用同样的方法可以证明 2022 年保加利亚春季十一年级第四题:

设整数 $n \geq 2$. M 是由 $2n^2 - 3n + 2$ 个有理数构成的集合. 则存在 M 的 n 元子集 A, 满足对任意 $2 \leq k \leq n$, A 中任意 k 个元素(允许相同)的和都不属于 A.

(2). 湖南雅礼中学李奕同学也给出了本题的正确解答.

第三题 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_k=\max\limits_{i+j=k}\{a_ia_j\}+1, k\geq 2$. 证明: 对任意正整数 n, $a_{2^n}=a_{2^{n-1}}^2+1$.

(北京二中学生 钱泽暄 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):

我们归纳证明更强的结论: 对任意正整数 n,k, 若 $2^{n-1}\leq k\leq 2^{n+1}$, 则

① $a_{2^n+k}=a_{2^n}a_k+1$;

② $a_{2^n+k-1}+a_{2^n+k+1}\geq 2a_{2^n+k}$.

按 2^n+k 从小到大的顺序归纳, 注意到 $\{a_n\}$ 单调递增.

由 $a_1=1,a_2=2,a_3=3,a_4=5,a_5=7,a_6=11,a_7=16$, 容易验证 $n=1$ 时结论成立.

假设 $n\geq 2$, 且 (n,k) 之前结论成立, 来看 (n,k) 时的情形.

先证明 ①.

由定义, 只需证明对任意 $1\leq i\leq 2^n+k-1$, 都有

$$a_{2^n}a_k\geq a_ia_{2^n+k-i}.$$

(I) $2^{n-1}\leq k\leq 2^n$.

不妨设 $i\leq \frac{2^n+k}{2}$, 则 $i\leq 2^n$.

(i) $i\leq k$.

若 $k-i<2^{n-1}$, 则

$$a_{2^n+k-i}=a_{2^{n-1}}a_{2^{n-1}+k-i}+1.$$

又 $a_{2^n}=a_{2^{n-1}}^2+1$, 所以只需证明

$$(a_{2^{n-1}}^2+1)a_k\geq a_i(a_{2^{n-1}}a_{2^{n-1}+k-i}+1).$$

这由 $a_k\geq a_i$ 且

$$a_{2^{n-1}}a_k\geq a_ia_{2^{n-1}+k-i}$$

即证.

若 $k-i\geq 2^{n-1}$, 则

$$a_{2^n+k-i}=a_{2^n}a_{k-i}.$$

所以只需证明

$$a_{2^n}(a_k-1+1)\geq a_i(a_{2^n}a_{k-i}+1).$$

这由 $a_{2^n} \geq a_i$ 且

$$a_k - 1 \geq a_i a_{k-i}$$

即证.

(ii) $i > k$.

由 ②, $a_{2^n} + a_k \geq a_i + a_{2^n+k-i}$, 所以只需证明

$$(a_{2^n} - 1)(a_k - 1) \geq (a_i - 1)(a_{2^n+k-i} - 1).$$

由 $i - k \leq \frac{2^n-k}{2} \leq 2^{n-2}$ 知

$$a_{2^n+k-i} - 1 = a_{2^{n-1}} a_{2^{n-1}+k-i},$$

又 $a_{2^n} - 1 = a_{2^{n-1}}^2$, 所以只需证明

$$a_{2^{n-1}}(a_k - 1) \geq (a_i - 1) a_{2^{n-1}+k-i}.$$

若 $i \geq 2^{n-1} + 2^{n-2}$, 则

$$a_i - 1 = a_{2^{n-1}} a_{i-2^{n-1}},$$

于是只需证明

$$a_k - 1 \geq a_{i-2^{n-1}} a_{2^{n-1}+k-i},$$

这由定义即证.

若 $i < 2^{n-1} + 2^{n-2}$, 则

$$a_i - 1 = a_{2^{n-2}} a_{i-2^{n-2}},$$

$$a_k - 1 = a_{2^{n-2}} a_{k-2^{n-2}},$$

于是只需证明

$$a_{2^{n-1}} a_{k-2^{n-2}} \geq a_{i-2^{n-2}} a_{2^{n-1}+k-i},$$

这由归纳假设即证.

(II) $2^n < k \leq 2^{n+1}$

不妨设 $i \geq \frac{2^n+k}{2}$, 则 $i > 2^n$.

(i) $i > k$.

若 $i \leq 2^n + 2^{n-1}$, 则

$$a_i = a_{2^{n-1}} a_{i-2^{n-1}} + 1,$$

$$a_k = a_{2^{n-1}} a_{k-2^{n-1}} + 1,$$

数学新星网

于是只需证明

$$a_{2^n}(a_{2^{n-1}}a_{k-2^{n-1}}+1) \geq (a_{2^{n-1}}a_{i-2^{n-1}}+1)a_{2^n+k-i}.$$

这由 $a_{2^n} \geq a_{2^n+k-i}$ 且

$$a_{2^n}a_{k-2^{n-1}} \geq a_{i-2^{n-1}}a_{2^n+k-i}$$

即证.

若 $i > 2^n + 2^{n-1}$, 则

$$a_i = a_{2^n}a_{i-2^n} + 1,$$

于是只需证明

$$a_{2^n}(a_k - 1 + 1) \geq (a_{2^n}a_{i-2^n} + 1)a_{2^n+k-i}.$$

这由 $a_{2^n} \geq a_{2^n+k-i}$ 且

$$a_k - 1 \geq a_{i-2^n}a_{2^n+k-i}$$

即证.

(ii) $i \leq k$.

由 ②, $a_{2^n} + a_k \geq a_i + a_{2^n+k-i}$, 所以只需证明

$$(a_{2^n} - 1)(a_k - 1) \geq (a_i - 1)(a_{2^n+k-i} - 1).$$

由 $k - i \leq \frac{k-2^n}{2} \leq 2^{n-1}$ 知

$$a_{2^n+k-i} - 1 = a_{2^{n-1}}a_{2^{n-1}+k-i},$$

又 $a_{2^n} - 1 = a_{2^{n-1}}^2$, 所以只需证明

$$a_{2^{n-1}}(a_k - 1) \geq (a_i - 1)a_{2^{n-1}+k-i}.$$

若 $i \geq 2^n + 2^{n-1}$, 则

$$a_i - 1 = a_{2^n}a_{i-2^n},$$

$$a_k - 1 = a_{2^n}a_{k-2^n},$$

于是只需证明

$$a_{2^{n-1}}a_{k-2^n} \geq a_{i-2^n}a_{2^{n-1}+k-i},$$

这由归纳假设即证.

若 $i < 2^n + 2^{n-1}$, 则

$$a_i - 1 = a_{2^{n-1}}a_{i-2^{n-1}},$$

于是只需证明

$$a_k - 1 \geq a_{i-2^{n-1}} a_{2^{n-1}+k-i},$$

这由定义即证.

再证明 ②.

因为

$$a_{2^n+k-1} \geq a_{2^n} a_{k-1} + 1,$$

$$a_{2^n+k+1} \geq a_{2^n} a_{k+1} + 1,$$

$$a_{2^n+k} = a_{2^n} a_k + 1,$$

所以由归纳假设,

$$\begin{aligned} & a_{2^n+k-1} + a_{2^n+k+1} - 2a_{2^n+k} \\ \geq & a_{2^n}(a_{k-1} + a_{k+1} - 2a_k) \geq 0. \end{aligned}$$

综上, 归纳得证. □

评注 湖南雅礼中学曾午午、温州育英国际实验学校王玺皓、广西师范大学附属外国语学校铁山校区叶骐铭等同学也给出了本题的正确解答.

第四题 给定整数 $n \geq 2$. 设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in [0, 1)$, 若对任意不超过 k 的正整数 i, 在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中都存在若干项之和等于 i, 求正整数 k 的最大可能值.

(人大附中 张端阳 供题)

解 1 (根据湖南雅礼中学曾午午同学的解答整理):

由 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < n$ 知 $k \leq n - 1$.

当 $n \geq 3$ 时, 不妨设 $a_1 + \cdots + a_s = 1$, 其中 $2 \leq s \leq n$. 若 $s = n$, 则 $k = 1$; 若 $s < n$, 则

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ = & (a_1 + \cdots + a_s) + a_{s+1} + \cdots + a_n \\ < & 1 + n - s \leq n - 1, \end{aligned}$$

所以 $k \leq n - 2$.

故当 $n = 2$ 时 $k \leq 1$, 当 $n \geq 3$ 时 $k \leq n - 2$.

下面给出构造.

当 $n = 2$ 时, 取 $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ 即可.

当 $n \geq 3$ 时, 记 $b_i = 1 - a_i \in (0,1]$, 那么若 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq n$ 使 $b_{i_1} + b_{i_2} + \cdots + b_{i_t} = 1$, 则 $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_t} = t - 1$. 从而只需使得对任意 $2 \leq t \leq n-1$, 存在 t 个 b_i 的和为 1.

记 $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 则 $\alpha^2 + \alpha = 1, 0 < \alpha < 1$.

当 $n = 2m(m \geq 2)$ 时, 取 $b_k = \alpha^k (k = 1, 2, \cdots, 2m-2), b_{2m-1} = b_{2m} = \frac{1}{2}\alpha^{2m-3}$. 此时对 $1 \leq t \leq m-1$,

$$\begin{aligned}
&b_{2t} + b_{2t-1} + b_{2t-3} + b_{2t-5} + \cdots + b_1 \\
=& b_{2t-2} + b_{2t-3} + b_{2t-5} + \cdots + b_1 \\
=& \cdots \\
=& b_2 + b_1 = 1,
\end{aligned}$$

即存在 $t+1$ 个 b_i 的和为 1. 又由

$$\begin{aligned}
&\alpha^{2m-2} + \alpha^{2m-3} + \cdots + \alpha^{2t} \\
=& \frac{\alpha^{2t} - \alpha^{2m-1}}{1-\alpha} = \frac{\alpha^{2t} - \alpha^{2m-1}}{\alpha^2} \\
=& \alpha^{2t-2} - \alpha^{2m-3},
\end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned}
&b_{2m} + b_{2m-1} + b_{2m-2} + \cdots + b_{2t} + b_{2t-3} + b_{2t-5} + \cdots + b_1 \\
=& b_{2t-2} + b_{2t-3} + b_{2t-5} + \cdots + b_1 = 1,
\end{aligned}$$

即存在 $2m-t$ 个 b_i 的和为 1. 于是对任意 $2 \leq t \leq 2m-1$, 存在 t 个 b_i 的和为 1, 满足条件.

当 $n = 2m-1(m \geq 2)$ 时, 取 $b_k = \alpha^k (k = 1, 2, \cdots, 2m-2), b_{2m-1} = \alpha^{2m-3}$. 同上一种情形知

$$\begin{aligned}
&b_{2t} + b_{2t-1} + b_{2t-3} + \cdots + b_1 \\
=& b_{2m-1} + b_{2m-2} + \cdots + b_{2t} + b_{2t-3} + b_{2t-5} + \cdots + b_1 = 1.
\end{aligned}$$

于是对任意 $2 \leq t \leq 2m-2$, 存在 t 个 b_i 的和为 1, 满足条件.

综上, 所求最大值当 $n = 2$ 时为 1, 当 $n \geq 3$ 时为 $n-2$. □

解 2 (根据温州育英国际实验学校王玺皓同学的解答整理):

只给出当 $n \geq 3$ 时的构造.

当 $n = 2m(m \geq 2)$ 时, 取 $a_{2i-1} = a_{2i} = 1 - \frac{1}{2^i}(i = 1, 2, \cdots, m-1), a_{2m-1} = a_{2m} = 1 - \frac{1}{2^{m-1}}$. 注意到总和为 $2m-2$, 于是只需给出和为 $1, 2, \cdots, m-1$ 的构造即可.(若能构造出 t, 则余下的数之和即为 $2m-2-t$)

事实上, 对 $1 \le t \le m-1$,

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2t-1} + a_{2t} = t.$$

当 $n = 2m-1 (m \ge 2)$ 时, 取 $a_{2i-1} = a_{2i} = 1 - \frac{1}{2^i} (i = 1, 2, \cdots, m-1), a_{2m-1} = 1 - \frac{1}{2^{m-2}}$. 验证同上一种情形. □

解 3 (根据深圳中学姜志城同学的解答整理):

只给出当 $n \ge 3$ 时的构造.

对 $n = 2m+1$ 和 $2m+2$, 记 $\varepsilon = \frac{1}{1+2+\cdots+m+1}$. 取前 $2m$ 个数为

$$m\varepsilon, \underbrace{1-\varepsilon, \cdots, 1-\varepsilon}_{m个}, 1-2\varepsilon, 1-3\varepsilon, \cdots, 1-m\varepsilon.$$

当 $n = 2m+1$ 时, 取最后一个数为 $(2+3+\cdots+m)\varepsilon$; 当 $n = 2m+2$ 时, 取最后两个数为 $(1+2+\cdots+m)\varepsilon$ 和 $1-\varepsilon$.

注意到总和为 $n-2$, 于是只需给出和为 $1, 2, \cdots, m$ 的构造即可.(若能构造出 t, 则余下的数之和即为 $n-2-t$)

事实上, 对 $1 \le t \le m$,

$$t = m\varepsilon + \underbrace{(1-\varepsilon) + \cdots + (1-\varepsilon)}_{t-1个} + (1-(m-t+1)\varepsilon),$$

满足要求. □

评注 东北师大附中刘涛、人大附中孙牧聪等同学也给出了本题的正确解答.