一道伊朗不等式的最佳上界

廖昱博

(中国人民大学附属中学, 100080)

指导教师: 张端阳

1999 年伊朗第三轮有如下不等式问题:

问题 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [-1, 1]$, 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. 求证:
(1) 存在 $\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得对任意 $1 \le i \le j \le n$, 均有

$$|x_{\sigma(i)} + x_{\sigma(i+1)} + \cdots + x_{\sigma(j)}| < 2 - \frac{1}{n}.$$

(2) (1) 中的上界不能改为 $2 - \frac{4}{n}$.

这道题形式简洁自然, 放在今天仍有一定的难度. 本文给出最佳的上界, 即

定理 给定正整数 n. 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [-1, 1]$, 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n = 0$. 若存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个排列 $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 满足对任意 $1 \le i \le j \le n$, 均有 $|y_i + y_{i+1} + \cdots + y_j| \le \lambda$, 则 λ 的最小值为 λ_n, 其中

$$\lambda_n = \begin{cases} 2 - \frac{4}{n+1}, & n \text{ 是奇数}, \\ 2 - \frac{4}{n}, & n \text{ 是大于 2 的偶数}, \\ 1, & n = 2. \end{cases}$$

证明 当 $n = 1$ 时, 显然 λ 的最小值为 0.

当 $n = 2$ 时, 显然 $\lambda = 1$ 时不等式成立. 又当 $x_1 = -1, x_2 = 1$ 时, $\lambda \ge 1$, 所以 λ 的最小值为 1.

下设 $n \ge 3$.

(一) 构造.

当 n 是奇数时, 取 $\frac{n-1}{2}$ 个 1、$\frac{n+1}{2}$ 个 $-\frac{n-1}{n+1}$. 则要么存在 $i(1 \le i \le n-1)$

修订日期: **2022-05-25.**

使 $y_i=y_{i+1}=-\frac{n-1}{n+1}$ (此时 $|y_i+y_{i+1}|=2-\frac{4}{n+1}$), 要么 $y_1=y_n=-\frac{n-1}{n+1}$ (此时 $|y_2+\cdots+y_{n-1}|=2-\frac{4}{n+1}$).

当 n 是偶数时, 取 $\frac{n-2}{2}$ 个 1、$\frac{n}{2}$ 个 $-\frac{n-2}{n}$ 和 1 个 0. 则忽略这个 0 时与 n 是奇数时相同, 添回 0 后不改变相邻若干项的和.

（二）证明.

对 n 归纳.

当 $n=1,2$ 时已证. 假设 $n-1$ 时成立, 来看 n 时的情形.

(1) 若存在 $x_i\geq 0, x_j<0$, 使得 $x_i-x_j\leq\lambda_n$, 则将 x_i 与 x_j 合并为 x_i+x_j. 由归纳假设（这时 $x_i+x_j\in[-1,1]$）, 得到排列 $z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$, 满足对任意 $1\leq u\leq v\leq n-1$, 有 $|z_u+\cdots+z_v|\leq\lambda_{n-1}\leq\lambda_n$.

记 $S_w=z_1+\cdots+z_w$, 其中 $S_0=0$. 则对任意 $0\leq u\leq v\leq n-1$, 有 $|S_v-S_u|\leq\lambda_n$, 于是 $S_0,\cdots,S_{n-1}$ 包含在一段长为 λ_n 的区间 I 中.

设 $z_k=x_i+x_j$, 考察如下两个排列:

$$z_1,\cdots,z_{k-1},x_i,x_j,z_{k+1},\cdots,z_n;$$

$$z_1,\cdots,z_{k-1},x_j,x_i,z_{k+1},\cdots,z_n.$$

前者对应的部分和为

$$S_0,S_1,\cdots,S_{k-1},S_{k-1}+x_i,S_k,S_{k+1},\cdots,S_{n-1};$$

后者对应的部分和为

$$S_0,S_1,\cdots,S_{k-1},S_{k-1}+x_j,S_k,S_{k+1},\cdots,S_{n-1}.$$

因为 $x_i\geq 0, x_j<0, x_i-x_j\leq\lambda_n$、$I$ 的长度为 λ_n 且 $S_{k-1}\in I$, 所以 $S_{k-1}+x_i, S_{k-1}+x_j$ 中必有一个属于 I, 对应的排列合题.

(2) 若对任意 $x_i\geq 0, x_j<0$ 均有 $x_i-x_j>\lambda_n$.

(i) 若 n 是偶数, 记 $n=2m$, 则 $m\geq 2$, $\lambda_n=2-\frac{2}{m}$.

对任意 $x_i\geq 0, x_j<0$, 由 $x_i-x_j>\lambda_n$ 知

$$x_i>\lambda_n-1=1-\frac{2}{m},\quad x_j<1-\lambda_n=-1+\frac{2}{m},$$

进而 $-\frac{2}{m}<x_i+x_j<\frac{2}{m}$.

由对称性, 不妨设 $x_1,\cdots,x_n$ 中正数的个数 $t\geq m$.

情形 1: 若 $t\geq m+2$, 则

$$0=x_1+\cdots+x_n>(m+2)\left(1-\frac{2}{m}\right)+(m-2)(-1)=2-\frac{4}{m},$$

矛盾!

情形 2: 若 $t=m+1$, 考虑如下排列:

$$\underbrace{\text{正负}\cdots\text{正负}}_{\lceil\frac{m-1}{2}\rceil\text{对}}\text{正正}\underbrace{\text{负正}\cdots\text{负正}}_{\lceil\frac{m-1}{2}\rceil\text{对}}.$$

对于任意一个连续段, 设其中有 a 个正数、b 个负数, 则 $a-b\in\{-1,0,1,2\}$.

若 $a-b=-1$, 则只能在前一半或后一半, 于是 $a\le\lceil\frac{m-1}{2}\rceil-1\le\frac{m-2}{2}$. 所以

$$|\text{和}|\le|a\text{ 个“正负对”之和}|+|\text{一个负数}|\le\frac{m-2}{2}\cdot\frac{2}{m}+1=2-\frac{2}{m}.$$

若 $a-b=0$, 则因为 $b\le m-1$, 所以

$$|\text{和}|=|b\text{ 个“正负对”之和}|\le(m-1)\cdot\frac{2}{m}=2-\frac{2}{m}.$$

若 $a-b=1$, 则因为 $b\le m-1$, 所以

$$\text{和}\ge b\text{ 个“正负对”之和}\ge(m-1)\left(-\frac{2}{m}\right)=-2+\frac{2}{m}.$$

注意到该连续段的补中正数也比负数多 1 个, 所以同理可知其和也不小于 $-2+\frac{2}{m}$, 故该连续段的和不大于 $2-\frac{2}{m}$.

若 $a-b=2$, 则将 $a-b=0$ 时的情形取补即可.

综上, 情形 2 证毕.

情形 3: 若 $t=m$, 考虑如下排列:

$$\underbrace{\text{正负正负}\ \cdots\ \text{正负}}_{m\text{对}}.$$

对于任意一个连续段, 设其中有 a 个正数、b 个负数, 则 $a-b\in\{-1,0,1\}$.

若 $a-b=0$, 当 $a=m$ 时, 和 $=0$；当 $a\le m-1$ 时,

$$|\text{和}|=|a\text{ 个“正负对”之和}|\le(m-1)\cdot\frac{2}{m}=2-\frac{2}{m}.$$

若 $a-b=\pm1$, 则考虑取补知可不妨设 $\min\{a,b\}\le\frac{m-1}{2}$. 再不妨设 $a-b=1$, 则 $b\le\frac{m-1}{2}$.

若 $b\le\frac{m-2}{2}$, 则

$$|\text{和}|\le|b\text{ 个“正负对”之和}|+|\text{一个正数}|\le\frac{m-2}{2}\cdot\frac{2}{m}+1=2-\frac{2}{m}.$$

若 $b=\frac{m-1}{2}$, 则

$$\begin{aligned}|\text{和}|=&\frac{1}{2}|\text{和}-\text{补的和}|\\=&\frac{1}{2}\left|\frac{m+1}{2}\text{ 个“正减负”}\ +\frac{m-1}{2}\text{ 个“负减正”}\right|\\\le&\frac{1}{2}\left|\frac{m+1}{2}\cdot2-\frac{m-1}{2}\left(2-\frac{2}{m}\right)\right|\\=&\frac{3}{2}-\frac{1}{2m}\le2-\frac{2}{m},\end{aligned}$$

其中最后一步是因为此时 m 是奇数.

综上, 情形 3 证毕.

(ii) 若 n 是奇数, 记 $n=2m+1$, 则 $\lambda_n=2-\frac{2}{m+1}$.

由 $x_i-x_j>\lambda_n$ 知

$$x_i>\lambda_n-1=1-\frac{2}{m+1},\quad x_j<1-\lambda_n=-1+\frac{2}{m+1},$$

进而 $-\frac{2}{m+1}<x_i+x_j<\frac{2}{m+1}$.

由对称性, 不妨设 $x_1,\cdots,x_n$ 中正数的个数 $t\geq m+1$.

若 $t\geq m+2$, 则

$$0=x_1+\cdots+x_n>(m+2)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)+(m-1)(-1)=1-\frac{2}{m+1},$$

矛盾! 因此 $t=m+1$.

考虑如下排列:

$$\underbrace{\text{正负正负}\cdots\text{正负}}_{m\text{对}}\text{正},$$

记为 $y_1,y_2,\cdots,y_{2m+1}$, 其中

$$y_1\leq y_3\leq\cdots\leq y_{2[\frac{m}{2}]+1},\quad y_{2m+1-2[\frac{m}{2}]}\geq y_{2m+3-2[\frac{m}{2}]}\geq\cdots\geq y_{2m+1},$$

$$y_2\leq y_4\leq\cdots\leq y_{2[\frac{m}{2}]},\quad y_{2m+2-2[\frac{m}{2}]}\geq y_{2m+4-2[\frac{m}{2}]}\geq\cdots\geq y_{2m},$$

且 y_1,y_{2m+1} 是最小的两个正数.

考虑和的绝对值最大的一个连续段 (如有多个, 取最短的一个), 设为 $y_i,y_{i+1},\cdots,y_j$. 设其中有 a 个正数、b 个负数, 则 $a-b\in\{-1,0,1\}$.

若 $a-b=0$, 则因为 $b\leq m$, 所以

$$|\text{和}|=|b\text{ 个“正负对”之和}|\leq m\cdot\frac{2}{m+1}=2-\frac{2}{m+1}.$$

若 $a-b=1$, 则将 $a-b=0$ 时的情形取补即可.

若 $a-b=-1$ 且 $a\leq\frac{m-1}{2}$, 则

$$|\text{和}|\leq|a\text{ 个“正负对”之和}|+|\text{一个负数}|\leq\frac{m-1}{2}\cdot\frac{2}{m+1}+1=2-\frac{2}{m+1}.$$

若 $a-b=-1$ 且 $a\geq\frac{m}{2}$, 则 $j-i+1=a+b\geq m+1$, 于是 $j-i\geq m$. 由 $a-b=-1$ 及排列的取法知 i,j 均为偶数, 于是 $j\leq 2m$, 进而 $i\leq j-m\leq m$, 再由 i 是偶数知 $i\leq 2[\frac{m}{2}]$.

记 $y_i+y_{i+1}+\cdots+y_j=S$.

若 $S\geq 0$, 则 $y_{i+1}+\cdots+y_j>S$, 与 $|S|$ 最大矛盾!

故 $S<0$, 由 $|S|$ 最大且最短知 $y_{i+2}+\cdots+y_j>S$, 于是 $y_i+y_{i+1}<0$. 若

$i \geq 4$, 则还有 $y_{i-2}+\cdots+y_j \geq S$, 于是 $y_{i-2}+y_{i-1} \geq 0$. 这与 $y_{i-2} \leq y_i, y_{i-1} \leq y_{i+1}$ 矛盾! 其中用到 $i \leq 2[\frac{m}{2}]$. 故 $i=2$, 同理 $j=2m$. 于是

$$\begin{aligned}-S =& y_1+y_{2m+1} \leq \frac{2}{m+1} \cdot \text{所有正数之和} \\ &= -\frac{2}{m+1} \cdot \text{所有负数之和} \\ &\leq -\frac{2}{m+1} \cdot (-m) = 2-\frac{2}{m+1}.\end{aligned}$$

综上, 完成证明. □