数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

2022 年全俄数学竞赛决赛试题解析

孙启傲
(上海市上海中学, 200231)
指导教师: 王广廷

俄罗斯的数学竞赛比赛类型众多, 不仅有各级别的区域赛, 也有专项的竞赛, 比如沙雷金几何竞赛等. 虽然比赛众多, 但是竞赛题的质量却一直保持很高的水准. 全俄数学竞赛相当于我们国家的冬令营考试, 每年的题目都颇受关注, 并且会有非常困难的问题出现. 本文给出 2022 年全俄数学竞赛的问题解答与评析.

I. 试 题

1 九年级

9.1 称合数 n 的"主要约数"为 n 除自身外最大的两个正整数约数. 合数 a 和 b 的主要约数相同. 证明 $a=b$.

9.2 $\triangle ABC$ 的角平分线交于 I, $\angle B$ 和 $\angle C$的外角平分线交于点 J. 圆 ω_b 的圆心为 O_b, 经过点 B, 与直线 CI 切于点 I. 圆 ω_c 的圆心为 O_c, 经过点 C, 与直线 BI 切于点 I. O_bO_c 与 IJ 交于 K. 求比值 $\frac{IK}{KJ}$.

9.3 将 200 个正整数写成一行. 对于任意两个相邻的数, 右边的要么是左边的 9 倍, 要么是左边的一半. 所有 200 个数之和能否等于 24^{2022}?

9.4 班级有 18 名学生. 家长决定给班上的学生蛋糕. 为了做到这点, 他们先确定了每名学生想要的蛋糕面积. 然后他们订制了面积恰好等于 18 名学生所要求的之和的正方形蛋糕. 但是, 学生们看到蛋糕之后, 希望自己的那块蛋糕也是正方形的. 家长们可以沿着与边平行的线切蛋糕 (切的起点和终点可以不在蛋糕的边上). 对什么样的最大的 k, 家长们可以保证能够从订制的蛋糕中切出

修订日期: **2022-05-09.**

k 块正方形的部分, 可以分给 k 名学生, 使得每人得到想要的?

9.5 给定无穷数列 $a_1, a_2, \cdots$, 其中没有两项相等. 数列的片段 $a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{i+m-1}$ 称为长度为 m 的"单调片段", 如果满足不等式 $a_i < a_{i+1} < \cdots < a_{i+m-1}$ 或 $a_i > a_{i+1} > \cdots > a_{i+m-1}$. 我们有对每个正整数 k, a_k 这项包含在某个长度为 $k+1$ 的单调片段内. 证明存在正整数 N 使得数列 $a_N, a_{N+1}, \cdots$ 是单调的, 亦即 $a_N < a_{N+1} < \cdots$ 或 $a_N > a_{N+1} > \cdots$.

9.6 对什么样的最小的正整数 a, 存在整数 b 和 c, 使得二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 有两个不超过 $\frac{1}{1000}$ 的不同正根?

9.7 国家里有 998 个城市. 有些城市对由双向航线连接. 法律规定任何一对城市之间不能超过一条航线. 另一条法律规定, 对于任意由 k 个城市组成的组, 它们之中不超过 $5k + 10$ 条航线. 当前法律是得到执行的. 证明发展部可以增加若干条新航线, 使得法律保持得到执行的状态, 而国家里的总航线数变成 5000.

9.8 $\triangle ABC$ 的内切圆 ω 与边 BC 切于点 K. 圆 ω_0 与圆 ω 关于点 A 对称. 选取点 A_0 使得线段 BA_0 和 CA_0 与圆 ω_0 相切. 设 M 为边 BC 的中点. 证明: 直线 AM 平分线段 KA_0.

2 十年级

10.1 同 9.1.

10.2 在锐角 $\triangle ABC$ 的边 BC 上取点 D 和 E 使得 $BD = CE$. 在 $\triangle ADE$ 的外接圆上不含点 A 的弧 $\widehat{DE}$ 上取点 P 和 Q 使得 $AB = PC, AC = BQ$. 证明: $AP = AQ$.

10.3 黑板上一开始写着数对 $(1, 1)$. 如果对某个 x 和 y, 黑板上写有数对 $(x, y-1)$ 和 $(x+y, y+1)$ 之一, 就可以写另一个. 类似地, 如果黑板上写有 (x, xy) 和 $(\frac{1}{x}, y)$ 之一, 可以写另一个. 证明: 每个写出的数对中的第一个数都是正数.

10.4 给定正整数 $n > 4$. 在平面上标出 n 个点, 其中没有三个点共线. 瓦西里逐一画出以标出的点为端点的所有线段. 每画出一条线段时, 瓦西里将其赋值为与其有公共端点的线段中尚未赋值的最小正整数. 对什么样的最大的 k, 瓦西里可以设法给一条线段赋值 k?

10.5 黑板上写有 11 个整数 (不一定不同). 能否使得其中任意 5 个的乘积

大于其余 6 个的乘积?

10.6 给定正整数 $n>5$. 在环形纸带上写有由 0 和 1 组成的序列. 对每个由 0 和 1 组成的长度为 n 的序列 w, 计算能够从纸带上剪出一段写有 w 的片段的方法数. 我们有序列 $11\underbrace{00\cdots0}_{n-2}$ 出现的次数最多, 为 M 次; 而序列 $\underbrace{00\cdots0}_{n-2}11$ 出现的次数最少 (可能为 0 次). 证明: 存在另一个 0 和 1 组成的长度为 n 的序列出现恰好 M 次.

10.7 在平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 上取点 E, 在边 AD 上取点 F, 使得 $\triangle ABE$ 的外接圆与线段 CF 相切. 证明: $\triangle CDF$ 的外接圆与直线 AE 相切.

10.8 对正整数 N, 考虑所有从其十进制表示中删去一位后能够得到的所有不同的完全平方数. 证明: 当 N 取所有正整数时, 这些数的数目有上限.

3 十一年级

11.1 同 9.1.

11.2 平面上画有函数 $y=\sin x$ 和 $y=\tan x$ 的图象, 以及坐标轴. 怎样使用尺规作图画出一条直线, 它与正弦函数的图象在横轴 (Ox) 的上方和下方均相切 (可能还有若干个交点)?

11.3 锐角 $\triangle ABC$ 固定在平面上, 最长边为 BC. 设 PQ 为其外接圆的任意一条直径, 其中 P 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上, Q 在劣弧 $\overset{\frown}{AC}$ 上. 点 X, Y, Z 分别为 P 到直线 AB, Q 到直线 AC, A 到直线 PQ 的垂足. 证明: $\triangle XYZ$ 的外心位于定圆上 (不依赖于点 P 和 Q 的选取).

11.4 同 10.4.

11.5 同 10.5.

11.6 给定正整数 n. 萨沙说对空间中任意 n 条两两无公共点的射线, 他可以在这些射线上标出 k 个点位于同一球面上. 使得他的命题成立的最大 k 是多少?

11.7 同 10.8.

11.8 对 $\triangle ABC$ 的每个顶点, 向内部画出一红一蓝两条射线, 关于对应角的平分线对称. 画出每个由相同颜色射线围成的三角形的外接圆. 证明: 如果 $\triangle ABC$ 的外接圆与其中的一个圆相切, 则也和另一个圆相切.

II. 解答与评注

1 九年级

9.1 称合数 n 的"主要约数"为 n 除自身外最大的两个正整数约数. 合数 a 和 b 的主要约数相同. 证明 $a=b$.

证明 即证明对任一二元数对 (x,y), 其中 $x<y$ 是正整数, 可以确定至多一个合数 n 使得 n 的"主要约数"为 x,y.

注意到 n 除了自身外最大约数为 $\frac{n}{p}$, 其中 p 为 n 的最小素因子.

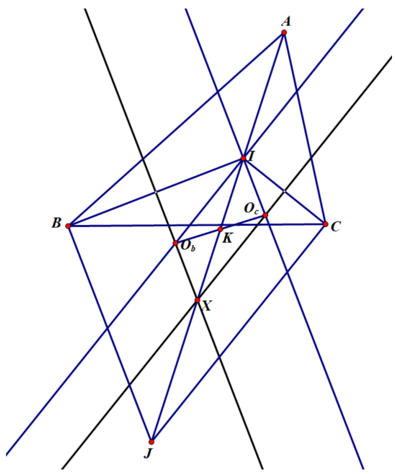
第二大的约数要么是 $\frac{n}{p^2}$, 其中 p 为 n 的最小素因子 (前提是 $p^2\mid n$); 要么是 $\frac{n}{q}$, 其中 q 为 n 的第二小的素因子 (前提是n 有两个不同素因子).

所以: 若 $x\mid y$, 说明是第一种情况; 否则是第二种情况.

前者说明 $n=\frac{y^2}{x}$, 后者说明 $n=lcm(x,y)$. 故 n 最多一个. 得证. $\square$

评注 本题是一道简单的数论题, 注意讨论两种情况.

9.2 $\triangle ABC$ 的角平分线交于 I, $\angle B$ 和 $\angle C$的外角平分线交于点 J. 圆 ω_b 的圆心为 O_b, 经过点 B, 与直线 CI 切于点 I. 圆 ω_c 的圆心为 O_c, 经过点 C, 与直线 BI 切于点 I. O_bO_c 与 IJ 交于 K. 求比值 $\frac{IK}{KJ}$.



解 答案为 $\frac{1}{3}$.

I 为内心, J 为 A对应的旁心. 设 X 是 $\triangle ABC$ 外接圆上不包含 A 的弧 $\overset{\frown}{BC}$ 中点. 熟知 $XB=XC=XI=XJ$.

O_b 是 BI 中垂线和过 C 的 CI 垂线的交点. 而 X 也在 BI 中垂线上, 所以 $XO_b\perp BI$.

对称地, $IO_c\perp BI \Rightarrow IO_c \parallel XO_b$.

同理 $IO_b \parallel XO_c$, 故 IO_bXO_c 为平行四边形. $\Rightarrow K$ 为 IX 中点.

故 $\frac{IK}{KJ} = \frac{1}{3}$. □

评注 本题是简单的几何题. 对于三角形内心旁心的结构不难想到添出弧中点, 然后发现平行就解决了问题.

9.3 将 200 个正整数写成一行. 对于任意两个相邻的数, 右边的要么是左边的 9 倍, 要么是左边的一半. 所有 200 个数之和能否等于 24^{2022}?

解 不能.

事实上, 若设最右边的数为 n, 则从右往左的数 mod 17 分别同余于

$$n, 2n, \cdots, 2^{199}n.$$

因为 2 和 9 在 mod 17 下互为数论倒数.

故它们的和 mod 17 同余于 $(2^{200}-1)n$. 注意到, $17 \mid 2^8 - 1$, $8 \mid 200$, 所以这 200 个数的和是 17 的倍数. 不能是 24^{2022}. □

评注 本题证明方法较难想到, 并且构造思路多影响猜结论. 证明思路是找到"不变量", 即乘 9 和除以 2 的不变量, 便想到 mod 17 来看.

9.4 班级有 18 名学生. 家长决定给班上的学生蛋糕. 为了做到这点, 他们先确定了每名学生想要的蛋糕面积. 然后他们订制了面积恰好等于 18 名学生所要求的之和的正方形蛋糕. 但是, 学生们看到蛋糕之后, 希望自己的那块蛋糕也是正方形的. 家长们可以沿着与边平行的线切蛋糕 (切的起点和终点可以不在蛋糕的边上). 对什么样的最大的 k, 家长们可以保证能够从订制的蛋糕中切出 k 块正方形的部分, 可以分给 k 名学生, 使得每人得到想要的?

解 答案是 12.

一方面, 我们令 3 个学生想要的面积是 0, 其余 15 个想要的面积均为 1. 则大蛋糕的边长为 $\sqrt{15} < 4$. 这样三个学生直接满足, 而最多只能切下 9 个边长为 1 的正方形 (此结论较为熟知, 证明思路是让所有正方形先根据向下的重力落下, 再根据向左的重力落下). 这样最多满足 12 个学生.

另一方面, 设 18 个学生想要的蛋糕边长为 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{18}$.

不妨设 $\sum\limits_{n=1}^{18} x_n^2 = 1$. 我们证明可以把边长分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_{12}$ 的正方形放入单位正方形中.

按如下的方法: 先紧靠着左边从上往下放置 x_{12}, x_{11}, x_{10} 为边长的正方形.

然后切掉左边长为 x_{12}, 宽为 1 的矩形, 在剩下的矩形中紧靠着左边从上往下放置 x_9, x_8, x_7 为边长的正方形, 然后切去左边长为 x_9, 宽为 1 的矩形 $\cdots$

下面证明这种方法可行; 即只需证明

$$x_{12}+x_{11}+x_{10}\le 1,$$

且

$$x_{12}+x_9+x_6+x_3\le 1.$$

前者: 若 $x_{12}+x_{11}+x_{10}>1$, 由均值不等式

$$x_{12}^2+x_{11}^2+x_{10}^2>\frac{1}{3},$$

而 $x_{12}>\frac{1}{3}$, 说明 $\sum\limits_{n=13}^{18}x_n^2>6\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$. 故 $\sum\limits_{n=10}^{18}x_n^2>1$, 矛盾!

后者: 若 $x_{12}+x_9+x_6+x_3>1$, 由均值不等式

$$x_{12}^2+x_9^2+x_6^2+x_3^2>\frac{1}{4}.$$

当然也有

$$x_{13}^2+x_{10}^2+x_7^2+x_4^2>\frac{1}{4},$$

$$x_{14}^2+x_{11}^2+x_8^2+x_5^2>\frac{1}{4},$$

$$x_{15}^2+x_{16}^2+x_{17}^2+x_{18}^2>\frac{1}{4}.$$

相加得到 $\sum\limits_{n=3}^{18}x_n^2>1$, 矛盾!

所以可以满足 12 的人的需求. 综上, 答案为 12. □

评注 本题是较难的组合题. 猜到答案需要一定的时间. 证明的初始思路是贪心算法: 即从最小的 k 个正方形中从大到小一列一列放置. 如果从小往大放置会产生反例, 即只能放 11 个. 题目给出的数字正好能得到如上述的通用的放法.

9.5 给定无穷数列 $a_1, a_2, \cdots$, 其中没有两项相等. 数列的片段 $a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{i+m-1}$ 称为长度为 m 的"单调片段", 如果满足不等式 $a_i<a_{i+1}<\cdots<a_{i+m-1}$ 或 $a_i>a_{i+1}>\cdots>a_{i+m-1}$. 我们有对每个正整数 k, a_k 这项包含在某个长度为 $k+1$ 的单调片段内. 证明存在正整数 N 使得数列 $a_N, a_{N+1}, \cdots$ 是单调的, 亦即 $a_N<a_{N+1}<\cdots$ 或 $a_N>a_{N+1}>\cdots$.

证明 对每个 i, 看 a_i 与 a_{i+1} 的大小关系, 然后得到一个由 $<, >$ 组成的无

穷序列.

若该序列全相同, 已经得证.

否则, 必存在相邻的 $<,>$ 或 $>,<$. 不妨设为前一种, 因为原数列每项变为相反数不影响结论.

设 $a_i < a_{i+1} > a_{i+2}$. 对 a_{i+1} 由条件, 该项在一个长 $i+2$ 的单调区间内. 注意该单调区间不同时包含 a_i, a_{i+2}, 所以只能是单调区间 $a_{i+1} > a_{i+2} > \cdots > a_{2i+2}$.

我们对 n 归纳证明 $a_{i+1} > a_{i+2} > \cdots > a_{2i+2+n}$.

$n = 0$ 已经成立. 假设 $a_{i+1} > a_{i+2} > \cdots > a_{2i+2+n}$, 对 a_{i+n+2} 运用条件, 并注意已经有

$$a_{i+n+1} > a_{i+n+2} > a_{i+n+3},$$

所以 a_{i+n+2} 在一个递减的长为 $i+n+3$ 的单调区间里. 但是 $a_i < a_{i+1}$, 说明该区间至少从 a_{i+1} 开始, 故至少在 a_{2i+3+n} 结束. 于是有

$$a_{i+1} > a_{i+2} > \cdots > a_{2i+3+n}.$$

所以令 $N = i+1$ 就有 $a_N > a_{N+1} > \cdots$. 得证. $\square$

评注 本题虽然看起来很长, 实际上是简单的组合题. 只要注意到取出反号的结构即可.

9.6 对什么样的最小的正整数 a, 存在整数 b 和 c, 使得二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 有两个不超过 $\frac{1}{1000}$ 的不同正根?

解 答案为 1001000.

构造: $(1000x-1)(1001x-1)$ 满足要求, $a = 1001000$.

证明: 两根之积 $\frac{c}{a} \in (0, \frac{1}{1000000}]$. 有 $c > 0$. 若 $c \geq 2$, 则有 $a \geq 2000000$, 成立!

以下假设 $c = 1$. 则判别式为整数且大于0. 设

$$b^2 - 4a = k^2$$

其中 $k \geq 1$.

两根为 $\frac{b \pm k}{2a} \Rightarrow \frac{b+k}{2a} \leq \frac{1}{1000}$. 故

$$4a = (b+k)(b-k) \leq \frac{a}{500} \cdot (b-k)$$

$\Rightarrow b - k \geq 2000 \Rightarrow b + k \geq 2002$

$\Rightarrow a = \frac{(b+k)(b-k)}{4} \geq 1001000$. 得证. $\square$

评注 本题是基础的代数题. 注意条件“两根不相等”.

9.7 国家里有 998 个城市. 有些城市对由双向航线连接. 法律规定任何一对城市之间不能超过一条航线. 另一条法律规定, 对于任意由 k 个城市组成的组, 它们之中不超过 $5k+10$ 条航线. 当前法律是得到执行的. 证明发展部可以增加若干条新航线, 使得法律保持得到执行的状态, 而国家里的总航线数变成 5000.

证明 转化为图论问题, 则每个 k 个点的诱导子图边数至多 $5k+10$.

称一个顶点的子集是满的, 如果它的诱导子图的边数是点数的 5 倍加 10. 假设结论不成立, 则存在一个边数最大的反例 G, 使得 G 中任再加一边就违反了规则. 注意到, G 中一定存在满的顶点子集, 否则可以任加一边不违反规则.

取出 G 的最大的满的顶点子集 A. 设 B 为 A 的补集, 则 B 非空.

如果 A 中任一点和 B 中任一点均连边, 对任意 $x \in B$, 对 $\{x\} \bigcup A$ 运用条件, 说明 x 向 A 中连边至多 5. 说明 A 的规模至多是 5. 但是规模至多 5 的顶点子集不可能是满集, 矛盾!

所以存在 $x \in B, y \in A$, 使得 x, y 不连边. 我们连接 x, y, 则违反了规则, 假设此时顶点子集 C 违反了规则. 当然, $x, y \in C$. C 原来是满集.

设 $C \bigcap A = C_1, C \bigcap B = C_2$. 则 C_1, C_2 非空. 对于 $A \bigcup C_2$ 运用条件 (并且它严格包含 A, 不是满集), 说明 C_2 与 A 之间和 C_2 内的总边数严格小于 5 倍 C_2 的规模. 当然也说明 C_2 与 C_1 之间和 C_2 内的总边数严格小于 5 倍 C_2 的规模.

另一方面, C_1 中边数至多是 C_1 的规模的 5 倍加 10, 说明 C 内部的边数严格小于 5 倍 C 的规模加 10, 说明 C 不是满的, 矛盾!

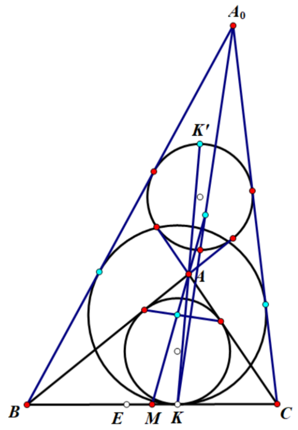
综上得证. □

评注 本题是中等难度的图论题. 想法较为简单, 即取最大的满集随意加边即可.

9.8 $\triangle ABC$ 的内切圆 ω 与边 BC 切于点 K. 圆 ω_0 与圆 ω 关于点 A 对称. 选取点 A_0 使得线段 BA_0 和 CA_0 与圆 ω_0 相切. 设 M 为边 BC 的中点. 证明: 直线 AM 平分线段 KA_0.

证明 以 K 为中心作位似比为 2 的变换, 设 K 关于 A 对称点为 K', K 关于 M 对称点为 E, 则只需证明 EA_0K' 共线.

注意到, K' 在 ω_0 上, 且 ω_0 过 K' 的切线平行于 BC.



由凹四边形 A_0BAC 有内切圆 ω_0, 说明 $A_0B - A_0C = AB - AC$. 由此不难得到 $\triangle A_0BC$ 的内切圆与 BC 相切于 K. 故 $\triangle A_0BC$ 的 A_0 对应的旁切圆与 BC 相切于 E.

由于 $\triangle A_0BC$ 的 A_0 对应的旁切圆和 ω_0 外位似中心为 A_0, 故 EA_0K' 共线.

得证. $\square$

评注 上述解法来自江城同学 (2022 中国国家队队员), 做法十分巧妙. 笔者的解法相对要麻烦很多, 这里提一下: 首先同样作出 $\triangle A_0BC$ 的内切圆. 注意到, 若设该圆圆心为 I', 则有熟知的结论 M, I' 和 A_0K 中点共线. 于是只需证明 AMI' 共线. 若设 $\triangle ABC$ 内切圆 I 与 AB, AC 切于 C_0, B_0, 则熟知: $B_0C_0 \bigcap AM$ 和 I 连线垂直于 BC, 故只需证明 B_0, C_0, I' 共线, 因为本身就有 $I'I$ 垂直于 BC. 现在只要计算 $I'I$ 的长度就行了. 笔者的做法转化了几次结论让结论可计算, 并不是纯几何的做法, 而且后续的计算也较为复杂.

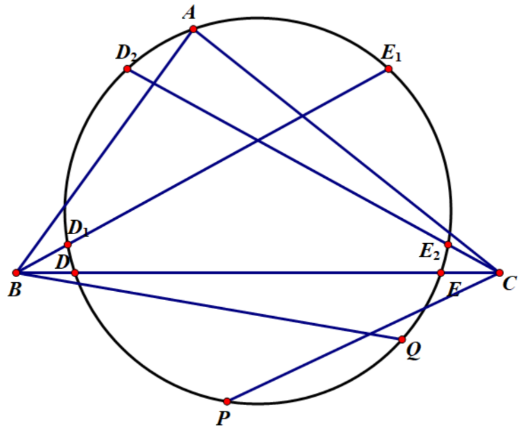
2 十年级

10.1 同 9.1.

10.2 在锐角 $\triangle ABC$ 的边 BC 上取点 D 和 E 使得 $BD = CE$. 在 $\triangle ADE$ 的外接圆上不含点 A 的弧 $\overset{\frown}{DE}$ 上取点 P 和 Q 使得 $AB = PC, AC = BQ$. 证明: $AP = AQ$.

证明 在 $\triangle ADE$ 的外接圆上取不同于 D 的点 D_1 使得 $BD_1 = BD$. 类似取 E_1, D_2, E_2 (如图).

作点 Q' 使得 Q', A 在 BC 异侧, 且 $\triangle BQ'D_1 \cong \triangle CAE$. 由于 $BE_1 = CD$, 故有 $\triangle BQ'E_1 \cong \triangle CAD$.



所以 $\angle D_1QE_1 = \angle DAE$. 又 $DE = D_1E_1 \Rightarrow DE, D_1E_1$ 所对应圆周角相同, 故 Q' 在 $\triangle ADE$ 的外接圆上. 又 $BQ' = AC = BQ$ 说明 $Q = Q'$. 由于 $\angle D_1E_1Q = \angle ADE$, 所以弧 $\overset{\frown}{AE}$ 等于弧 $\overset{\frown}{D_1Q}$. 故 AD_1QE 为等腰梯形, $AQ = D_1E$.

同理有 $AP = E_2D$. 另一方面, 由对称性 $BC \parallel D_1E_2$,

故 $D_1E = DE_1 \Rightarrow AP = AQ$. 得证. □

评注 本题是一道中等难度的几何题. 从结论入手可以看到许多全等三角形, 但同一法证明并不容易刻画 P, Q 两点的位置. 笔者的做法添出了一些对称点, 并通过新点的全等发现 P, Q 的位置较好, 从而证明了结论.

10.3 黑板上一开始写着数对 $(1,1)$. 如果对某个 x 和 y, 黑板上写有数对 $(x, y-1)$ 和 $(x+y, y+1)$ 之一, 就可以写另一个. 类似地, 如果黑板上写有 (x, xy) 和 $(\frac{1}{x}, y)$ 之一, 可以写另一个. 证明: 每个写出的数对中的第一个数都是正数.

证明 我们证明每个写在黑板上的数对 (x, y) 均满足 $y^2 < 4x$.

$(1,1)$ 显然满足. 假设因为 $(x, y-1)$ 和 $(x+y, y+1)$ 中某个在黑板上而写了另外一个, 注意到

$$(y-1)^2 - 4x = (y+1)^2 - 4(x+y)$$

所以一个数对满足这个条件等价于另一个满足这个条件.

假设因为 (x, xy) 和 $(\frac{1}{x}, y)$ 中某个在黑板上而写了另外一个, 注意到

$$\frac{4x}{(xy)^2} = \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{y^2}$$

所以一个数对满足这个条件等价于另一个满足这个条件.

于是证明了每个写在黑板上的数对 (x, y) 均满足 $y^2 < 4x$. 当然推出第一个

数大于0. 得证. □

评注 本题是一道较简单的代数题, 如果对原结论直接归纳是十分困难的. 关键是找到不变量, 经过解"函数方程"可以猜出这个不变量.

10.4 给定正整数 $n > 4$. 在平面上标出 n 个点, 其中没有三个点共线. 瓦西里逐一画出以标出的点为端点的所有线段. 每画出一条线段时, 瓦西里将其赋值为与其有公共端点的线段中尚未赋值的最小正整数. 对什么样的最大的 k, 瓦西里可以设法给一条线段赋值 k?

解 n 是奇数时, 答案为 $2n-3$; n 为偶数时, 答案为 $2n-4$.

一方面: 当瓦西里染色一条边的时候, 考虑与这条边有公共顶点的边有 $2n-4$ 条, 所以至多使用 $2n-3$ 种颜色. n 是偶数的时候, 容易发现第一种颜色的边构成一个完美匹配. 这说明, 当瓦西里染一条不是第一种颜色的边时, 与这条边有公共顶点的 $2n-4$ 条边中至少两条是第一种颜色的边. 所以至多使用 $2n-4$ 种颜色.

另一方面, n 为奇数时, $n-1$ 为偶数, 先将 K_{n-1} 用 $n-2$ 种颜色染好 (容易将 K_{n-1} 拆成 $n-2$ 个完美匹配. 然后依次对每个完美匹配染色, 第一个完美匹配染第一种颜色, 第二个完美匹配染第二种颜色, 等等), 此时, 这 $n-1$ 个点中每点已经染好的 $n-2$ 边两两不同色. 最后染第 n 个点连出的 $n-1$ 边, 由规则分别是第 $n-1, n, \cdots, 2n-3$ 种颜色. 这样做到了使用 $2n-3$ 种颜色.

n 为偶数时: 类似地, 可将 K_{n-2} 用 $n-3$ 种颜色染好, $n-2$ 个点中每点已经染好的 $n-3$ 边两两不同色.然后依次染第 $n-1$ 个点 a 和这 $n-2$ 个点连的边. 设染的顺序是 $av_1, av_2, \cdots, av_{n-2}$, 则它们的颜色分别是第 $n-2, n-1, \cdots, 2n-5$ 种颜色. 最后来看第 n 个点 b. 注意到 $n > 4$, 我们依次染这些边: $bv_2, bv_3, \cdots, bv_{n-3}, bv_1, bv_{n-2}$. 根据规则它们的颜色分别为 $n-2, n-1, n, \cdots, 2n-6, 2n-4$. 最后染 ab 为第一种颜色. 这样做到了使用 $2n-4$ 种颜色.

综上, 答案为: n 是奇数时, $2n-3$; n 为偶数时, $2n-4$. □

评注 本题是较繁琐的组合题. 本题繁琐在猜到偶数的答案. 偶数情况的答案在 $n=4$ 时是不同的, 所以引导同学尝试证明却证不出, 最后通过对 $n=6$ 漫长的探索看到 n 大时会存在构造. 奇数的两部分都相对好想, 偶数的证明部分要考虑第一色的分布, 也相对好做.

10.5 黑板上写有 11 个整数 (不一定不同). 能否使得其中任意 5 个的乘积大于其余 6 个的乘积?

解 能.

构造: 取 10 个 -1, 一个 2.

验证: 若 5 个数中全是 -1, 有 $-1 > -2$; 若 5 个数有 4 个 -1 和一个 2, 则 $2 > 1$. □

评注 本题是简单的构造题. 容易看到 11 个数全正是不行的. 进一步看到 11 个数的乘积必须是正数, 否则会出现 5 个数的积是负数, 6 个数的积是正数的情况. 为了简单地控制 5 个数的正负性, 想到只要一个正数, 进一步想到把 10 个负数变成相等的, 计算就做完了.

10.6 给定正整数 $n > 5$. 在环形纸带上写有由 0 和 1 组成的序列. 对每个由 0 和 1 组成的长度为 n 的序列 w, 计算能够从纸带上剪出一段写有 w 的片段的方法数. 我们有序列 $11\underbrace{00\cdots0}_{n-2}$ 出现的次数最多, 为 M 次; 而序列 $\underbrace{00\cdots0}_{n-2}11$ 出现的次数最少 (可能为 0 次). 证明: 存在另一个 0 和 1 组成的长度为 n 的序列出现恰好 M 次.

证明 即 $f(w)$ 为能够从纸带上剪出一段写有 w 的片段的方法数. 有 $f(11\underbrace{00\cdots0}_{n-2}) = M$. 设 $f(\underbrace{00\cdots0}_{n-2}11) = m$.

我们考虑每一段连续的极长的 0 (也就是说中间 (至少一个)全是 0, 两边是 1 的这样结构的段)中, 0 的个数至少是 $n-2$ 的那些. 设有 N 个.

一方面, 把每段这样的 0 对应成最右边的 $n-2$ 个零, 说明 $\underbrace{00\cdots0}_{n-2}1$ 出现的次数是 N (容易发现这是一一对应). 所以

$$f(\underbrace{00\cdots0}_{n-2}11) + f(\underbrace{00\cdots0}_{n-2}10) = f(\underbrace{00\cdots0}_{n-2}1) = N,$$

这说明 $N \le m + M$.

同理, 有

$$f(11\underbrace{00\cdots0}_{n-2}) + f(01\underbrace{00\cdots0}_{n-2}) = N,$$

这说明 $N \ge m + M$.

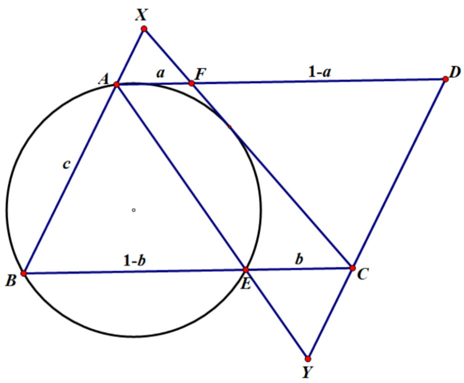
所以上述两个不等式均取等, 有 $f(\underbrace{00\cdots0}_{n-2}10) = M$.

得证. □

评注 本题是中等难度的组合题, 主要方法是作一一对应计数, 通过条件得到一些不等式.

10.7 在平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 上取点 E, 在边 AD 上取点 F, 使得 $\triangle ABE$ 的外接圆与线段 CF 相切. 证明: $\triangle CDF$ 的外接圆与直线 AE 相切.

证明 如图, 设 $AB\bigcap CF=X, CD\bigcap AE=Y$.



先证明: CX 与 $\triangle ABE$ 的外接圆相切当且仅当 CX 的长度等于 X,C 到 $\triangle ABE$ 的外接圆的幂的根号之和.

这是因为: 若 CX 与 $\triangle ABE$ 的外接圆相切, 该式显然成立.

注意到固定 $ABCF$ 时, 使得 CX 与 $\triangle ABE$ 的外接圆相切的 E 是唯一的; 并且 E 向 C 移动时, X,C 到 $\triangle ABE$ 的外接圆的幂的根号之和严格变小. 所以这是一个充分必要条件.

为计算方便, 设 $AD=BC=1, AF=a, CE=b, AB=c, \angle B=\theta$.

故 CX 与 $\triangle ABE$ 的外接圆相切的充要条件是

$$\sqrt{XA\cdot XB}+\sqrt{CA\cdot CE}=CX.$$

由 $\frac{XA}{XB}=\frac{AF}{BC}\Rightarrow XA=\frac{ca}{1-a}, XB=\frac{c}{1-a}$, 故上式等价于

$$\sqrt{\frac{ac^2}{(1-a)^2}}+\sqrt{b}=CX.$$

由余弦定理,

$$CX^2=XB^2+BC^2-2XB\cdot BC\cdot\cos B=(\frac{c}{1-a})^2+1-2\frac{c}{1-a}\cdot\cos\theta.$$

故 CX 与 $\triangle ABE$ 的外接圆相切的充要条件是

$$\frac{ac^2}{(1-a)^2}+b+\frac{2c}{1-a}\sqrt{ab}=\frac{c^2}{(1-a)^2}+1-\frac{2c}{1-a}\cdot\cos\theta.$$

整理得

$$(1-a)(1-b)+c^2=2c(\sqrt{ab}+\cos\theta).$$

注意到该式关于 a, b 对称, 所以 $\triangle CDF$ 的外接圆与直线 AE 相切的充分必要条件也是该式. 所以两组相切相互等价. 得证. $\square$

评注 此解法来自江城同学, 和笔者一样都采用了计算充要条件的方法, 而笔者的做法相对复杂一些. 笔者也使用了一开始证明的引理, 不过是对于 CF 进行计算. 其计算量要大一些, 式子也较长.

这里再提供一个官方给出的纯几何做法: 我们设圆 ABE 与 CF 切点为 P. 取 AE 上一点 Q 使得 $CQ \parallel AP$. 结合 $AF \parallel EC$, 容易导比例得到 $FQ \parallel EP$.

注意到 $\angle FQC = \angle APE = \pi - \angle B = \pi - \angle D$, 所以 Q 在圆 DFC 上. 结合

$$\angle AQF = \angle PEA = \angle FPA = \angle FCQ,$$

便有 Q 是圆 DFC 与 AE 切点. 得证.

上述的几何解法需要发现 $CQ \parallel AP$ 这一性质. 发现后便可通过简单的导角来证明另一组相切, 十分简洁.

10.8 对正整数 N, 考虑所有从其十进制表示中删去一位后能够得到的所有不同的完全平方数. 证明: 当 N 取所有正整数时, 这些数的数目有上限.

证明 对 N 的位数归纳证明数目最多为 300.

N 少于 10 位是显然的. 假设小于 t 位时结论成立, 考虑 N 是 t 位数时.

若 N 是 10 的倍数: 若 N 末尾有奇数个 0, 则从其十进制表示中删去一位后能够得到的完全平方数只能是去掉某个 0, 最多 1 个. 若 N 的末尾有偶数个 0, 则从其十进制表示中删去一位后能够得到的完全平方数不可能是去掉末尾的 0. 此时对于 $\frac{N}{100}$ 使用归纳假设即可.

以下假设 N 不是 10 的倍数.

称 N 的一位是好的, 如果去掉它后得到完全平方数.

考虑 N 的后面 $[\frac{t}{2}] - 5$ 位中, 若有两位是好的, 并且它们得到的平方数不同, 设为 x^2, y^2, 则 $x^2 - y^2 \le 10^{\frac{t}{2}-1}$. 而 $x, y \ge 10^{\frac{t}{2}}$, 说明 $x^2 - y^2 \ge 10^{\frac{t}{2}}$, 矛盾!

故 N 的后面 $[\frac{t}{2}] - 5$ 位中, 最多得到一个不同的平方数.

下面来看 N 的前面 $[\frac{t}{2}] - 5$ 位.

若 N 不是 5 的倍数: 来看 N 的前面 $[\frac{t}{4}] - 15$ 位. 假设得到三个不同的完全平方数 x^2, y^2, z^2. 有

$$x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \pmod{10^{[\frac{3t}{4}]+10}},$$

其中, x, y, z 为正整数且均不是 5 的倍数.

这说明 $x\equiv\pm y\pmod{5^{[\frac{3t}{4}]+10}}, x\equiv\pm z\pmod{5^{[\frac{3t}{4}]+10}}$.

由抽屉原理, x,y,z 中必有两个 $\bmod 5^{[\frac{3t}{4}]+10}$ 相同. 所以它们的差至少是 $5^{[\frac{3t}{4}]+10}$. 这说明它们的平方差至少是 $(5^{[\frac{3t}{4}]+10})^2\geq 10^{t+1}>N$, 矛盾! 所以这些位中至多得到两个不同完全平方数.

再看 N 从前往后第 $[\frac{t}{4}]+15$ 位到第 $[\frac{t}{2}]-5$ 位. 假设得到三个不同的完全平方数 x^2,y^2,z^2. 有

$$x^2\equiv y^2\equiv z^2\pmod{10^{[\frac{t}{2}]+3}},$$

其中, x,y,z 为正整数且均不是 5 的倍数.

这说明 $x\equiv\pm y\pmod{5^{[\frac{t}{2}]+3}}, x\equiv z\pmod{5^{[\frac{t}{2}]+3}}$.

由抽屉原理, x,y,z 中必有两个 $\bmod 5^{[\frac{t}{2}]+3}$ 相同. 所以它们的差至少是 $5^{[\frac{t}{2}]+3}$. 这说明它们的平方差至少是 $(5^{[\frac{t}{2}]+3})^2>10^{\frac{3t}{4}}$. 但是在从前往后第 $[\frac{t}{4}]+15$ 位到第 $[\frac{t}{2}]-5$ 位中间删去两位的差至多是 $10^{\frac{3t}{4}}$, 矛盾! 所以这些位至多得到两个不同的完全平方数.

加上没算的那些位, 至多 $2+2+1+12+35<300$ 个不同的平方数. 成立!

若 N 是 5 的倍数, 则不是 2 的倍数. 来看 N 的前面 $[\frac{t}{6}]-15$ 位. 假设得到 5 个不同的完全平方数 $x_i^2, i=1,2,3,4,5$. 有 $x_i^2\ (\bmod 10^{[\frac{5t}{6}]+10})$ 同余. 其中, $x_i, i=1,2,3,4,5$ 为正整数且均不是 2 的倍数.

我们需要如下引理.

引理 若 5 个不同的正奇数的平方 $\bmod 10^{2l+1}$ 相同, 则五个数中必有两个的差是 $5^l\cdot 2^{2l}$ 的倍数.

证明 若这 5 个数均为 5^l 的倍数, 由于它们是奇数, 说明它们 $\bmod 2^{2l}$ 两两相同或是相反数. 由抽屉原理必有两个 $\bmod 2^{2l}$ 相同, 成立!

否则, 它们均不是 5^l 的倍数, 且它们 5 的幂次相同, 设为 $u<l$. 考虑这 5 个数除以 5^u 后, 它们均不是 5 的倍数, 且它们的平方 $\bmod 5^{2l-2u}$ 相同. 这说明新的 5 个数 $\bmod 5^{2l-2u}$ 两两相同或是相反数. 所以原来的 5 个数模 5^{2l-u} 两两相同或是相反数. 又它们 $\bmod 2^{2l}$ 两两相同或是相反数. 由抽屉原理必有两个数 $\bmod 5^{2l-u}\cdot 2^{2l}$ 相同, 由 $u<l$ 成立! 引理得证.

回到原题, 由引理, 这 5 个数有两个的差至少是 $5^{\frac{5t}{12}+1}\cdot 2^{\frac{5t}{6}+2}$. 这说明它们的平方差至少是 $5^{\frac{5t}{6}+2}\cdot 2^{\frac{5t}{3}+4}$. 但是他们的平方差至多是 $N<10^{t+1}<5^{\frac{5t}{6}+2}\cdot 2^{\frac{5t}{3}+4}$. 矛盾!

再来看 N 的前面第 $[\frac{t}{3}]-15$ 到第 $[\frac{t}{6}]+15$ 位. 假设得到 5 个不同的完全平方数 $x_i^2, i=1,2,3,4,5$. 有 $x_i^2\ (\bmod 10^{[\frac{2t}{3}]+10})$ 同余. 其中, $x_i, i=1,2,3,4,5$ 为正

整数且均不是 2 的倍数. 由引理, 这 5 个数有两个的差至少是 $5^{\frac{t}{3}+1}\cdot 2^{\frac{2t}{3}+2}$. 这说明它们的平方差至少是 $5^{\frac{2t}{3}+2}\cdot 2^{\frac{4t}{3}+4}$. 但是从 N 的前面第 $[\frac{t}{3}]-15$ 到第 $[\frac{t}{6}]+15$ 位中删去两位所得的数的差至多是 $10^{\frac{5t}{6}}<5^{\frac{2t}{3}+2}\cdot 2^{\frac{4t}{3}+4}$. 矛盾!

再来看 N 的前面第 $[\frac{5t}{12}]-15$ 到第 $[\frac{t}{3}]+15$ 位. 假设得到 5 个不同的完全平方数 $x_i^2, i=1,2,3,4,5$. 有 $x_i^2 \pmod{10^{[\frac{7t}{12}]+10}}$ 同余. 其中, $x_i, i=1,2,3,4,5$ 为正整数且均不是 2 的倍数. 由引理, 这 5 个数有两个的差至少是 $5^{\frac{7t}{24}+1}\cdot 2^{\frac{7t}{12}+2}$. 这说明它们的平方差至少是 $5^{\frac{7t}{12}+2}\cdot 2^{\frac{7t}{6}+4}$. 但是从 N 的前面第 $[\frac{5t}{12}]-15$ 到第 $[\frac{t}{3}]+15$ 位中删去两位所得的数的差至多是 $10^{\frac{2t}{3}}<5^{\frac{7t}{12}+2}\cdot 2^{\frac{7t}{6}+4}$. 矛盾!

最后看 N 的前面第 $[\frac{t}{2}]-15$ 到第 $[\frac{5t}{12}]+15$ 位. 假设得到 5 个不同的完全平方数 $x_i^2, i=1,2,3,4,5$. 有 $x_i^2 \pmod{10^{[\frac{t}{2}]+10}}$ 同余. 其中, $x_i, i=1,2,3,4,5$ 为正整数且均不是 2 的倍数. 由引理, 这 5 个数有两个的差至少是 $5^{\frac{t}{4}+1}\cdot 2^{\frac{t}{2}+2}$. 这说明它们的平方差至少是 $5^{\frac{t}{2}+2}\cdot 2^{t+4}$. 但是从 N 的前面第 $[\frac{t}{2}]-15$ 到第 $[\frac{5t}{12}]+15$ 位中删去两位所得的数的差至多是 $10^{\frac{5t}{12}}<5^{\frac{t}{4}+1}\cdot 2^{\frac{t}{2}+2}$. 矛盾!

加上那些没算的位数, 得到的不同平方数至多为 $1+5+5+5+5+35+35+35+12<300$. 成立!

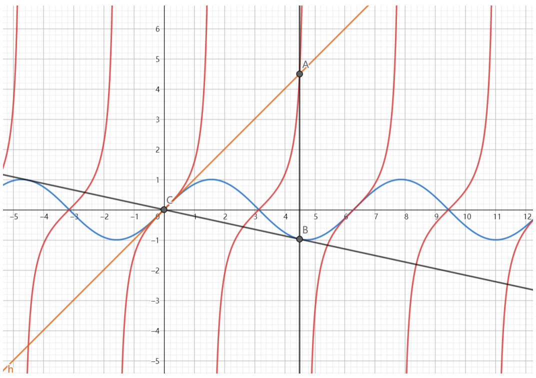
综上, 得证. □

评注 本题是相当繁琐的数论题, 其想法不算太难, 即通过估计大小和 mod 10 的幂来放不等式. 可以看到, 不妨设它不是 10 的倍数. 估计前半段的时候需要通过分段使得放缩更紧, 因为题目只要求证明至多常数量级.

3 十一年级

11.1 同 9.1.

11.2 平面上画有函数 $y=\sin x$ 和 $y=\tan x$ 的图象, 以及坐标轴. 怎样使用尺规作图画出一条直线, 它与正弦函数的图象在横轴 (Ox) 的上方和下方均相切 (可能还有若干个交点)?



解 如图: 设 O 为原点, 作直线 $y=x$ 与 $y=\tan x, x\in[\pi,2\pi]$ 相交于 A. 过 A 作垂直 x 轴的直线交 $y=\sin x$ 于点 B. 则直线 OB 为所求.

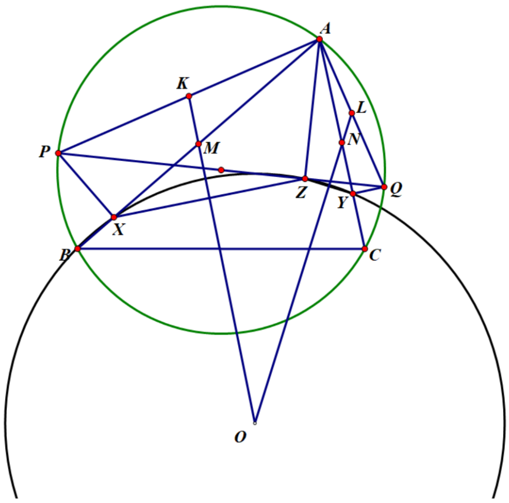
由于 $y=\sin x$ 关于原点中心对称, 只需说明该直线与一侧相切.

事实上, 过 O 作 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的切线, 我们证明切点即为 B.

设切点坐标为 $(x,\sin x)$, 则 $\frac{\sin x}{x}$ 取到极值. 求导便有 $x=\tan x$, 说明切点即为 B. □

评注 本题的关键在于利用 $y=\tan x$ 的图像. 首先想到让这条直线经过原点. 然后可以通过求导来算切点坐标满足什么性质.

11.3 锐角 $\triangle ABC$ 固定在平面上, 最长边为 BC. 设 PQ 为其外接圆的任意一条直径, 其中 P 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上, Q 在劣弧 $\overset{\frown}{AC}$ 上. 点 X,Y,Z 分别为 P 到直线 AB, Q 到直线 AC, A 到直线 PQ 的垂足. 证明: $\triangle XYZ$ 的外心位于定圆上 (不依赖于点 P 和 Q 的选取).



证明 由三组垂直得 $APXZ$ 共圆, AP 为直径. 设 AP, AQ 中点为 K, L, AB, AC 中点为 M, N. 设 $\triangle XYZ$ 的外心为 O. 则有 $KO\perp XZ, OL\perp YZ$. 注意到

$$\angle BPZ+\angle PZX=\angle BPQ+\angle PAB=\angle PAQ=90^\circ,$$

故有 $XZ\perp BP \Rightarrow PB \parallel KO$.

又 KM 为 $\triangle APB$ 中位线, 有 $BP \parallel KM$. 所以 KMO 共线. 同理 LNO 共线.

注意到 $\angle MON$ 等于 BP 与 CQ 的夹角等于 $90^\circ-\angle A$ 为定角, 而 M,N 为定点, 所以 O 在以 MN 为圆周角为 $90^\circ-\angle A$ 的弦的圆上. 得证. □

评注 本题要发现以上结论并不难, 可以画标准图, 也可以通过基本结构看到 $XZ \parallel BQ$ 从而看到共线.

11.4 同 10.4.

11.5 同 10.5.

11.6 给定正整数 n . 萨沙说对空间中任意 n 条两两无公共点的射线, 他可以在这些射线上标出 k 个点位于同一球面上. 使得他的命题成立的最大 k 是多少?

解 n 为偶数时, 答案为 n ; n 为奇数时, 答案为 $n+1$.

一方面, n 为偶数时, 画出 $\frac{n}{2}$ 条两两平行的直线, 然后把每条直线变成向两侧延伸的不交的两条射线. 注意到一条直线最多与一个球有两个交点, 说明一个球与这 n 条射线最多有 n 个交点. n 为奇数时, 画出 $\frac{n-1}{2}$ 条两两平行的直线, 然后把每条直线变成向两侧延申的不交的两条射线. 然后再任画一条平行的射线, 这样一个球与它们最多 $n+1$ 个交点.

另一方面, 若 n 为偶数, 取一个充分大的球包含所有 n 条射线的端点. 这样这个球与射线恰有 n 个交点.

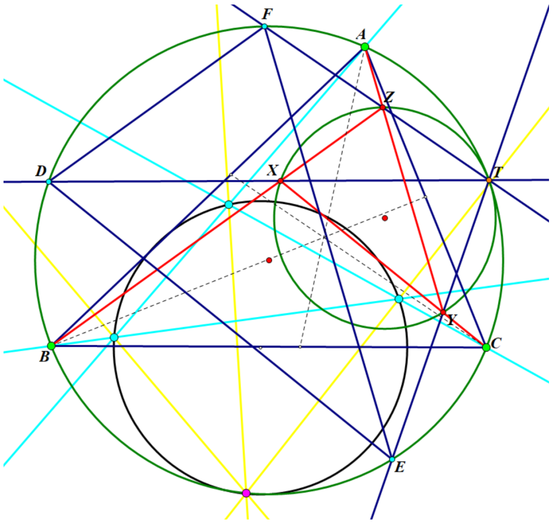
若 n 为奇数, 我们找一个平面 α 和任一射线不平行. 这样, 每条射线可被分类为向上或者向下, 根据它无限延伸的方向是在 α 的上方还是下方. 不妨设向上的更多, 至少 $\frac{n+1}{2}$ 条. 把 α 向上平移足够多的距离使得所有这些射线的端点均在平移体的下方. 注意到, 一个充分大的球可以看作为一个平面. 令一个充分大的球看作是 α 的平移体, 并且球心在平移体的上方充分远处. 注意到, 每条向上的射线会与平移体相交, 并注意到每条与球相交但非相切的射线, 若它的端点在球外, 则它与球至少两个交点. 于是, 这个充分大的球和这至少 $\frac{n+1}{2}$ 条射线每条都有两个交点. 至少有 $n+1$ 个.

综上, n 为偶数时, 答案为 n ; n 为奇数时, 答案为 $n+1$. □

评注 本题是中等难度的组合几何题. 偶数的情况简单, 但奇数的策略需要一些组合几何中常见的想法.

11.7 同 10.8.

11.8 对 $\triangle ABC$ 的每个顶点, 向内部画出一红一蓝两条射线, 关于对应角的平分线对称. 画出每个由相同颜色射线围成的三角形的外接圆. 证明: 如果 $\triangle ABC$ 的外接圆与其中的一个圆相切, 则也和另一个圆相切.



证明 1 如图, 设三条红线围出 $\triangle XYZ$. 容易看到, 存在唯一的圆 ABC 的内接 $\triangle DEF$ 使得 $DF \parallel XZ, DE \parallel XY, EF \parallel YZ$, 并且 $\triangle DEF, \triangle XYZ$ 是正位似的. 并且从一个 $\triangle DEF$ 也可唯一确定一个 $\triangle XYZ$.

以圆 ABC 为单位圆建立复平面, 用各点的小写字母表示各点对应的复数.

我们用 a, b, c, d, e, f 表示圆 XYZ 与圆 DEF 相切的充要条件.

由于 $\triangle XYZ, \triangle DEF$ 位似, 设位似中心为 T,有圆 XYZ 与圆 DEF 相切的充要条件是 T 在单位圆上. 当然也等价于 DX 与 EY 和单位圆的交点重合.

先计算 x: 有

$$\frac{x-b}{d-f} = \overline{\frac{x-b}{d-f}}, \quad \frac{x-c}{d-e} = \overline{\frac{x-c}{d-e}}.$$

结合 a, b, c, d, e, f 是单位复数, 整理得

$$x + df\overline{x} = b + \frac{df}{b}, \quad x + de\overline{x} = c + \frac{de}{c}.$$

解得

$$x = \frac{be - cf + def(\frac{1}{b} - \frac{1}{c})}{e-f}.$$

设 DX 交单位元于 X', 则由弦上一点公式有 $x + dx'\overline{x} = d + x'$. 解得

$$x' = \frac{d-x}{d\overline{x}-1}.$$

对称地, 设 EY 交单位圆于 Y'. 则有

$$y' = \frac{e-y}{e\overline{y}-1}.$$

则圆 XYZ 与圆 DEF 相切的充要条件为 $x' = y'$, 展开得

$$\frac{be - cf - de + df + def(\frac{1}{b} - \frac{1}{c})}{\frac{de}{c} - \frac{df}{e} - b + c - e + f} = \frac{cf - da - ef + de + def(\frac{1}{c} - \frac{1}{a})}{\frac{ef}{a} - \frac{de}{c} - c + a - f + d}.$$

为简化书写, 用 $\sum_{cyc}$ 表示对 a, b, c 轮换, 同时对 d, e, f 轮换的求和. 这里举

几个例子:

$$\sum_{cyc} ad = ad + be + cf, \quad \sum_{cyc} ae^2 = ae^2 + bf^2 + cd^2.$$

于是展开得以下的式子:

$$\begin{aligned}
&abc\sum_{cyc} ab(e-d) + 2abc\sum_{cyc} a(-de+df)\\
&\quad + abc(d-e)(e-f)(f-d) + def(a-b)(b-c)(c-a)\\
&\quad - (ad-be)(be-cf)(cf-ad) + 2def\sum_{cyc} ab(e-d) + def\sum_{cyc} de(b-a)\\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

记这个式子为 (#)

另一方面, 注意到如果红线对应 $\triangle DEF$, 蓝线对应 $\triangle D'E'F'$, 则有

$$dd' = bc, ee' = ac, ff' = ab.$$

所以只需证明: 若把 $\frac{bc}{d}, \frac{ac}{e}, \frac{ab}{f}$ 代入 (#), 则等价于 (#).

事实上, 把 $\frac{bc}{d}, \frac{ac}{e}, \frac{ab}{f}$ 代入 (#) 后整个式子乘 $\frac{(def)^2}{(abc)^2}$, 则有:

$abc\sum_{cyc} ab(e-d)$ 与 $def\sum_{cyc} de(b-a)$ 一个变为另一个;

$2abc\sum_{cyc} a(-de+df)$ 与 $2def\sum_{cyc} ab(e-d)$ 一个变为另一个;

$abc(d-e)(e-f)(f-d)$ 与 $-(ad-be)(be-cf)(cf-ad)$ 一个变为另一个;

$def(a-b)(b-c)(c-a)$ 不变.

也就是说, 把 $\frac{bc}{d}, \frac{ac}{e}, \frac{ab}{f}$ 代入 (#) 后整个式子乘 $\frac{(def)^2}{(abc)^2}$,则等于 (#) 式.

得证! □

证明 2 我们沿用上述字母. 对于红线围出的三角形 $\triangle XYZ$, 来证明圆 ABZ, ACY, BCX 交于一点 P (类似密克点的结构).

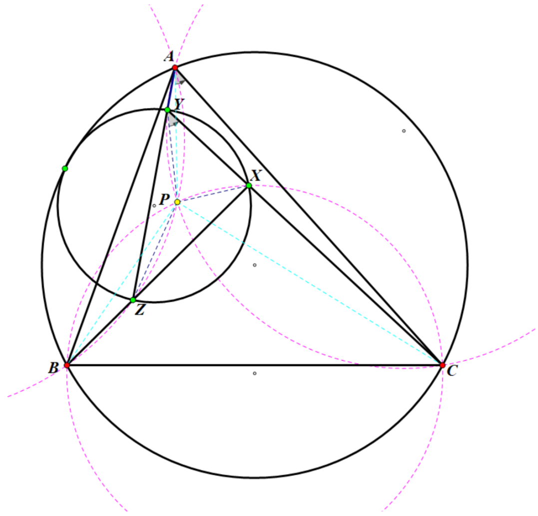
这只需要证明

$$\angle AZB + \angle BXC + \angle AYC = 2\pi.$$

而这是显然的.

然后以 P 为中心, 半径任意作反演变换. 对每个点 U, 用 U' 表示反演后的点. 然后我们有

$$\begin{aligned}
\angle X'Y'Z' &= \angle X'Y'P + \angle Z'Y'P\\
&= \angle YXP + \angle YZP\\
&= \angle PBC + \angle ABP = \angle ABC.
\end{aligned}$$



对称地便有

$$\triangle X'Y'Z' \sim ABC.$$

其次, 由反演的性质有 A', B', Z' 共线, A', C', Y' 共线, B', C', X' 共线. 又因为

$$\begin{aligned}\angle X'Y'A' &= \angle X'Y'P - \angle A'Y'P = \angle YXP - \angle YAP \\ &= \angle PBC - \angle YCP = \angle PBC - \angle XBP \\ &= \angle CBX.\end{aligned}$$

注意蓝线和红线的等角共轭关系. 对称地便得到, 若将 $X'Y'Z'$ 看作是新的三角形, $A'B'Z', A'C'Y', B'C'X'$ 看作是三条射线, 那么此结构和原题中三条蓝线的结构是相似的. 由反演保持相切的性质, 说明圆 $A'B'C'$ 和圆 $X'Y'Z'$ 相切, 也就证明了原题. □

评注 本题是难度较大的几何题. 方法一为笔者的做法, 其思路很简单, 即先通过 DEF 来刻画三条红线, 然后计算两个外接圆相切的充要条件. 采用复数法是因为大圆上的点较多. 这个做法的计算量也是相当大的.

方法二是官方给出的一个纯几何解法. 这个做法巧妙地反演使得两个命题是在反演意义下等价的, 并且其中的导角只用到了反演原本的性质, 十分简洁.