2022 年俄罗斯联邦区域竞赛试题解析

孙启傲
(上海市上海中学, 200231)
指导教师: 王广廷

俄罗斯数学奥林匹克的第三轮称为联邦区域竞赛, 全国统一试题. 在俄罗斯的七个联邦区域分别举行, 水平相当于我国的全国高中数学类联赛, 优胜者会取得参加第四轮也就是全俄数学竞赛的机会. 本文给出 2022 年俄罗斯联邦区域竞赛的试题解析.

I. 试 题

1 九年级

9.1 别佳在黑板上写了 10 个正整数, 其中任何两个数都不相等. 今知其中能够找出 3 个可被 5 整除的数, 也可找出 4 个可被 4 整除的数. 试问: 这 10 个数的和能否小于 75?

9.2 在黑板上把某个正整数 n 写了 9 遍 (一个在另一个的下方). 别佳在每个数的左边或右边写上一个非零数字, 这些数字各不相同. 试问: 在所得到的 9 个数中最多可有几个质数?

9.3 给定一个未必是整系数的二次三项式 $P(x)$. 今知, 对某两个整数 a 和 b, 差数 $P(a)$ 减 $P(b)$ 是完全平方数. 证明: 存在多于一百万个整数对 (c, d), 使得差数 $P(c)$ 减 $P(d)$ 都是完全平方数.

9.4 公司里某些人是朋友(如果 A 是 B 的朋友, 则 B 也是 A 的朋友). 现知该公司的任何 100 人中, 朋友对的数目都是奇数. 求试该公司人数的最大可能值.

9.5 设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, CE 是它的一条角平分线. 在 $\angle ACB$ 的外

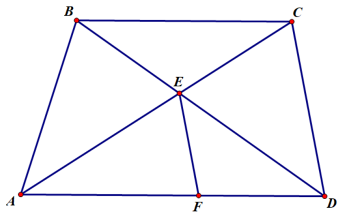
修订日期: 2022-05-09.

角平分线上取一点 D, 在边 BC 上取一点 F, 有 $\angle BAD = 90° = \angle DEF$. 证明: $\triangle CEF$ 的外心在直线 BD 上.

9.6 设有数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$, 对于任何 n, k, 其中 $1 \le n \le 2022$ 和 $1 \le k \le 2022$, 都有 $a_n - a_k \le n^3 - k^3$. 今知 $a_{1011} = 0$, 试问 a_{2022} 可能取哪些值?

9.7 别佳以某种方式把 100×100 方格表划分为一系列多米诺 (即 1×2 的方格矩形), 并在每个多米诺中用蓝色线段连接它的两个方格的中心. 瓦夏试图用另一种方式把这个方格表分成一系列多米诺, 并在每个多米诺中用红色线段连接两个方格的中心. 瓦夏希望由每个方格都能沿着蓝色和红色的线段走到另一个别的方格. 试问: 他的愿望是否一定都能实现?

9.8 如图所示, 在梯形 $ABCD$ 中, 对角线 BD 等于底边 AD. 对角线 AC 与 BD 相交于点 E. 点 F 在线段 AD 上, 使得 EF 平行于 CD. 证明: BE 等于 DF.



9.9 在平面上标出了 n 个点, 其中任何三个标出点所形成的三角形中的角的度数都是正整数. 试问: 对于怎样的最大的 n 有此可能?

9.10 证明: 存在这样的正整数 b, 使得对任何 $n > b$, 都有 $n!$ 的各位数字和不小于 10^{100}.

2 十年级

10.1 同 9.1.

10.2 给定二次三项式 $P(x)$. 证明, 存在三个两两不同的实数 a, b 和 c, 使得

$$P(a+b) = P(c), P(a+c) = P(b), P(b+c) = P(a).$$

10.3 瓦夏有 n 颗糖果, 这些糖果有若干种不同品种, 并且 $n \ge 145$. 今知, 如果从所给的 n 颗糖果中任取一组不少于 145 颗糖果 (特别地, 也可取出所有 n 颗糖果), 则其中必有一种品种的糖果刚好有 10 颗. 试求 n 的最大可能值.

10.4 设 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中 n 是正整数. 今知

$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是整数, 有 $a_n \neq 0$, 且对任何 $k = 1, 2, \cdots, n$, 都有 $a_{n-k} = a_k$, 并且 $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0 = 0$. 证明, $P(2022)$ 可被某个大于 1 的完全平方数整除.

10.5 六边形 $AECDBF$ 内接于圆 Ω. 今知点 D 平分 $\overset{\frown}{BC}$, 而 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 有公共的内切圆.直线 BC 分别与线段 DF 和线段 DE 相交于点 X 和 Y, 而直线 EF 分别与线段 AB 和线段 AC 相交于点 Z 和 T. 证明: X, Y, T, Z 四点共圆.

10.6 黑板上写着三个相连的奇数. 试问: 这三个数被 2022 除的余数的和能否是某个质数?

10.7 给定一个内接于圆的四边形 $ABCD$, 其中 $\angle A = 2\angle B$. 今知 $\angle C$ 的平分线与边 AB 相交于点 E. 证明: $AD + AE = BE$.

10.8 同 9.9.

10.9 在正 100 边形的各个顶点上分别放有一枚跳棋棋子, 棋子上按顺时针方向依次写有号码 $1, 2, \cdots, 100$.每一步允许交换两枚放在顶相邻顶点上的棋子的位置, 如果他们的号码之差不大于 k. 试问:对于怎样的最小的 k, 可以通过一系列的这种变换使得每一枚棋子最终都刚好在顺时针方向上移动了一个位置 (相对于自己的初始位置而言).

10.10. 同 9.10.

3 十一年级

11.1 同 9.1.

11.2 同 10.2.

11.3 在三棱锥 $ABCD$ 的面 BCD 和面 ACD 上分别取点 A' 和 B',使得 $\angle AB'C = \angle AB'D = \angle BA'C = \angle BA'D = 120°$. 今知直线 AA' 与直线 BB' 相交. 证明, 点 A' 与点 B' 到直线 CD 的距离相等.

11.4 公司里某些人是朋友 (如果 A 是 B 的朋友, 则 B 也是 A 的朋友). 现知该公司的任何 101 个人中, 朋友对的数目都是奇数. 求试该公司人数的最大可能值.

11.5 设 S 是一个 100 元集合, 其中的元素都是不超过 10000 的正整数. 在空间中标出所有这样的点, 它们的三个坐标值都是 S 中的元素. 对于所标出的 1000000 个点中的每一个点 (x, y, z), 都给它贴上一个写有数 $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$ 的标

签. 试问: 最多可有多少个标签上写着数 2?

11.6 同 9.6.

11.7 正整数 n 的各位数字的乘积等于 x, 而数 $n+1$ 的各位数字的乘积等于 y. 试问: 能否存在某个正整数 m, 它的各位数字的乘积等于 $y-1$, 而数 $m+1$ 的各位数字的乘积等于 $x-1$?

11.8 同 10.9.

11.9 内接于圆 ω 的梯形 $ABCD$ 的两底是 AD 和 BC. 对角线 AC 与 BD 相交于点 P. 点 M 是线段 AB 的中点. 线段 AD 的中垂线与圆 ω 相交于点 K 和点 L. 点 N 是 $\triangle PCD$ 的外接圆上不包含点 P 的 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点. 证明 K, L, M, N 四点共圆.

11.10 设 a, b, c, d 为非负实数, 有 $a+b+c+d=8$. 证明

$$\frac{a^3}{a^2+b+c}+\frac{b^3}{b^2+c+d}+\frac{c^3}{c^2+d+a}+\frac{d^3}{d^2+a+b} \geq 4.$$

II. 解答与评注

1 九年级

9.1 别佳在黑板上写了 10 个正整数, 其中任何两个数都不相等. 今知其中能够找出 3 个可被 5 整除的数, 也可找出 4 个可被 4 整除的数. 试问: 这 10 个数的和能否小于 75?

解 能.

构造: 取 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20, 则 10 个数满足题意, 且和为 71. □

评注 本题容易出错的地方在于: 如果只考虑 3 个可被 5 整除的数, 4 个可被 4 整除的数是两两不同的 7 个数, 那么它们的和至少是 $4+8+12+16+5+10+15$, 再加上 1, 2, 3, 和至少是 76. 实际上, 如果出现了 20 的倍数会使得和变小.

9.2 在黑板上把某个正整数 n 写了 9 遍 (一个在另一个的下方). 别佳在每个数的左边或右边写上一个非零数字, 这些数字各不相同. 试问: 在所得到的 9 个数中最多可有几个质数?

解 6 个.

考虑 mod 3, 注意到一个数 mod 3 同余于它的各位数字之和. 由于 $1, 2, \cdots,$

9 遍历 mod 3 完全剩余系 3 次, 所以得到的九个数中恰有 3 个 3 的倍数. 而这九个数每一个都至少是 10, 所以这 3 个 3 的倍数不可能是质数.于是至多六个质数.

构造: 设 $n = 3$, 添加为 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 此时恰有 6 个质数. □

评注 一道简单的数论题. 关键是找到把数码放在前面和后面时相同的量, 发现模3即可. 然后根据证明不难找到构造.

9.3 给定一个未必是整系数的二次三项式 $P(x)$. 今知, 对某两个整数 a 和 b, 差数 $P(a)$ 减 $P(b)$ 是完全平方数. 证明: 存在多于一百万个整数对 (c, d), 使得差数 $P(c)$ 减 $P(d)$ 都是完全平方数.

证明 设 $P(x) = px^2+qx+r$, 其中 $p \neq 0$. 则条件变为 $(pa^2+qa)-(pb^2+qb)$ 是完全平方数. 即 $(a-b)(p(a+b)+q) = k^2$, 其中 k 是整数.

所求的 $P(c) - P(d)$ 是平方数等价于 $(c-d)(p(c+d)+q)$ 为完全平方数.

我们令 $c+d = a+b$, 且 $c-d = (2l+1)^2(a-b)$. 其中 l 是待定的正整数. 那么有

$$(c-d)(p(c+d)+q) = ((2l+1)k)^2$$

是完全平方数.

注意到, 上述方程有解等价于 $a+b$ 与 $(2l+1)^2(a-b)$ 同奇偶, 这由于 $2l+1$ 为奇数是显然的.

令 l 遍历正整数, 不同的 l 对应不同的满足要求的整数对 (c, d). 这就完成了证明. □

评注 本题是一道构造性的简单数论题. 注意到系数不一定是有理数, 所以这样的构造是唯一的.

9.4 公司里某些人是朋友(如果 A 是 B 的朋友, 则 B 也是 A 的朋友). 现知该公司的任何 100 人中, 朋友对的数目都是奇数. 求试该公司人数的最大可能值.

解 答案为 101.

构造: 101 个人中取三个人 A, B, C, 他们间任两人互为朋友, 其余的任两人均不为朋友.

验证: 若其中 100 人包含 A, B, C, 则 100 个人中朋友对数为 3: 若其中 100 人不包含 A, B, C 中某人 (不妨设为 A), 则 100 个人中朋友对数为 1. 成立!

证明: 假设人数为 n, $n \geq 102$. 构造图 G, 以这些人为顶点, 朋友关系连边. 则任 100 个点构成的诱导子图有奇数边.

对任意两两不同的四点 u, v, a, b, 它们之外至少有 98 个点. 任取其中 98 个点. 对这 98 个点和 u, a 运用条件, 以及对这 98 个点和 u, b 运用条件, 得到 a, b 向这 98 个点加上 u 连边数同奇偶.

同理有 a, b 向这 98 个点加上 v 连边数同奇偶. 这两个条件结合得到: a, b 向 $\{u, v\}$ 连边数同奇偶. 也就是说, a, b 两点向 $\{u, v\}$ 的连边情况要么相同, 要么相反. (即: b 要么仅连向 $\{u, v\}$ 中 a 连向的那些点, 要么仅连向 $\{u, v\}$ 中 a 不连的那些点)

固定 a, b, 注意到 $\{u, v\}$ 是任意选取的, 这说明 a, b 两点向 G 中其余 $n-2$ 个点的连边情况要么相同, 要么相反.

由简单的 Ramsey 定理知: 要么 G 有 K_3, 要么 G 的补图有 K_3. 事实上, 由于 $\binom{100}{2}$ 是偶数, 说明 G 的补图也满足题意. 故不妨设 G 有 K_3.

取出 G 的最大团 A, 有 A 中至少 3 个点. 注意到, $\binom{100}{2}$ 是偶数, 所以 G 中没有 K_{100}. 故 A 外有其他点. 对任意一点 x 不在 A 中, 由 A 是最大团, 存在 $y \in A$, x, y 不相邻. 对任意 $z \in A, z \neq y$, 由于 z, y 相邻而 x, y 不相邻, 说明 x, z 向 G 中其余 $n-2$ 个点的连边情况相反, 说明 x 向 $G - \{z\}$ 中的点均不连边. 注意到 A 中至少3个点, 说明这样的 z 至少有两种选择. 故 x 向 A 中的点均不连边.

也就是说, A 外的点向 A 中均不连边.

对任意 $x \notin A, y \in A$, x, y 向 G 中其余 $n-2$ 个点的连边情况相反. 而 y 向 A 外的点均不连边, 说明 x 向 A 外的其它点均连边. 这说明 A 外的点两两相邻.

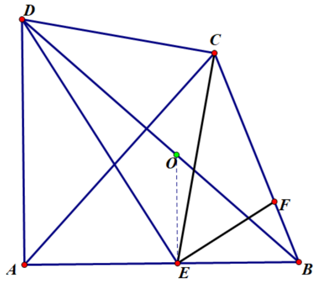
于是 G 由两个独立的团组成.

另一方面, 在本题开始时已经证明了 G 中任两个点到它们外的任 99 个点连边数同奇偶. 取两个团中各一个点, 记为 x, y, 再任取它们外的 99 个点. 则 x, y 到这 99 个点连边数之和为 99, 是一个奇数, 矛盾!

于是证明了人数至多为 101. 综上, 所求为 101. □

评注 本题是一道较为繁琐但基础的图论题. 证明部分要寻找点较多时有什么较强的结论. 注意时刻保持过程的严谨性.

9.5 设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, CE 是它的一条角平分线. 在 $\angle ACB$ 的外角平分线上取一点 D, 在边 BC 上取一点 F, 有 $\angle BAD = 90° = \angle DEF$. 证明: $\triangle CEF$ 的外心在直线 BD 上.



证明 $CE \perp CD \Rightarrow \angle DCE = \angle DAE = 90° \Rightarrow DCEA$ 四点共圆.

设 $\triangle CEF$ 外心为 O. 则

$$\begin{aligned}\angle OEF &= 90° - \angle ECF = 90° - \angle ACE \\ &= 90° - \angle ADE = \angle DEA = 90° - \angle FEB, \\ &\Rightarrow OE \perp AB.\end{aligned}$$

即 $OE \parallel AD$. 故只需证明: $\frac{OE}{AD} = \frac{EB}{AB}$.

在圆 O 中, $\angle CFE = \angle B + \angle FEB = \angle B + \angle ECB = \angle CEA$. 故有:

$$OE = \frac{CE}{2\sin\angle CEA}.$$

在圆 $ADCE$ 中, $\angle DCA = 90° - \frac{\angle C}{2}$. 有:

$$\frac{AD}{\sin(90° - \frac{\angle C}{2})} = \frac{CE}{\sin\angle A}.$$

整理得

$$\frac{OE}{AD} = \frac{\sin A}{2\sin(\angle A + \frac{\angle C}{2}) * \cos\frac{\angle C}{2}}.$$

设 a, b, c 表示 $\triangle ABC$ 三边长, 则有

$$\begin{aligned}\frac{EB}{AB} &= \frac{a}{a+b} = \frac{\sin A}{\sin A + \sin B} \\ &= \frac{\sin A}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} \\ &= \frac{\sin A}{2\cos\frac{C}{2}\sin(\angle A + \frac{\angle C}{2})}.\end{aligned}$$

上式是简单的和差化积. 故有 $\frac{OE}{AD} = \frac{EB}{AB}$. 得证. □

评注 本题画出标准图后不难发现 $OE \parallel AD$, 之后就可以通过导比例证明结论.

9.6 设有数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$, 对于任何 n, k, 其中 $1 \le n \le 2022$ 和 $1 \le k \le 2022$, 都有 $a_n - a_k \le n^3 - k^3$. 今知 $a_{1011} = 0$, 试问 a_{2022} 可能取哪些值?

解 答案为 7233550317.

对于任何 n, k, 其中 $1 \le n \le 2022$ 和 $1 \le k \le 2022$, 有

$$a_n - a_k \le n^3 - k^3.$$

若交换 n, k, 则有

$$a_k - a_n \le k^3 - n^3,$$

即

$$a_n - a_k \ge n^3 - k^3.$$

故有 $a_n - a_k = n^3 - k^3$. 代入 $n = 2022, k = 1011$, 得

$$a_{2022} - a_{1011} = 2022^3 - 1011^3 = 7233550317.$$

故 $a_{2022} = 7233550317$. □

评注 本题的要点是交换 n, k.

9.7 别佳以某种方式把 100×100 方格表划分为一系列多米诺 (即 1×2 的方格矩形), 并在每个多米诺中用蓝色线段连接它的两个方格的中心. 瓦夏试图用另一种方式把这个方格表分成一系列多米诺, 并在每个多米诺中用红色线段连接两个方格的中心. 瓦夏希望由每个方格都能沿着蓝色和红色的线段走到另一个别的方格. 试问: 他的愿望是否一定都能实现?

解 不一定.

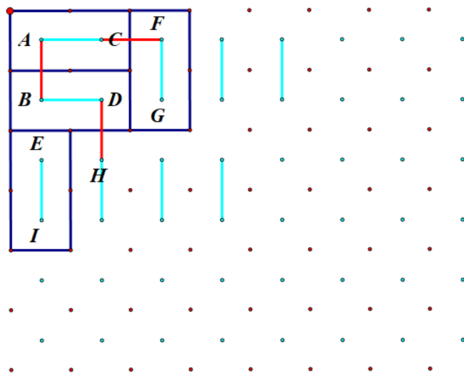
构造图 G, 以 10000 个小方格为顶点, 两点相邻当且仅当这两格被连接了一条蓝色或红色线段. (若都有则连两条边, G 可以有重边)

则每点度均为 2, 说明 G 的边可以分成若干个不交的圈. 如果瓦夏让 G 变成了连通图, 说明 G 就是一个圈.

如图, 我们构造别佳的放置方法: 即除了左上角4个格子之外, 其余格子都用竖直的多米诺覆盖, 而左上角 4 个格子用横向的多米诺. 图中, 红色的点表示方格表的格点, 蓝色的点表示 G 中的点.

如图标记一些 G 中的点, 则别佳在 G 中确定了这些蓝色线段.

现假设瓦夏能完成他的希望, 即 G 变成一个圈. 则 A 不能向 C 连红边, 否则出现了一个 C_2.



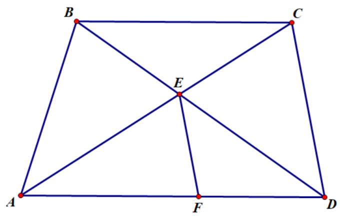
故 A,B 间连红边. 考虑 C,D 间不能连红边 (否则出现 C_4).故 C,F 间连红边.

考虑 G,D 间不能连红边 (否则出现 C_6).故 D,H 间连红边.

最后考虑 E, 只能和 I 连红边, 出现了 C_2. 矛盾! 故答案为不能. □

评注 本题考查对图论是否熟练掌握. 使用图论中一些基础的性质可说明连通等价于的是一个 Hamilton Cycle, 变成了一个很强的结论. 然后利用边界构造策略, 这可以通过考察较小的情况来得到.

9.8 如图所示, 在梯形 $ABCD$ 中, 对角线 BD 等于底边 AD. 对角线 AC 与 BD 相交于点 E. 点 F 在线段 AD 上, 使得 EF 平行于 CD. 证明: BE 等于 DF.



证明 由 EF 平行于 CD, AD 平行于 BC, 有:

$$\frac{FD}{BD}=\frac{FD}{AD}=\frac{CE}{AC}=\frac{BE}{BD}$$

故 BE 等于 DF. 得证. □

评注 本题是基础的导比例的几何题.

9.9 在平面上标出了 n 个点, 其中任何三个标出点所形成的三角形中的角的度数都是正整数. 试问: 对于怎样的最大的 n 有此可能?

解 答案为180. 构造: 取正180边形的所有顶点.

验证: 这180个点共圆, 相隔 n 个点的顶点所对应圆周角为 $n°$. 成立!

证明: 设有 $n \geq 181$ 个点, 设它们构成集合 S. 任取 $A \neq B \in S$ ，则由条件, S 中所有点均在直线 $l_0, l_1, \cdots, l_{179}$ 上. 其中, $l_0 = AB$, 对 $i = 1, 2, \cdots, 179, l_i$ 是 l_0 绕点 A 顺时针旋转 $i°$ 所得直线.

注意到, 上述直线中每一条上除了 A 之外最多只有 S 中一个点. (由条件, 任三点不共线.)

故 $n \leq 181$. $\Rightarrow n = 181$.

此时, 对任意 $A \neq B \in S$, 直线 $l_0, l_1, \cdots, l_{179}$ 上除了 A 外恰有 S 中一个点. 这说明存在 $C \neq D \in S, C, D \neq A$, 使得 $\angle CAD = 179°$.

此时考虑 S 的凸包, 设为 m 边形. 则这 m 个凸包的内角都等于 $179°$.

$\Rightarrow m = 360$, 矛盾! 于是证明了 $n \leq 180$.

综上答案为 180. □

评注 本题的难点在于大胆猜到答案. 需要想到把点放在圆上来控制角度, 后面的证明不是很困难.

9.10 证明: 存在这样的正整数 b, 使得对任何 $n > b$, 都有 $n!$ 的各位数字和不小于 10^{100}.

证明 本题用到一个进位制下的熟知的引理: 设 $b > 1, l$ 是正整数, m 是一个 $b^l - 1$ 的正整数倍数. 则 m 在 b 进制下的数字和至少是 $(b-1)l$.

于是, 若记 $M = 10^{100}$, 取原题中 $b = 10^M - 1$. 则 $\forall n > b, n!$ 均是 $10^M - 1$ 的倍数, 由引理得证. □

评注 引理的证明思路是取出最小反例, 然后处理最高位使得生成一个数码和更小的 $b^l - 1$ 的正整数倍数. 详细证明可参考刘培杰之作《初等数论难题集》.

2 十年级

10.1 同 9.1.

10.2 给定二次三项式 $P(x)$. 证明, 存在三个两两不同的实数 a, b 和 c, 使得

$$P(a+b) = P(c), P(a+c) = P(b), P(b+c) = P(a).$$

证明 设 $P(x)$ 的对称轴为 $x = m$, 取 $a + b + c = 2m$. 则显然有

$$P(a+b) = P(c), P(a+c) = P(b), P(b+c) = P(a).$$

让 a, b, c 两两不同也是简单的. $\square$

评注 很基础的代数题.

10.3 瓦夏有 n 颗糖果, 这些糖果有若干种不同品种, 并且 $n \geq 145$. 今知, 如果从所给的 n 颗糖果中任取一组不少于 145 颗糖果 (特别地, 也可取出所有 n 颗糖果), 则其中必有一种品种的糖果刚好有 10 颗. 试求 n 的最大可能值.

解 答案为 160.

一方面: 有 16 种糖果, 每种 10 颗.假设取出一组不少于 145 颗糖果使得没有一种品种的糖果刚好有 10 颗, 说明每种糖果都至少少取了一颗. 故最多取出 $160-16=144$ 颗, 矛盾!

故 $n=160$ 时可行. 下证 $n \leq 160$.

假设 $n \geq 161$, 假设有 k 种糖果恰有 10 颗, 有 $10k \leq n$.

我们把这 k 种糖果各少取一颗 (即取出了 $n-k$ 颗糖果), 则没有一种品种的糖果刚好有 10 颗.

而 $n-k \geq n-\frac{n}{10} \geq 161 * \frac{9}{10} \Rightarrow n-k \geq 145$, 矛盾!

综上, 答案为 160. $\square$

评注 本题是一道简单的组合题, 关键在于发现最佳策略, 即每个恰 10 颗糖果的堆少取一个. 根据这个策略通过简单的计算即可.

10.4 设 $P(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$, 其中 n 是正整数. 今知 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是整数, 有 $a_n \neq 0$, 且对任何 $k=1,2, \cdots, n$, 都有 $a_{n-k}=a_k$, 并且 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_0=0$. 证明: $P(2022)$ 可被某个大于 1 的完全平方数整除.

证明 我们证明 $(x-1)^2 \mid P(x)$. 这样, $2021^2 \mid P(2022)$.

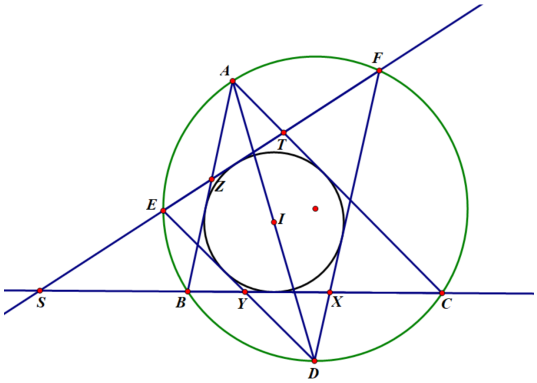
由条件, $P(1)=0$,

$$
\begin{aligned}
P'(1) &= n a_n+(n-1) a_{n-1}+\cdots+a_1 \\
&= \frac{n}{2}\left(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_0\right) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

故 $(x-1)^2 \mid P(x)$. 得证. $\square$

评注 本题需要猜到 $(x-1)^2 \mid P(x)$ 这一结论. 事实上, $(x-1) \mid P(x)$ 是显然的. 结合系数对称性可以猜到, 比如 x^2-2x+1 就具备这样的性质.

10.5 六边形 $AECDBF$ 内接于圆 Ω. 今知点 D 平分 $\overparen{BC}$, 而 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 有公共的内切圆.直线 BC 分别与线段 DF 和线段 DE 相交于点 X 和 Y, 而直线 EF 分别与线段 AB 和线段 AC 相交于点 Z 和 T. 证明: X,Y,T,Z 四点共圆.



证明 设内切圆圆心 I, 直线 BC, EF 交于 S.

则有: AID 共线. $\Rightarrow A$ 为 $\overparen{EF}$ 中点.

所以 $EFXY$ 共圆, $ZTCB$ 共圆.

$SX * SY = SE * SF = SB * SC = SZ * ST \Rightarrow XYZT$ 共圆. 得证. □

评注 本题是简单的几何题. 需要发现 A 为 $\overparen{EF}$ 中点 (这个结论也是可以诱导的). 然后通过弧中点反演的结构得到一些共圆.

10.6 黑板上写着三个相连的奇数. 试问: 这三个数被 2022 除的余数的和能否是某个质数?

解 不能.

注意到 $3 \mid 2022$, 并且三个连续奇数的和是 3 的倍数, 说明余数的和是 3 的倍数, 若是质数只能是 3.

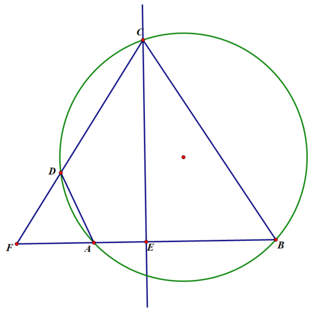
但是, 这三个数除以 2022 余数两两不同, 并且都是奇数. 说明余数的和至少是 $1+3+5$, 矛盾! 故不能. □

评注 本题是简单的数论题.

10.7 给定一个内接于圆的四边形 $ABCD$, 其中 $\angle A = 2\angle B$. 今知 $\angle C$ 的平分线与边 AB 相交于点 E. 证明: $AD + AE = BE$.

证明 设直线 CD, AB 交于 F. 则有:

$$\angle FDA = \angle CBA = \frac{1}{2}\angle DAB,$$



故 $\angle ADF=\angle F$, 即 $AD=AF$. 从而 $\angle F=\angle B$. 因此 CE 是 BF 中垂线. 故

$$AD+AE=AF+AE=EF=EB.$$

得证. □

评注 本题如何转化条件 $\angle A=2\angle B$ 是关键. 此处采用添加等腰三角形 ADF, 然后发现 CDF 共线. 当然, 使用计算法也可以轻松解决.

10.8 同 9.9.

10.9 在正 100 边形的各个顶点上分别放有一枚跳棋棋子, 棋子上按顺时针方向依次写有号码 $1,2,\cdots,100$.每一步允许交换两枚放在顶相邻顶点上的棋子的位置, 如果他们的号码之差不大于 k. 试问,对于怎样的最小的 k, 可以通过一系列的这种变换使得每一枚棋子最终都刚好在顺时针方向上移动了一个位置(相对于自己的初始位置而言).

解 答案为 50. 一般地, 把 100 改为 $2n$, 来证明答案是 n $(n>1)$.

构造: 若 $k=n$, 让 n 不断向着逆时针方向交换, 交换 $2n-1$ 次. 注意到, n 可以和任意数交换. 这样操作就成功了.

另一方面, 来证明 $k\geq n$.

来看每个数的“位移”的正负 (这里的位移是指: 看成一条无限长的序列, 周期地放置着这 $2n$ 个数. 每次一个被交换的数看作是向左或向右移动了一格. 位移的正负性是指一个数到达最终状态的位移是向左移动还是向右移动)

考虑一个位移正的数 x 和一个位移负的数 y. 它们在圆周上的运动会相遇. 这说明它们交换过.

考虑 $1,2n$, 若它们位移正负不同, 有 $k\geq 2n-1\geq n$.

若相同, 我们注意到所有数的位移和是 0, 因为每次操作的两个数一个位移 1, 一个位移 -1. 所有有一个数 x 与 1 的位移不同正负.

注意到 $\max\{x-1,2n-x\}\geq n$, 故有 $k\geq n$. □

综上, 答案为 50. □

评注 本题是有一定难度的组合题. 猜到答案本身并不容易, 可以通过看小的情况得到. 笔者解法的证明入手点是注意到一定有一个数会"绕远路", 从而会与许多数相遇.

奇数的做法相同.

10.10 同 9.10.

3 十一年级

11.1 同 9.1.

11.2 同 10.2.

11.3 在三棱锥 $ABCD$ 的面 BCD 和面 ACD 上分别取点 A' 和 B',使得 $\angle AB'C = \angle AB'D = \angle BA'C = \angle BA'D = 120°$. 今知直线 AA' 与直线 BB' 相交. 证明: 点 A' 与点 B' 到直线 CD 的距离相等.

证明 $ABA'B'$ 共面, 故 AA', BB', CD 共点. 记为 X.

只需证明 $\triangle A'CD \cong \triangle B'CD$.

由条件可得

$$\angle CA'X = \angle DA'X = 60°, \ \angle CB'X = \angle DB'X = 60°.$$

注意到, 在一个平面上固定点 C, D, X 三点共线, 则使得

$$\angle CTX = \angle DTX = 60°$$

的点 T 只有两个, 且两个 T 关于 CD 对称. 因为这样的 T 是以 CX 为圆心角为 $120°$ 的弦的圆和以 DX 为圆心角为 $120°$ 的弦的圆的交点.

故有 $\triangle A'CD \cong \triangle B'CD$. 得证. □

评注 本题要注意到把条件转化为 AA', BB', CD 共点, 之后转化为平面几何的知识求解. A', B' 实际上是费马点.

11.4 公司里某些人是朋友 (如果 A 是 B 的朋友, 则 B 也是 A 的朋友). 现知该公司的任何 101 个人中, 朋友对的数目都是奇数. 求试该公司人数的最大可能值.

解 答案为 102.

构造: 102 个人中取三个人 A, B, C, 他们间任两人互为朋友, 其余的任两人

均不为朋友.

验证: 若其中 101 人包含 A, B, C, 则 101 个人中朋友对数为 3; 若其中 101 人不包含 A, B, C 中某人 (不妨设为 A), 则 101 个人中朋友对数为 1. 成立!

证明: 假设人数为 n, $n \geq 103$. 构造图 G, 以这些人为顶点, 朋友关系连边. 则任 101 个点构成的诱导子图有奇数边.

对任意两两不同的四点 u, v, a, b, 它们之外至少有 99 个点. 任取其中 99 个点. 对这 99 个点和 u, a 运用条件, 以及对这 99 个点和 u, b 运用条件, 得到 a, b 向这 99 个点加上 u 连边数同奇偶.

同理有 a, b 向这 99 个点加上 v 连边数同奇偶. 这两个条件结合得到: a, b 向 $\{u, v\}$ 连边数同奇偶. 也就是说, a, b 两点向 $\{u, v\}$ 的连边情况要么相同, 要么相反. (即: b 要么仅连向 $\{u, v\}$ 中 a 连向的那些点, 要么仅连向 $\{u, v\}$ 中 a 不连的那些点)

固定 a, b, 注意到 $\{u, v\}$ 是任意选取的, 这说明 a, b 两点向 G 中其余 $n-2$ 个点的连边情况要么相同, 要么相反.

由简单的 Ramsey 定理知: 要么 G 有 K_3, 要么 G 的补图有 K_3. 事实上, 由于 $\binom{101}{2}$ 是偶数, 说明 G 的补图也满足题意. 故不妨设 G 有 K_3.

取出 G 的最大团 A, 有 A 中至少3个点. 注意到, $\binom{101}{2}$ 是偶数, 所以 G 中没有 K_{101}. 故 A 外有其他点. 对任意一点 x 不在 A 中, 由 A 是最大团, 存在 $y \in A$, x, y 不相邻. 对 $\forall z \in A, z \neq y$, 由于 z, y 相邻而 x, y 不相邻, 说明 x, z 向 G 中其余 $n-2$ 个点的连边情况相反, 说明 x 向 $G-\{z\}$ 中的点均不连边. 注意到 A 中至少3个点, 说明这样的 z 至少有两种选择. 故 x 向 A 中的点均不连边.

也就是说, A 外的点向 A 中均不连边.

对 $\forall x \notin A, y \in A$, x, y 向 G 中其余 $n-2$ 个点的连边情况相反. 而 y 向 A 外的点均不连边, 说明 x 向 A 外的其它点均连边. 这说明 A 外的点两两相邻.

于是 G 由两个独立的团组成.

另一方面, 任取其中 101 个点. 设其中两部分分别有 a, b 个点, $a+b=101$. 则边数为

$$\frac{a^2-a+b^2-b}{2}.$$

注意 a, b 一奇一偶, 故 $a^2+b^2 \equiv 1 \pmod 4$. 所以

$$\frac{a^2-a+b^2-b}{2} \equiv \frac{1-1}{2} \equiv 0 \pmod 2.$$

即边数为偶数, 矛盾! 于是证明了人数至多为 102. 综上, 所求为 102. $\square$

评注 本题是一道较为繁琐但基础的图论题. 注意时刻保持过程的严谨性.

11.5 设 S 是一个 100 元集合, 其中的元素都是不超过 10000 的正整数. 在空间中标出所有这样的点, 它们的三个坐标值都是 S 中的元素. 对于所标出的 1000000 个点中的每一个点 (x,y,z), 都给它贴上一个写有数 $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$ 的标签. 试问: 最多可有多少个标签上写着数 2?

解 答案为 14850.

证明: 对于 $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}=2$, 有

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})(-\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})=0.$$

故

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}=0,\ \sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}=0,\ -\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=0$$

之一成立. 显然不可能有两个同时成立.

称上面三式至少一个成立的 (x,y,z) 是好的. 对于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为两两不同的正整数, 记 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 表示好的 (x,y,z) 个数, 其中 $x,y,z\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

我们证明一个引理: $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le f(1^2,2^2,\cdots,n^2)$.

为此只需证明: $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 中第一个分量等于 a_i 的好对个数不多于 $f(1^2,2^2,\cdots,n^2)$ 中第一个分量等于 i 的好对个数. $i=1,2,\cdots,n$

考虑 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 中第一个分量等于 a_i 的好对. 若 a_i 是最大者, 则第二个分量仅有 $a_1,a_2,\cdots,a_{i-1}$ 这 $i-1$ 种选择. 第二个分量确定后, 第三个分量最多一种选择, 故至多 $i-1$ 种. 若 a_i 不是最大者, 则最大者仅有 $a_{i+1},\cdots,a_n$ 这 $n-i$ 种选择. 最大数位置有两种选择, 而确定了最大数后另一个分量至多一种选择, 故至多 $2(n-i)$ 种. 共计至多 $2n-i-1$ 种. 注意到, $f(1^2,2^2,\cdots,n^2)$ 中第一个分量等于 i 的好对在上述放缩中均取等号. 于是证明了这个引理.

通过证明我们也得到了下式:

$$f(1^2,2^2,\cdots,n^2)=\sum_{k=1}^{n}(2n-k-1)=\frac{3n(n-1)}{2}.$$

由引理, 好对个数至多 $\frac{3}{2}*9900=14850$.

构造: 取 $S=\{1^2,2^2,\cdots,100^2\}$, 则好对个数为 $\frac{3}{2}*9900=14850$.

综上, 答案为 14850. $\square$

评注　本题第一部分考验代数功底, 第二部分是简单的组合计数估计. 比较自然的想法是把正整数按非平方因子分成等价类再对每类估计, 最后放不等式. 这里给出的解答要简洁许多, 其想法是根据构造的特点卡取等.

11.6　同 9.6.

11.7　正整数 n 的各位数字的乘积等于 x, 而数 $n+1$ 的各位数字的乘积等于 y. 试问: 能否存在某个正整数 m, 它的各位数字的乘积等于 $y-1$, 而数 $m+1$ 的各位数字的乘积等于 $x-1$?

解　不能.

假设存在, 则 $x, y \geq 1$. 故 $n+1$ 个位不为 0, 说明加 1 时不进位.

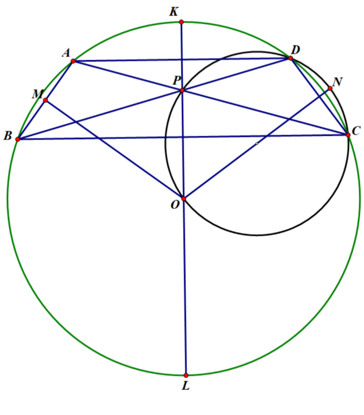
所以 $x<y$. 若 $m+1$ 运算时不进位, 说明 $y-1<x-1$,矛盾!

所以 $m+1$ 个位是 0, $x=1$. 故 n 每一位都是 1, 说明 $y=2$. 但是 m 个位是 9, m 的各位数字的乘积不能是 1, 矛盾! 故不能. □

评注　本题只需注意到 x, y 的大小关系即可.

11.8　同 10.9.

11.9　内接于圆 ω 的梯形 $ABCD$ 的两底是 AD 和 BC. 对角线 AC 与 BD 相交于点 P. 点 M 是线段 AB 的中点. 线段 AD 的中垂线与圆 ω 相交于点 K 和点 L. 点 N 是 $\triangle PCD$ 的外接圆上不包含点 P 的 $\overparen{CD}$ 的中点. 证明 K, L, M, N 四点共圆.



证明　$\angle DOC = 2\angle DBC = \angle DPC \Rightarrow O \in$ 圆 PCD. 又 $OC = OD$, 说明 O 是 $\triangle PCB$ 的外接圆上包含点 P 的 $\overparen{CD}$ 的中点.

若设 M' 是 M 关于 KL 的对称点, 则 M' 为 CD 中点. 且 $OM' * ON = OC^2$. 即 $OM * ON = OK * OL$. 结合 O 是 KL 中点, 说明 $KMLN$ 是一个调和四边

形, 当然有共圆. 得证. $\square$

评注 本题如果熟悉调和四边形对边中点的结构会比较简单. 还要猜到圆心在圆 PCD 上.

11.10 设 a,b,c,d 为非负实数, 有 $a+b+c+d=8$. 证明:

$$\frac{a^3}{a^2+b+c}+\frac{b^3}{b^2+c+d}+\frac{c^3}{c^2+d+a}+\frac{d^3}{d^2+a+b}\geq 4.$$

证明 作如下恒等变形:

$$\frac{a^3}{a^2+b+c}=a-\frac{a(b+c)}{a^2+b+c},$$

即其循环式. 故原始等价于

$$\frac{a(b+c)}{a^2+b+c}+\frac{b(c+d)}{b^2+c+d}+\frac{c(d+a)}{c^2+d+a}+\frac{d(a+b)}{d^2+a+b}\leq a+b+c+d-4=4.$$

由均值不等式, 有以下放缩:

$$\frac{a(b+c)}{a^2+b+c}\leq\frac{a(b+c)}{2\sqrt{a^2(b+c)}}=\frac{1}{2}\sqrt{b+c}.$$

故

$$\frac{a(b+c)}{a^2+b+c}+\frac{b(c+d)}{b^2+c+d}+\frac{c(d+a)}{c^2+d+a}+\frac{d(a+b)}{d^2+a+b}\leq\frac{1}{2}\sum\sqrt{a+b}.$$

由柯西不等式有

$$\sum\sqrt{a+b}\leq\sqrt{4\sum(a+b)}=8.$$

故有

$$\frac{a(b+c)}{a^2+b+c}+\frac{b(c+d)}{b^2+c+d}+\frac{c(d+a)}{c^2+d+a}+\frac{d(a+b)}{d^2+a+b}\leq 4.$$

得证. $\square$

评注 本题是中等难度的不等式. 本题若直接配均值或柯西似乎并不容易. 此解法运用了 Cauchy 求反技术, 做了一部恒等变形使得不等号方向变化.并注意取等条件就迎刃而解.