第四十三期问题征解解答与点评

张端阳

第一题 设 n 是正整数. 初始时将 $2n$ 个 0 或 1 在黑板上写成一行, 每次操作擦掉相邻偶数个 0 或相邻偶数个 1. 若最终所有数都被擦掉, 求最初所有可能排列的个数.

(北京二中学生 钱泽暄 供题)

解 1 (根据湖南雅礼中学肖宇豪同学的解答整理):

首先证明一个排列满足要求的充要条件是其奇数位与偶数位上的 1 的个数相同.

必要性: 因为每次擦掉的相邻偶数个 1(或 0)中恰有一半在奇数位、另一半在偶数位, 又最终所有数被擦完, 所以奇数位与偶数位上的 1 的个数相同.

充分性: 对 n 归纳. 当 $n=1$ 时显然成立, 假设 n 时成立, 来看 $n+1$ 时的情形.

显然存在两个 1 或两个 0 相邻, 否则此排列 $0,1$ 交替, 无法操作. 擦掉任两个相邻的 1 或 0 时, 余下 $2n$ 个数组成的排列仍满足条件. 故由归纳假设知最终所有数都被擦掉.

归纳得证.

对于一个满足要求的排列, 设其奇数位与偶数位均有 k 个 1, 其中 $k=0,1,\cdots,n$. 则这样的排列的个数为 $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2=\mathrm{C}_{2n}^n$. □

解 2 (根据海亮高级中学占昊恒同学的解答整理):

我们将这 $2n$ 个数中的第 $2,4,6,\cdots,2n$ 个数进行更换(1 换为 0, 0 换为 1).

注意到此时每次操作都是擦掉相邻的一个 0 和一个 1, 所以最后要么只剩下 0, 要么只剩下 1, 要么全都擦完. 于是擦完等价于初始 0 与 1 的个数相同, 有 C_{2n}^n 种排列. □

解 3 (根据海亮高级中学屠永乐同学的解答整理):

首先注意到最终结果与擦除顺序无关, 又最终没有相邻的 0 和 1, 所以一定余

下若干组 01 或 10(不能同时出现).

对非负整数 k, 称一个排列是 k 好的, 如果最终余下 k 组 01; 称一个排列是 $-k$ 好的, 如果最终余下 k 组 10.

对整数 k, 用 $f(n,k)$ 表示 k 好的排列的个数, 当 $|k|>n$ 时, 规定 $f(n,k)=0$.

下面对 n 归纳证明 $f(n,k)=\mathrm{C}_{2n}^{n+k}$.

当 $n=1$ 时, 易知 $f(1,0)=2, f(1,\pm1)=1$, 结论成立.

假设 $n\geq 2$ 且结论对 $n-1$ 成立, 来看 n 时的情形.

对于一个 k 好的排列, 若前两个数是 01, 则后面是 $n-1$ 时 $k-1$ 好的排列, 有 $f(n-1,k-1)$ 个; 若前两个数是 10, 则后面是 $n-1$ 时 $k+1$ 好的排列, 有 $f(n-1,k+1)$ 个; 若前两个数是 00 或 11, 则后面是 $n-1$ 时 k 好的排列, 各有 $f(n-1,k)$ 个. 于是有递推公式

$$f(n,k)=f(n-1,k-1)+f(n-1,k+1)+2f(n-1,k).$$

结合归纳假设得,

$$\begin{aligned} f(n,k)=&\mathrm{C}_{2n-2}^{n+k-2}+\mathrm{C}_{2n-2}^{n+k}+2\mathrm{C}_{2n-2}^{n+k-1}\\ =&\mathrm{C}_{2n-1}^{n+k-1}+\mathrm{C}_{2n-1}^{n+k}=\mathrm{C}_{2n}^{n+k}. \end{aligned}$$

从而结论对 n 成立.

特别令 $k=0$, 即得本题答案 C_{2n}^{n}. □

评注 华南师范大学附属中学戴子一, 人大附中李春进、马尧, 武昌实验中学徐新雨, 山东省实验中学孙永喆, 湖南雅礼中学周韬顺、陈实、杨轲屹、刘衎、刘恒瑞, 北京十一学校邹听雨、沈子钧、温元赫等同学也给出了本题的正确解答.

第二题 证明: 对任意整数 $n\geq 2$, 存在函数 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (其中 a,b,c,d 是实数, $ad\neq bc$), 使得

$$g(x)=f^{(1)}(x)f^{(2)}(x)\cdots f^{(n)}(x)$$

是常值函数.

注: $f^{(n)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 n 次迭代.

(人大附中学生 马尧 供题)

证明 (根据北京十一学校沈子钧、温元赫、邹听雨同学的解答整理):

当 $n=2$ 时, 取 $f(x)=\frac{1}{x}$, 则 $g(x)=\frac{1}{x}\cdot x=1$ 为常数, 满足要求.

当 $n\geq 3$ 时, 取 $f(x)=2\cos\frac{2\pi}{n}-\frac{1}{x}$.

记 $\omega=e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$, 先归纳证明, 对任意正整数 k,

$$f^{(k)}(x)=\frac{(\omega^{k+1}-\overline{\omega}^{k+1})x-(\omega^k-\overline{\omega}^k)}{(\omega^k-\overline{\omega}^k)x-(\omega^{k-1}-\overline{\omega}^{k-1})}.$$

事实上, 当 $k=1$ 时,

$$f(x)=\omega+\overline{\omega}-\frac{1}{x}=\frac{(\omega^2-\overline{\omega}^2)x-(\omega-\overline{\omega})}{(\omega-\overline{\omega})x-(\omega^0-\overline{\omega}^0)},$$

结论成立.

假设结论对 k 成立, 来看 $k+1$ 时的情形.

由归纳假设,

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=f^{(k)}(f(x))\\&=\frac{(\omega^{k+1}-\overline{\omega}^{k+1})(\omega+\overline{\omega}-\frac{1}{x})-(\omega^k-\overline{\omega}^k)}{(\omega^k-\overline{\omega}^k)(\omega+\overline{\omega}-\frac{1}{x})-(\omega^{k-1}-\overline{\omega}^{k-1})}\\&=\frac{(\omega^{k+2}-\overline{\omega}^{k+2})-\frac{1}{x}(\omega^{k+1}-\overline{\omega}^{k+1})}{(\omega^{k+1}-\overline{\omega}^{k+1})-\frac{1}{x}(\omega^k-\overline{\omega}^k)}\\&=\frac{(\omega^{k+2}-\overline{\omega}^{k+2})x-(\omega^{k+1}-\overline{\omega}^{k+1})}{(\omega^{k+1}-\overline{\omega}^{k+1})x-(\omega^k-\overline{\omega}^k)},\end{aligned}$$

结论成立.

归纳证毕.

回到原题. 此时

$$\begin{aligned}g(x)=\prod_{k=1}^{n}f^{(k)}(x)&=\prod_{k=1}^{n}\frac{(\omega^{k+1}-\overline{\omega}^{k+1})x-(\omega^k-\overline{\omega}^k)}{(\omega^k-\overline{\omega}^k)x-(\omega^{k-1}-\overline{\omega}^{k-1})}\\&=\frac{(\omega^{n+1}-\overline{\omega}^{n+1})x-(\omega^n-\overline{\omega}^n)}{(\omega-\overline{\omega})x-(\omega^0-\overline{\omega}^0)}=1\end{aligned}$$

为常数, 满足要求.

综上, 命题得证. □

评注 (1). 海亮高级中学占昊恒同学指出, $g(x)$ 可以等于任何非零常数.

事实上, 对 $C>0$, 当令

$$f(x)=\frac{C}{2\sqrt{C}\cos\frac{2\pi}{n}-x}$$

时, $g(x)=C^{\frac{n}{2}}$; 当令

$$f(x)=\frac{C}{2\sqrt{C}\cos\frac{\pi}{n}-x}$$

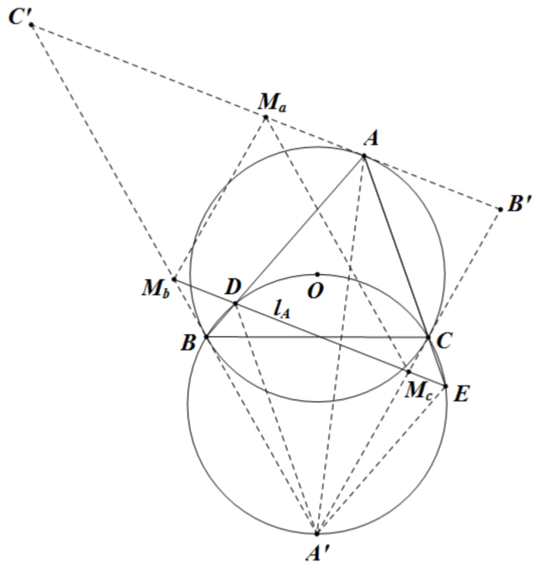
时, $g(x)=-C^{\frac{n}{2}}$.

(2). 华南师范大学附属中学戴子一, 人大附中胡殊闻, 山东省实验中学孙永喆, 湖南雅礼中学肖宇豪、周韬顺、杨轲屹、刘衎、刘恒瑞, 市立墨谷中学宫园薰等同学也给出了本题的正确解答.

第三题 设 $\triangle ABC$ 内接于圆 O, $\triangle BOC$ 的外接圆与直线 AB, AC 分别交于点 D, E. 记直线 DE 为 l_A, 类似定义 l_B, l_C. 设 l_A, l_B, l_C 围成 $\triangle PQR$. 证明: $\triangle PQR$ 的外接圆与圆 O 相切.

(北京大学学生 邹明轩 供题)

证明 1(根据湖南雅礼中学刘恒瑞同学的解答整理):



如图, 设圆 O 在 A, B, C 处的切线围成 $\triangle A'B'C'$, M_a, M_b, M_c 分别为 $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ 的中点.

易知 A' 在 $\triangle BOC$ 的外接圆上, 所以 A', B, D, C, E 五点共圆. 于是

$$\angle A'DB = \angle A'CB = \angle CAB,$$

所以 $A'D \parallel AC$. 同理, $A'E \parallel AB$, 所以四边形 $A'DAE$ 是平行四边形, 从而直线 DE 平分线段 $A'A$.

又由

$$\angle B'AC = \angle ABC = \angle DEC,$$

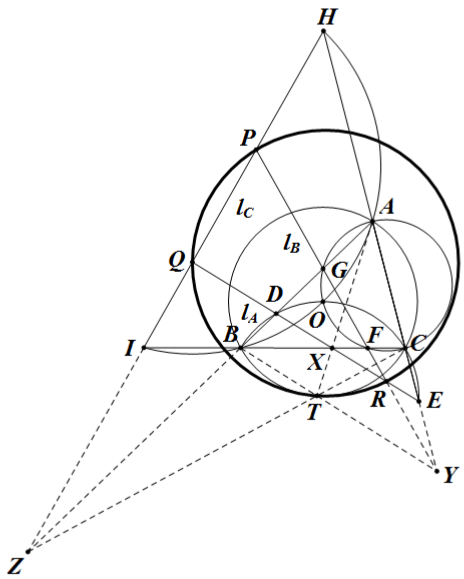
知 $DE \parallel B'C'$, 所以直线 DE 是 $\triangle A'B'C'$ 平行于 $B'C'$ 的中位线. 故 l_a 即为直线 M_bM_c.

这样, l_A, l_B, l_C 围成的三角形即为 $M_aM_bM_c$, 其外接圆是 $\triangle A'B'C'$ 的九点圆. 又圆 O 是 $\triangle A'B'C'$ 的内切圆, 故由费尔巴哈定理, 它们相切. $\square$

证明 2(根据湖南雅礼中学陈实同学的解答整理):

设 l_A 与 BC 交于点 X, l_B 与 CA 交于点 Y, l_C 与 AB 交于点 Z.

先证明 AX, BY, CZ 交于一点.



因为 B, D, O, C, E 共圆, 所以

$$\angle BDC = \angle BOC = 2A, \angle BEC = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 2A.$$

于是 $\angle ACD = \angle ABE = A$, 进而 $\angle BCD = C - A, \angle EBC = A - B$. 这样,

$$\frac{BX}{CX} = \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{BD \cdot BE}{CE \cdot CD} = \frac{\sin(C-A)}{\sin(A-B)} \cdot \frac{\sin C}{\sin B}.$$

同理,

$$\frac{CY}{AY} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(C-B)} \cdot \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{AZ}{BZ} = \frac{\sin(C-B)}{\sin(C-A)} \cdot \frac{\sin B}{\sin A}.$$

所以

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1,$$

故由塞瓦定理知 AX, BY, CZ 交于一点, 设交点为 T.

下面证明 T 即为 $\triangle PQR$ 的外接圆与圆 O 的切点.

首先, 为证 T 在圆 O 上, 由西姆松定理, 只需证明 T 在 AB, BC, CA 上的投影 H_C, H_A, H_B 共线. 再由张角定理, 只需证明

$$\frac{\sin \angle H_BTH_C}{TH_A} = \frac{\sin \angle H_CTH_A}{TH_B} + \frac{\sin \angle H_ATH_B}{TH_C}.$$

因为

$$\frac{TH_C}{TH_B} = \frac{d(X, AB)}{d(X, AC)} = \frac{\sin \angle XAB}{\sin \angle XAC} = \frac{BX}{CX} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{\sin(C-A)}{\sin(A-B)},$$

同理可得

$$TH_A \sin(C-B) = TH_B \sin(C-A) = TH_C \sin(A-B),$$

所以只需证明

$$\sin A \sin(C-B) = \sin B \sin(C-A) + \sin C \sin(A-B),$$

这由积化和差即证.

其次, 因为 B, D, C, E 共圆且 T 是 AX 与圆 O 的交点, 所以 T 是由直线 AB, BC, CA, l_A 围成四边形的密克点, 于是 T 在 $\triangle BDX, \triangle CEX, \triangle ADE$ 的外接圆上.

设直线 l_B 与 BC, AB 分别交于点 F, G, 直线 l_C 与 CA, BC 分别交于点 H, I, 则同理可得 T 在 $\triangle CFY, \triangle AGY, \triangle BFG, \triangle AHZ, \triangle BIZ, \triangle CHI$ 的外接圆上.

由 T 在 $\triangle CEX, \triangle CFY$ 的外接圆上, 知 T 是由直线 l_A, l_B, BC, CA 围成四边形的密克点, 所以 T 在 $\triangle RXF, \triangle RYE$ 的外接圆上.

同理, T 在 $\triangle PYH, \triangle PZG, \triangle QXI, \triangle QZD$ 的外接圆上.

由 T 在 $\triangle RXF, \triangle QXI$ 的外接圆上, 知 T 是由直线 l_A, l_B, l_C, BC 围成四边形的密克点, 故 T 在 $\triangle PQR$ 的外接圆上.

最后, 为了证明 $\triangle PQR$ 的外接圆与圆 O 在 T 处相切, 只需证明

$$\angle TAC - \angle TPR = \angle RTC.$$

事实上,

$$\begin{aligned}\angle TAC - \angle TPR =& \angle TAC - \angle THA = \angle HTA = \angle HZA \\ =& \angle HIB - \angle ZBI = A - B,\end{aligned}$$
$$\angle RTC = \angle YTC - \angle YTR = A - \angle AER = A - B.$$

综上, 命题得证. □

评注 (1). 市立墨谷中学宫园薰和华南师范大学附属中学戴子一同学证明了, 切点是 $\triangle ABC$ 欧拉线的逆斯坦纳点(即欧拉线关于 $\triangle ABC$ 三边对称直线的交点).

(2). 深圳中学邓博文、汪千桐, 湖南雅礼中学肖宇豪, 长郡中学陈柏康、杨谨瑜, 石家庄二中实验学校韩紫安, 山东省实验中学孙永喆, 人大附中马尧, 北京十一学校邹听雨、沈子钧、温元赫, 海亮高级中学占昊恒, 上海市实验学校董书睿, 华育中学陈修毅, 东北育才学校朱家庆等同学也给出了本题的正确解答.

第四题 *设素数 $p \geq 11$, S 是 $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ 的 $3p-3$ 元子集. 证明: 存在 S 的 $p-1$ 元子集 T, 使得 $\sum\limits_{x \in T} x = (0, 0)$, 其中加法在模 p 意义下.*

(北京大学学生 陈锐韬 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):

先证明一个引理.

引理 存在非负整数 x, y, z, 满足 $x + y + z = p - 1$, 且可以把 S 划分为非空集合

$$A_1, A_2, \cdots, A_x, B_1, B_2, \cdots, B_y, C_1, C_2, \cdots, C_z,$$

使得对任意 $1 \le i \le x$, A_i 中所有元素的第一个分量相同; 对任意 $1 \le j \le y$, B_j 中所有元素的第一个分量互不相同; 对 $1 \le k \le z$, $|C_k| = 1$, 且

$$\sum_{i=1}^{x} |A_i| = p - 1 + x, \quad \sum_{j=1}^{y} |B_j| = p - 1 + y.$$

证明 把 $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ 看作 p 行 p 列的点阵, 其中第一个分量对应列数, 第二个分量对应行数. 我们只需证明存在满足条件的 $A_1, A_2, \cdots, A_x$, 使得 $R := S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_x)$ 中元素在每列至多有 $p - 1 - x$ 个. 这是因为设含 R 中元素最多的列有 y 个元素, 把这 y 个元素分配给 $B_1, B_2, \cdots, B_y$ 各一个, 再从 R 中取出另 $p - 1$ 个元素, 把它们分配给 $B_1, B_2, \cdots, B_y$, 并把同列的元素分配给不同的 B_j(由每列有不超过 y 个元素知可以办到). 最后还有 $z := p - 1 - x - y$ 个元素形成 z 个单元集 $C_1, C_2, \cdots, C_z$.

下面来构造 $A_1, A_2, \cdots, A_x$.

取出含 S 中元素较多的 $\frac{p-1}{2}$ 列, 剩余每列至多有 $\frac{p-1}{2}$ 个元素, 否则元素总数不少于 $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 > 3p - 3$, 这里用到了 $p \ge 11$. 若剩余某列元素个数不少于 3, 则取出列元素的个数不少于 $\frac{3(p-1)}{2}$. 若剩余每列至多有 2 个元素, 则取出列元素的个数不少于 $(3p - 3) - 2 \cdot \frac{p+1}{2} \ge \frac{3(p-1)}{2}$.

设取出的列中有 w 列有元素, 则 $w \le \frac{p-1}{2}$. 把这 w 列元素记为 $U_1, U_2, \cdots, U_w$, 其中元素个数不少于 $\frac{p+3}{2}$ 的有 $U_1, U_2, \cdots, U_k$(k 可能为 0). 对 $1 \le i \le w$, 构造集合 $V_i \subseteq U_i$, 满足对 $1 \le i \le k$, $|V_i| = |U_i| - \frac{p-1}{2}$; 对 $k + 1 \le i \le w$, $|V_i| = 1$. 此时对 $1 \le i \le w$, $|U_i \setminus V_i| \le \frac{p-1}{2}$.

若 $\sum\limits_{i=1}^{w} |V_i| \le p - 1 + w$, 则取 $x = w$. 由于

$$\sum_{i=1}^{x} |U_i| \ge \frac{3(p-1)}{2} \ge p - 1 + x,$$

存在 $A_i (1 \le i \le x)$, 使得 $V_i \subseteq A_i \subseteq U_i$, $\sum\limits_{i=1}^{x} |A_i| = p - 1 + x$, 且 R 中元素在每列至多有 $\frac{p-1}{2} \le p - 1 - x$ 个, 满足要求.

若 $\sum\limits_{i=1}^{w} |V_i| \ge p + w$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{k} |V_i| \ge p + k$, 于是

$$\sum_{i=1}^{k} |U_i| \ge p + \frac{p+1}{2} k,$$

所以 $p+\frac{p+1}{2}k\le kp$ 且 $p+\frac{p+1}{2}k\le 3p-3$. 由前者知 $k>2$, 由后者知 $k<4$, 故 $k=3$. 此时取 $x=3$, 因为 $|U_1|,|U_2|,|U_3|\ge\frac{p+3}{2}>4$, $|U_1|+|U_2|+|U_3|\ge p+\frac{p+1}{2}\cdot 3>p+2$, 所以对 $1\le i\le 3$, 存在 $A_i\subseteq U_i$, 使得 $|A_i|\ge 4, |A_1|+|A_2|+|A_3|=p+2$, 这里用到了 $p\ge 11$. 这样 R 中元素在每列至多有 $p-4$ 个, 满足要求.

引理证毕.

回到原题. 由引理中的划分, 设 $P=A_1+A_2+\cdots+A_x$, 则 P 中元素第一个分量相同, 可只看第二分量. 由 Cauchy-Davenport 定理,

$$|P|\ge\min\{p,|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_x|-(x-1)\}=p,$$

故 P 为某一列的全部元素.

设 $Q=B_1+B_2+\cdots+B_y$, $Q^*,B_1^*,\cdots,B_y^*$ 是 $Q,B_1,\cdots,B_y$ 在第一个分量上的投影, 则 $Q^*=B_1^*+B_2^*+\cdots+B_y^*$. 由 Cauchy-Davenport 定理,

$$|Q^*|\ge\min\{p,|B_1^*|+|B_2^*|+\cdots+|B_y^*|-(y-1)\}=p,$$

所以每列均有 Q 中的元素.

因此 $P+Q=\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$, 从而

$$A_1+\cdots+A_x+B_1+\cdots+B_y+C_1+\cdots+C_z=\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p.$$

故可从上面每个集合中各取一个元素, 组成集合 T, 使得 $\sum\limits_{x\in T}x=(0,0)$. 又 $|T|=x+y+z=p-1$, 所以 T 满足要求.

综上, 命题得证. $\square$

评注 (1). 供题者对本题有如下评注.

本题源于对 Erdös-Ginzburg-Ziv 定理的讨论: *任意 $2p-1$ 个整数中存在 p 个数的和是 p 的倍数*. 一种证明方式是, 如果其中有 p 个数模 p 同余, 则这 p 个数的和即是 p 的倍数; 如果没有, 则把 $2p-1$ 个数拆成 $p-1$ 个两元集和 1 个一元集, 可以证明这些集合的加和取遍模 p 的所有余数.

解决本题的难点是想到先加出一条线, 即用 A_i 的加和得到 P, 其第一分量相同, 第二分量可以取遍所有余数; 再铺到平面, 即再加上 B_i, 让第一分量可以取遍所有余数. 这样的两步都是一维的问题, 可以用 Cauchy-Davenport 定理解决. 另一部分就是细致讨论如何找到满足这样条件的划分.

(2). Erdös-Ginzburg-Ziv 定理的二维版本称为 Kemnitz 猜想: *平面上任意 $4n-3$ 个整点中存在 n 个点的重心也是整点*. 于 2003 年证明.

(3). 山东省实验中学孙永喆同学也给出了本题的正确解答.