例说“双标限定”中求和顺序的交换

冯跃峰

在“组合求和”中, 交换求和顺序, 是一种常见变形方式. 如果求和限定只涉及一个参数, 则我们称之为“单标限定”的求和形式.

对于 “单标限定” 的多层组合求和, 交换求和顺序是非常简单的, 直接交换求和符号的位置即可. 比如 :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}.$$

如果求和限定涉及多个参数, 则我们称之为 “双标限定” 的求和形式.

“双标限定” 的求和形式中, 参数限定的一般描述为: $f(i,\ j)$ 具有性质 p, 比如: $i+j\leq n$, $i<j$ 等等.

值得指出的是,“双标限定”在单一求和中的意义是不明确的. 比如, 你能看出“$S=\sum\limits_{i|k,\ j|k}1$”表达的是什么意思吗?

如果是对 i、j 求和, 则 S 表示: k 的约数对 $(i,\ j)$ 的个数; 如果是对数对 k 求和, 则 S 表示: i、j 的公倍数的个数.

因此, 双标限定通常出现在多级求和的内层中, 其一般形式为

$$\sum_{i\text{ 具有性质 }p}\ \sum_{f(i,\ j)\text{具有性质 }q}.$$

因为外层的流动参数为 i (对 i 求和), 求和过程使内层的参数 i 相对固定, 从而内层的流动参数为 j (对 j 求和).

比如, 多级求和“$\sum\limits_{\text{奇数 }k\leq n}\ \sum\limits_{i|k,\ j|k}1$”中, 因为外层对 k 求和, 当 k 取定后, 假定 $k=3$, 则内层表达的意义是: 3 的约数对 $(i,\ j)$ 的个数. 即 $\sum\limits_{i|3,\ j|3}1=4$, 这是因为约数对 $(i,\ j)=(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3)$.

对于含有双标限定的求和顺序的交换, 并非简单地交换求和符号的位置, 需遵循下述规则.

修订日期: **2022-02-22.**

【交换顺序规则】 对于多级求和 $\sum\limits_{i\text{ 具有性质 }p} f(i,\ j) \sum\limits_{j\text{具有性质 }q}$, 将外层的流动参数 i 移到内层时, 还必须同时受到内层求和对 i 的限定, 所以需取两个限定的交集, 作为对 i 的新限定. 将内层的流动参数 j 移到外层时, 还必须同时考虑外层求和中 j 的流动, 所以需取两个限定的并集, 作为对 j 的新限定.

简言之: 内到外求并; 外到内求交.

下面以矩阵的“上三角”求和为例说明之.

对于矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$, 其上三角求和为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n}a_{ij}$, 它的内层求和含有双标限定.

如何交换其求和顺序? 有些同学对此很难准确把握, 其实很简单, 只需按照前述规则进行即可, 无需借助几何直观.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,\ n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,\ 1} & a_{n-1,\ 2} & \cdots & a_{n-1,\ n-1} & a_{n-1,\ n} \\ a_{n,\ 1} & a_{n,\ 2} & \cdots & a_{n,\ n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为便于计算两个限定的交与并, 先将限定换成集合的“描述表示”形式 :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{ij}=\sum_{1\le i\le n}\ \sum_{n\ge j\ge i}a_{ij}.$$

将内层的 j 移到外层, 由 $1\le i\le n,\ i\le j\le n$ 求并, 得 $j\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}[i,\ n]=[1,n]$, 外层求和变成 $\sum\limits_{1\le j\le n}$.

将外层的 i 移到内层, 由 $1\le i\le n,\ i\le j\le n$ 求交, 得 $i\in[1,\ n]\cap[1,\ i]=[1,\ i]$, 内层求和变成 $\sum\limits_{1\le i\le j}$.

于是,

$$\sum_{1\le i\le n}\ \sum_{n\ge j\ge i}a_{ij}=\sum_{1\le j\le n}\ \sum_{1\le i\le j}a_{ij},$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n}a_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j}a_{ij}$.

下面介绍一个数论中涉及“双标限定”组合求和的例子.

【题目】 设无穷实数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1$, 试证: 对任何整数 $n\ge 2$, 有

$$\sum_{i|n}\sum_{j|n}\frac{x_ix_j}{[i,j]}\ge\prod_{\text{质数 }p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

其中 $\sum\limits_{i|n}$ 表示对 n 的所有正因子 i 求和, $[i,j]$ 表示 i、j 的最小公倍数, $\prod\limits_{\text{质数 }p|n}$ 表

示对 n 的所有质因子 p 求积. (2018 中国女子数学奥林匹克)

【述评】 本题非常优美, 其结论仅与 x_1 相关(其它项可任意取值), 这几乎不可思议! 这也是造成一些人解题失败的重要原因.

虽然它的样子非常吓人, 但实际上是只“纸老虎”. 比如, 官方给出的解答本身就很简短, 可谓寥寥数语, 一气呵成 [1]:

【证明】 注意到, 对 n 的因子 i、j, 从 1 到 n 的整数中能被 $[i,j]$ 整除的数的个数为 $\dfrac{n}{[i,j]}$, 即有

$$\frac{n}{[i,j]}=\sum_{[i,j]|k,\ k\le n}1.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{i|n,\ j|n}x_ix_j\frac{n}{[i,j]}&=\sum_{i|n,\ j|n}x_ix_j\sum_{[i,j]|k,\ k\le n}1=\sum_{i|n,\ j|n}x_ix_j\sum_{i|k,\ j|k,\ k\le n}1\\&=\sum_{k\le n}\sum_{i|(n,\ k)}\sum_{j|(n,\ k)}x_ix_j=\sum_{k\le n}\left(\sum_{i|(n,\ k)}x_i\right)^2\\&\ge\sum_{k\le n,\ (k,n)=1}\left(\sum_{i|(n,\ k)}x_i\right)^2=\sum_{k\le n,\ (k,\ n)=1}{x_1}^2=\varphi(n),\end{aligned}$$

其中 $\varphi(n)$ 是欧拉 (Euler) 函数, 即 1, 2, $\cdots$, n 中与 n 互素的数的个数. 熟知

$$\varphi(n)=n\prod_{\text{质数 }p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

这就完成了证明. □

但过细一看, 其组合运算也有点吓人, 相关符号的含义比较抽象. 假设你读到这个解答, 你会怎样处理？

常言道, 他山之石, 可以攻玉. 但数学阅读, 也颇有讲究, 通常可分为 3 个层次[2]: 第一个层次是读懂. 如果读不懂, 则说明存在知识的缺陷, 需要完善.

对于本题, 如果你存在阅读困难, 则很有可能是没有了解如下一些相关的背景知识 (涉及多方面的知识, 内容较为丰富).

(1) 组合求和(积)的两种表达方式.

(i) 普通方式: 下标流动, 如 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, $\sum\limits_{i\in \mathrm{I}}x_i$, $\sum\limits_{1\le i<j\le n}a_{ij}$ 等；

(ii) 简略方式: 代表元流动, 一般可表示为 $\sum\limits_{x\in A}f(x)$. 特别地, $f(x)=1$ 时, 求和变成 $\sum\limits_{x\in A}1=|A|$.

题中的求积“$\prod\limits_{\text{质数 } p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$”采用的就是“简略方式”, 它实际上就是 $\prod\limits_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$, 其中 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$.

(2)“双标限定”交换求和顺序的规则(如前面所述) ;

(3) 相关的数论知识 :

欧拉函数定义: $\varphi(n)=\sum\limits_{k\le n,\ (k,\ n)=1} 1$;

欧拉函数计算公式:

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\text{(下标 } i \text{ 流动, 其中 } n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\text{)}\\ &=n\prod_{\text{质数 } p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\text{(代表元 } p \text{ 流动) ;}\end{aligned}$$

公倍数的性质:“a、b 的最小公倍数”整除“a、b 的公倍数” (利用质因数标准分解式即可看出), 由此便有

$$a\mid k,\ b\mid k\Leftrightarrow k\text{是}a\text{、}b\text{的公倍数}\Leftrightarrow [a,\ b]\mid k.$$

公约数的性质:“a、b 的公约数”整除“a、b 的最大公约数”(利用质因数标准分解式即可看出), 由此便有

$$k\mid a,\ k\mid b\Leftrightarrow k \text{ 是 } a\text{、}b \text{ 的公倍数 } \Leftrightarrow k\mid (a,\ b).$$

(4) 计数公式

$x\ge 1$、$a\in\mathbb{N}^*$ 时, $\left[\dfrac{x}{a}\right]$ 是 $[1,\ x]$ 中被 a 整除的数的个数:

$$\left[\frac{x}{a}\right]=\sum_{1\le k\le x,\ a|k}1.$$

它的详细表示为 $\sum\limits_{1\le k\le x,\ k\in\mathbb{N}} f(k)$, 其中 $f(k)=\begin{cases}1\ (a\mid k),\\ 0\ (a\nmid k).\end{cases}$

特别地, $x\ge 1$ 时, $[x]$ 是 $[1,\ x]$ 中格点(整数)的个数: $[x]=\sum\limits_{1\le k\le x,\ k\in\mathbb{N}}1$.

(5) 多项式乘法规则

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in A}x_ix_i=\sum_{i\in A}x_i\sum_{j\in A}x_j=\left(\sum_{i\in A}x_i\right)^2.$$

比如: $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_ix_j=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2$.

如果熟悉上述一些知识, 读懂解答就是轻而易举的了. 当然, 原文排版有一处笔误: 漏掉一个“平方”符号(见文[1]).

阅读的第二层次是, 弄清其解答究竟是怎样想出来的. 下面, 我们着重剖析

上述解答的发现过程.

【题感】 从条件看, 它过于简单, 先略去.

从目标看, 局部结构是我们非常熟悉的. 比如, 不等式右边就是我们的老朋友：

$$\prod_{\text{质数 } p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\varphi(\mathrm{n})/n.$$

由此想到先"去分母", 将不等式化简.

【结构联想】 不等式等价于 $\sum\limits_{i|n}\sum\limits_{j|n}\dfrac{n}{[i,j]}x_ix_j\geq\varphi(n)$.

再看不等式的左边, 此时也出现了熟悉结构: $\dfrac{n}{[i,j]}$ 的意义为 $[1,\ n]$ 中被 $[i,j]$ 整除的数的个数(其中注意 $i\mid n,\ j\mid n\Leftrightarrow[i,j]\mid n\Leftrightarrow\dfrac{n}{[i,j]}$ 为整数).

$\dfrac{n}{[i,j]}=\sum\limits_{1\leq k\leq n,\ [i,j]|k}1$ (1到 n 中被 $[i,j]$ 整除的数 k 的个数).

【参数转换】 不等式可变成 $\sum\limits_{i|n}\sum\limits_{j|n}\left(\sum\limits_{1\leq k\leq n,\ [i,j]|k}1\right)x_ix_j\geq\varphi(n)$.

至此, 自然想到交换求和顺序, 将内外层求和对 i、j 的限定融合在一起, 分离参数以便利用多项式乘法法则.

此外, 为使其限定与外层求和的限定一致, 需要将对 i、j 限定的"捆绑形式"$[i,j]\mid k$, 转换为"独立形式": $i\mid k$、$j\mid k$ (由公倍数的性质, 这两个对 i、j 的限定是等价的). 再将其与外层求和中"$i\mid n,\ j\mid n$"求交, 变成 $i\mid(n,\ k)$, $j\mid(n,\ k)$.

于是,

$$\begin{aligned}\sum_{i|n}\sum_{j|n}\left(\sum_{1\leq k\leq n,\ [i,j]|k}1\right)x_ix_j&=\sum_{i|n}\sum_{j|n}\sum_{1\leq k\leq n,\ i|k,\ j|k}x_ix_j\\&=\sum_{1\leq k\leq n}\sum_{i|(n,\ k)}\sum_{j|(n,\ k)}x_ix_j.\end{aligned}$$

【换维思考】 交换求和顺序, 不等式变成 $\sum\limits_{1\leq k\leq n}\sum\limits_{i|(n,\ k)}\sum\limits_{j|(n,\ k)}x_ix_j\geq\varphi(n)$.

至此, 已成功分离参数, 可直接利用多项式乘法法则.

【结构联想】 不等式变成 $\sum\limits_{1\leq k\leq n}\sum\limits_{i|(n,\ k)}x_i\sum\limits_{j|(n,\ k)}x_j\geq\varphi(n)$, 即

$$\sum_{1\leq k\leq n}\left(\sum_{i|(n,\ k)}x_i\right)^2\geq\varphi(n).$$

至此, 不等式已是最简形式. 现在设法代入已知条件: $x_1=1$, 这只需将 x_1 从求和中分离出来即可. 但此处有一个陷阱: 不能在内层求和中分拆, 而要在外层

求和中分拆. 这是因为 $x_i\ (i>1)$为实数, 未必为正, 无法进行“舍项放缩”.

比如, 下述推理是错误的: $\sum\limits_{1\le k\le n}\left(\sum\limits_{i|(n,\ k)} x_i\right)^2 \ge \sum\limits_{1\le k\le n}(x_1)^2$.

如果瞄准目标, 就可避免跌入上述陷阱.

由欧拉函数定义: $\varphi(n)=\sum\limits_{k\le n,\ (k,\ n)=1} 1$, 不等式变为

$$\sum_{1\le k\le n}\left(\sum_{i|(n,\ k)} x_i\right)^2 \ge \sum_{k\le n,\ (k,\ n)=1} 1.$$

考察左边与右边的差异, 只需将左边的外层求和中分离出满足 $(k,\ n)=1$ 的 k 对应的项即可, 其余的项舍弃.

【舍项放缩】

$$\begin{aligned}\sum_{1\le k\le n}\left(\sum_{i|(n,\ k)} x_i\right)^2 &= \sum_{1\le k\le n,\ (k,\ n)=1}\left(\sum_{i|(n,\ k)} x_i\right)^2+\sum_{1\le k\le n,\ (k,\ n)\ne 1}\left(\sum_{i|(n,\ k)} x_i\right)^2\\ &\ge \sum_{1\le k\le n,\ (k,\ n)=1}\left(\sum_{i|(n,k)} x_i\right)^2=\sum_{1\le k\le n,\ (k,\ n)=1}(x_1)^2\\ &=\sum_{k\le n,\ (k,\ n)=1} 1=\varphi(n).\end{aligned}$$

证毕.

【新写】

$$\begin{aligned}n\sum_{i|n}\sum_{j|n}\frac{x_ix_j}{[i,j]} &= \sum_{i|n}\sum_{j|n}\frac{n}{[i,\ j]}x_ix_j=\sum_{i|n}\sum_{j|n}\left(\sum_{1\le k\le n,\ [i,j]|k} 1\right)x_ix_j\\ &=\sum_{i|n}\sum_{j|n}\sum_{1\le k\le n,\ i|k,\ j|k} x_ix_j=\sum_{1\le k\le n}\sum_{i|(n,\ k)}\sum_{j|(n,\ k)} x_ix_j\\ &=\sum_{1\le k\le n}\sum_{i|(n,\ k)}\sum_{j|(n,\ k)} x_ix_j=\sum_{1\le k\le n}\left(\sum_{i|(n,\ k)} x_i\right)^2\\ &\ge \sum_{1\le k\le n,\ (k,\ n)=1}\left(\sum_{i|(n,\ k)} x_i\right)^2=\sum_{1\le k\le n,\ (k,\ n)=1}(x_1)^2\\ &=\sum_{k\le n,\ (k,\ n)=1} 1=\varphi(n)=n\prod_{\text{质数}\ p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right),\end{aligned}$$

证毕. □

阅读的第三层次是创新. 比如: 上述解答能否简化? 有没有思想相同、但表现方式不一样的新解答? 能不能用这一方法解决其它问题? 比如, 2021 年中国女

子数学竞赛中的一个组合求和问题, 这些都留给读者思考.

参考文献

[1] 2019 年 IMO 中国国家集训队教练组, 走向 IMO: 数学奥林匹克试题集锦 (2019)[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2019 年 10 月.

[2] 冯跃峰, 数学阅读的三个层次 [A]. 冷岗松主编, 数学竞赛问题与感悟, 第二卷: 研究文集(上) [C], 华东师范大学出版社, 2019 年 5 月.