第四十二期问题征解解答与点评

张端阳

第一题 求所有的整数 $n \geq 2$, 使得可以将 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有置换编号为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n!}$, 满足对任意 $j (1 \leq j \leq n!)$, 均有

$$\sigma_j(k) \neq \sigma_{j+1}(k), \quad \forall\, k \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

其中 $\sigma_{n!+1} = \sigma_1$.

(上海大学 冷岗松 供题)

解 (根据清华大学王一川同学的解答整理):

易知 $n=2$ 满足要求, $n=3$ 不满足要求. 下面证明 $n \geq 4$ 均满足要求.

称 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 与 $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的 "错位置换", 如果对任意 $1 \leq k \leq n$ 都有 $p_k \neq q_k$.

作简单图 G, G 的顶点是 $1, 2, \cdots, n$ 的所有置换, 在错位置换之间连边. 本题即证 G 中有哈密顿圈.

注意到 G 中有 $(n-1)!$ 个 $n-$团:

$$G(\varphi) = \{(x, x+\varphi(1), \cdots, x+\varphi(n-1)) \mid x = 1, 2, \cdots, n\},$$

这里 φ 取遍 $1, 2, \cdots, n-1$ 的所有置换.

熟知 $1, 2, \cdots, n-1$ 的每个置换恰有

$$(n-1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) < \frac{(n-1)!}{2}$$

个错位置换. 由 Dirac 定理, 可将 $1, 2, \cdots, n-1$ 的所有置换排成一圈 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{(n-1)!}$, 使得任意相邻两个不是错位置换.

对 $1 \leq i \leq (n-1)!$, 因为 φ_i 与 φ_{i+1} 不是错位置换 ($\varphi_{(n-1)!+1} = \varphi_1$), 所以存在 $1 \leq k \leq n-1$ 使 $\varphi_i(k) = \varphi_{i+1}(k)$. 这样, 对任意 $1 \leq x \leq n$, 存在 $1 \leq y \leq n$, 使得

$$x - y \not\equiv 0, \varphi_i(1) - \varphi_{i+1}(1), \cdots, \varphi_i(n-1) - \varphi_{i+1}(n-1) \pmod n,$$

此时 $(x, x+\varphi_i(1), \cdots, x+\varphi_i(n-1))$ 与 $(y, y+\varphi_{i+1}(1), \cdots, y+\varphi_{i+1}(n-1))$ 连边.

从而 $G(\varphi_i)$ 与 $G(\varphi_{i+1})$ 之间有 n 条边构成匹配.

现在, 可依次选取边 $e_1, e_2, \cdots, e_{(n-1)!}$, 使得它们两两无公共顶点且 e_i 连结 $G(\varphi_i)$ 与 $G(\varphi_{i+1})$. 因为 $G(\varphi_1), G(\varphi_2), \cdots, G(\varphi_{(n-1)!})$ 都是 $n-$团, 所以由此便能得到 G 的一个哈密顿圈.

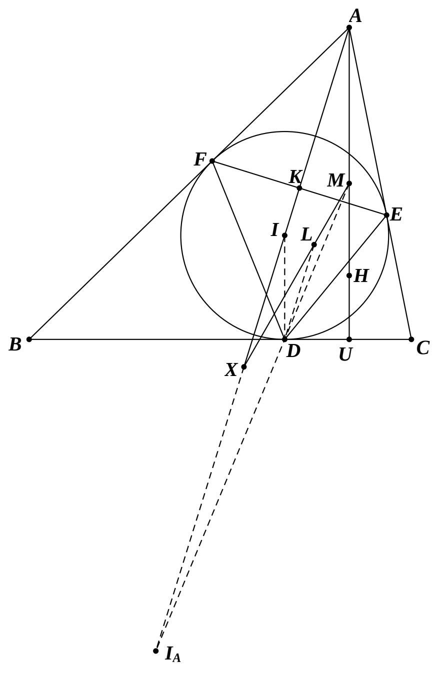
综上, 所求为所有大于 1 且不等于 3 的整数. □

评注 新星征解第七期第四题和第 32 届冬令营第四题也是有关全体排列的结构的问题.

第二题 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I, 内切圆 $\odot I$ 与 BC, CA, AB 分别切于点 D, E, F. 设 L 是 $\triangle DEF$ 的垂心, H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, AH 与 BC 交于点 U, M 为 AU 的中点, ML 与 AI 交于点 X. 证明: I, X, H, U 四点共圆.

(华南师大附中学生 戴子一 复旦大学学生 张泽豪 供题)

证明 (根据清华大学严君啸同学的解答整理):



只需证明 $AI \cdot AX = AH \cdot AU$.

延长 AI, MD 交于点 I_A, 熟知 I_A 是 $\triangle ABC$ 角 A 内的旁心.

易知

$$AH \cdot AU = AB \cdot AC \cdot \cos A = AI \cdot AI_A \cdot \cos A,$$

于是只需证明

$$AX = AI_A \cdot \cos A.$$

事实上, 因为 $LD \parallel XI_A, ID \parallel AM$, 所以

$$XI_A = LD \cdot \frac{MI_A}{MD} = LD \cdot \frac{AI_A}{AI}.$$

设 K 是 EF 的中点, 则

$$LD = 2IK = 2AI\sin^2\frac{A}{2},$$

于是

$$\frac{XI_A}{AI_A} = \frac{LD}{AI} = 2\sin^2\frac{A}{2}.$$

故

$$\frac{AX}{AI_A} = 1 - \frac{XI_A}{AI_A} = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \cos A.$$

综上, 命题得证. □

评注 (1). 供题者指出, 若设 BH 与 AC 交于点 V, CH 与 AB 交于点 W, 则 X 是 $\triangle AVW$ 角 A 内的旁心.

(2). 东北育才学校朱家庆, 青岛二中高林凯, 深圳中学吴家睿, 长郡中学杨谨瑜等同学也给出了本题的正确解答.

第三题 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2021}$ 是非负实数, 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2021} = 1$. 求

$$\sum_{i=1}^{2021} \min\{a_i, a_{i+1}\} \cdot \min\{a_{i+1}, a_{i+2}\}$$

的最大值, 其中 $a_{2022} = a_1, a_{2023} = a_2$.

(温州育英国际实验学校学生 林逸沿 供题)

解 (根据北京大学黄嘉俊同学的解答整理):

将 2021 换为一般的整数 $n \geq 3$, 并记

$$S = \sum_{i=1}^{n} \min\{a_i, a_{i+1}\} \cdot \min\{a_{i+1}, a_{i+2}\},$$

我们证明

$$S_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{8}, & n \geq 8; \\ \frac{1}{n}, & 3 \leq n \leq 7. \end{cases}$$

一方面, 当 $3 \leq n \leq 7$ 时, 取 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$, 则 $S = \frac{1}{n}$.

当 $n \geq 8$ 时, 取 $a_1 = \alpha, a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \beta, a_6 = \cdots = a_n = 0$, 其中 α, β 是和为 $\frac{1}{4}$ 的非负实数, 则

$$S = \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{16} + \frac{\beta}{4} = \frac{1}{8}.$$

另一方面, 记 $b_i=\min\{a_i,a_{i+1}\}$, 下面证明

$$\sum_{i=1}^{n} b_i b_{i+1} \le \begin{cases} \frac{1}{8}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2, & n\ge 8; \\ \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2, & 3\le n\le 7. \end{cases}$$

先证明对任意 $n\ge 3$,

$$\sum_{i=1}^{n-2} b_i b_{i+1} \le \frac{1}{8}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2. \tag{$*$}$$

当 $n=5$ 时, 由对称性, 不妨设 $b_2\le b_3$. 则

$$\begin{aligned} b_1b_2+b_2b_3+b_3b_4 &\le (b_1+b_2+b_4)b_3 \\ &\le \frac{1}{8}(b_1+b_2+b_4+2b_3)^2 \\ &\le \frac{1}{8}(a_1+a_2+a_5+a_3+a_4)^2. \end{aligned}$$

当 $n=4$ 时, 对 $a_1,a_2,a_3,a_4,0$ 应用 5 个数的情形即可.

当 $n=3$ 时, 对 $a_1,a_2,a_3,0,0$ 应用 5 个数的情形即可.

下面对 n 归纳. 假设 $n\ge 6$ 且 $3\sim n-1$ 时结论成立, 来看 n 时的情形.

记

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{1}{8}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2-\sum_{i=1}^{n-2} b_i b_{i+1}.$$

设 $d=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 我们希望将一个 a_i 调整至 0, 即证

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\ge f(a_1-d,a_2-d,\cdots,a_n-d).$$

记 $a_i'=a_i-d, b_i'=b_i-d$, 则 $a_i'\ge 0, b_i'=\min\{a_i',a_{i+1}'\}$, 且

$$\begin{aligned} f(a_1,a_2,\cdots,a_n) &= \frac{1}{8}(a_1'+a_2'+\cdots+a_n'+nd)^2-\sum_{i=1}^{n-2}(b_i'+d)(b_{i+1}'+d) \\ &= \frac{1}{8}(a_1'+a_2'+\cdots+a_n')^2+\frac{n}{4}(a_1'+a_2'+\cdots+a_n')d+\frac{n^2}{8}d^2 \\ &\quad -\sum_{i=1}^{n-2} b_i'b_{i+1}'-\left(b_1'+2\sum_{i=2}^{n-2} b_i'+b_{n-1}'\right)d-(n-2)d^2, \end{aligned}$$

$$f(a_1-d,a_2-d,\cdots,a_n-d)=\frac{1}{8}(a_1'+a_2'+\cdots+a_n')^2-\sum_{i=1}^{n-2} b_i'b_{i+1}'.$$

于是只需证明

$$\frac{n}{4}(a_1'+a_2'+\cdots+a_n')d+\left(\frac{n^2}{8}-n+2\right)d^2\ge\left(b_1'+2\sum_{i=2}^{n-2} b_i'+b_{n-1}'\right)d.$$

因为 $\frac{n^2}{8}-n+2\ge 0, d\ge 0$, 所以只需证明

$$\frac{n}{4}(a_1'+a_2'+\cdots+a_n')\ge b_1'+2\sum_{i=2}^{n-2} b_i'+b_{n-1}'.$$

当 $n=6$ 时,

$$b_1'+2b_2'+2b_3'+2b_4'+b_5'\le a_1'+2\cdot\frac{3a_2'+a_3'}{4}+2\cdot\frac{a_3'+a_4'}{2}+2\cdot\frac{a_4'+3a_5'}{4}+a_6'$$
$$\le\frac{3}{2}(a_1'+a_2'+a_3'+a_4'+a_5'+a_6').$$

当 $n=7$ 时,

$$\begin{aligned}&b_1'+2b_2'+2b_3'+2b_4'+2b_5'+b_6'\\ \le\ &a_1'+2\cdot\frac{7a_2'+a_3'}{8}+2\cdot\frac{9a_3'+7a_4'}{16}+2\cdot\frac{7a_4'+9a_5'}{16}+2\cdot\frac{a_5'+7a_6'}{8}+a_7'\\ \le\ &\frac{7}{4}(a_1'+a_2'+a_3'+a_4'+a_5'+a_6'+a_7').\end{aligned}$$

当 $n\ge 8$ 时,

$$b_1'+2\sum_{i=2}^{n-2}b_i'+b_{n-1}'\le a_1'+2\sum_{i=2}^{n-2}a_i'+a_{n-1}'\le\frac{n}{4}(a_1'+a_2'+\cdots+a_n').$$

从而我们可以设 a_i 中有一个为 0.

(1) 当 $a_1=0$ (或 $a_n=0$) 时, 对 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 用归纳假设得,

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{1}{8}(a_2+\cdots+a_n)^2-\sum_{i=2}^{n-2}b_ib_{i+1}\ge 0.$$

(2) 当 $a_2=0$ (或 $a_{n-1}=0$) 时, 对 $a_3,a_4,\cdots,a_n$ 用归纳假设得,

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\ge\frac{1}{8}(a_3+\cdots+a_n)^2-\sum_{i=3}^{n-2}b_ib_{i+1}\ge 0.$$

(3) 当 $a_3=0$ (或 $a_{n-2}=0$) 时, 对 $a_4,\cdots,a_n$ 用归纳假设得,

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\ge\frac{1}{8}(a_4+\cdots+a_n)^2-\sum_{i=4}^{n-2}b_ib_{i+1}\ge 0.$$

(4) 当 $a_i=0(4\le i\le n-3)$ 时, 分别对 $a_1,a_2,\cdots,a_{i-1}$ 与 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_n$ 用归纳假设得,

$$\begin{aligned}&f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\\ =\ &\frac{1}{8}(a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_n)^2-\sum_{j=1}^{i-3}b_jb_{j+1}-\sum_{j=i+1}^{n-2}b_jb_{j+1}\\ \ge\ &\frac{1}{8}(a_1+\cdots+a_{i-1})^2+\frac{1}{8}(a_{i+1}+\cdots+a_n)^2-\sum_{j=1}^{i-3}b_jb_{j+1}-\sum_{j=i+1}^{n-2}b_jb_{j+1}\\ \ge\ &0.\end{aligned}$$

$(*)$ 归纳得证.

回到原题.

(1) 当 $n\ge 8$ 时, 记

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{1}{8}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2-\sum_{i=1}^{n}b_ib_{i+1}.$$

设 $d=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 我们仍希望将一个 a_i 调至 0.

记 $a_i'=a_i-d, b_i'=b_i-d$, 则

$$\begin{aligned}&f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geq f(a_1-d,a_2-d,\cdots,a_n-d)\\ \Longleftrightarrow&\frac{n}{4}(a_1'+a_2'+\cdots+a_n')d+\left(\frac{n^2}{8}-n\right)d^2\geq 2\sum_{i=1}^{n}b_i'd\\ \Longleftarrow&\frac{n}{4}(a_1'+a_2'+\cdots+a_n')\geq 2\sum_{i=1}^{n}b_i'.\end{aligned}$$

因为

$$2\sum_{i=1}^{n}b_i'\leq 2(a_1'+a_2'+\cdots+a_n')\leq\frac{n}{4}(a_1'+a_2'+\cdots+a_n'),$$

所以成立.

从而我们可以设 a_i 中有一个为0. 由对称性, 不妨设 $a_n=0$. 对 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 用 $(*)$ 得,

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{1}{8}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})^2-\sum_{i=1}^{n-3}b_ib_{i+1}\geq 0.$$

(2) 当 $3\leq n\leq 7$ 时, 不妨设 a_n 最小. 对 $a_1,\cdots,a_{n-1},a_n,\underbrace{a_n,\cdots,a_n}_{8-n个}$ 使用 8 个数的情形, 得

$$\sum_{i=1}^{n-2}b_ib_{i+1}+(9-n)a_n^2+a_nb_1\leq\frac{1}{8}(a_1+\cdots+a_n+(8-n)a_n)^2.$$

因为 $b_{n-1}=b_n=a_n$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}b_ib_{i+1}\leq&\frac{1}{8}(a_1+\cdots+a_n+(8-n)a_n)^2-(8-n)a_n^2\\ \leq&\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,\end{aligned}$$

其中最后一步由柯西不等式可证.

综上, 当 $n=2021$ 时, 所求最大值为 $\frac{1}{8}$. □

评注 供题者对本题有如下评注:

这是一个有一定困难的不等式. 先是要对一般的 n 的取等有一个大概的猜测, 通过去掉最小项进行归纳, 将 2021 变为 8, 进而对 $n=8$ 进行讨论, 讨论中有很多细节需要注意.

第四题 设数列 $\{a_n\}$ 满足: a_1,a_2 是大于 3 的整数, $a_{n+1}=a_n+3\left\lceil\frac{a_{n-1}}{2n}\right\rceil, n\geq 2$. 证明: 存在无穷多个正整数 m, 使得 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 都不整除 a_{m+1}.

(华东师大二附中学生 王一川 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):

先证明三个引理.

引理 1 存在正实数 T, 使得对任意 n 均有 $a_n \leq T \cdot n^{\frac{3}{2}}$.

证明　显然 $a_1, a_2, \cdots$ 是正整数且 $a_2 \leq a_3 \leq \cdots$. 注意到对 $n \geq 3$,

$$a_{n+1} = a_n + 3\left\lceil \frac{a_{n-1}}{2n} \right\rceil \leq a_n + \frac{3}{2n}a_n + 3,$$

即

$$a_{n+1} + 6(n+1) \leq \left(1 + \frac{3}{2n}\right)(a_n + 6n).$$

结合伯努利不等式得,

$$a_{n+1} + 6(n+1) \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}(a_n + 6n),$$

所以对 $n \geq 3$,

$$a_n + 6n \leq n^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a_3 + 18}{3^{\frac{3}{2}}}.$$

故取 $T = \max\left\{\frac{a_3+18}{3^{\frac{3}{2}}}, \frac{a_2}{2^{\frac{3}{2}}}, a_1\right\}$ 即可. 引理 1 证毕.

引理 2 对给定的正整数 t, 当 n 充分大时 $a_n \geq 1.1^t(n+1)$.

证明　对 t 归纳.

当 $t = 1$ 时, 因为对 $n \geq 2$ 有 $a_{n+1} - a_n \geq 3$, 所以当 n 充分大时 $a_n \geq 1.1(n+1)$, 结论成立.

假设 $t \geq 2$ 且 $t-1$ 时结论成立, 当 n 充分大时,

$$a_{n+1} - a_n = 3\left\lceil \frac{a_{n-1}}{2n} \right\rceil \geq 3\left\lceil \frac{1.1^{t-1}n}{2n} \right\rceil \geq 1.5 \cdot 1.1^{t-1}.$$

故当 n 充分大时, $a_n \geq 1.1^t(n+1)$, 结论成立.

引理 2 归纳证毕.

引理 3 对给定的正整数 d, 当 n 充分大时

$$(a_{n+d+1} - a_{n+d}) - (a_{n+1} - a_n) \in \{-3, 0, 3\}.$$

证明　因为

$$(a_{n+d+1} - a_{n+d}) - (a_{n+1} - a_n) = 3\left(\left\lceil \frac{a_{n+d-1}}{2(n+d)} \right\rceil - \left\lceil \frac{a_{n-1}}{2n} \right\rceil\right),$$

所以只需证明当 n 充分大时

$$\left| \frac{a_{n+d-1}}{2(n+d)} - \frac{a_{n-1}}{2n} \right| \leq 1.$$

事实上,

$$\left| \frac{a_{n+d-1}}{2(n+d)} - \frac{a_{n-1}}{2n} \right|$$

$$\le \left|\frac{a_{n+d-1}}{2(n+d)}-\frac{a_{n-1}}{2(n+d)}\right|+\left|\frac{a_{n-1}}{2n}-\frac{a_{n-1}}{2(n+d)}\right|$$
$$=\left|\frac{3}{2(n+d)}\left(\left\lceil\frac{a_{n+d-3}}{2(n+d-2)}\right\rceil+\cdots+\left\lceil\frac{a_{n-2}}{2(n-1)}\right\rceil\right)\right|+\left|\frac{d}{2n(n+d)}a_{n-1}\right|$$
$$\le \left|\frac{3}{2(n+d)}\cdot d\left\lceil\frac{a_{n+d-3}}{2(n-1)}\right\rceil\right|+\left|\frac{d}{2n(n+d)}a_{n-1}\right|$$
$$\le 1,$$

其中最后一步用到引理 1, 当 n 充分大时成立.

引理 3 证毕.

回到原题. 只需证明对任意整数 $m_0 \ge 100$, 存在整数 $m \ge m_0$, 使得 $a_1, \cdots, a_m$ 都不整除 a_{m+1}.

记 $l = a_1a_2\cdots a_{m_0}$.

由引理 3, 存在正整数 M, 使得对任意 $1 \le d \le l$, 当 $n \ge M$ 时,

$$(a_{n+d+1}-a_{n+d})-(a_{n+1}-a_n)\in\{-3,0,3\}.$$

不妨设 $M \ge m_0$, 取正整数 l', 使得 $l \mid l'$ 且 $l' \ge a_{M+1}-a_M$.

由引理 2, 当 $n \to \infty$ 时, $\lceil \frac{a_{n-1}}{2n} \rceil \to +\infty$, 即 $a_{n+1}-a_n \to +\infty$. 于是可设 u 是最大的正整数, 使得 $a_{u+1}-a_u \le 3l'$, 由 $a_{M+1}-a_M \le l'$ 知 $u \ge M$.

对 $1 \le d \le l$, 由 u 的定义知 $a_{u+d+1}-a_{u+d} > 3l'$; 由引理 3, $a_{u+d+1}-a_{u+d} \le 3l'+3$. 又 $3 \mid a_{u+d+1}-a_{u+d}$, 所以 $a_{u+d+1}-a_{u+d} = 3l'+3$.

因为 $3l \mid 3l'$, 所以 $a_{u+1}, a_{u+2}, \cdots, a_{u+l+1}$ 是模 $3l$ 意义下公差为 3 的等差数列. 从而 $a_{u+1}, a_{u+2}, \cdots, a_{u+l+1}$ 中存在一项模 $3l$ 余 1 或 2 或 3.

设 $u+1 \le v \le u+l+1$ 使 $a_v \equiv 1$ 或 2 或 3 $\pmod{3l}$, 则 $v > u \ge M \ge m_0$. 由 $a_1, a_2, \cdots, a_{m_0} \ge 4$ 且 $l = a_1a_2\cdots a_{m_0}$ 知 $a_1, a_2, \cdots, a_{m_0}$ 都不整除 a_v. 取 m 为最小的正整数, 使得 $a_{m+1} \mid a_v$, 此时 $m_0 \le m \le v-1$. 由 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 不整除 a_v 即知 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 不整除 a_{m+1}.

故满足要求的 m 有无穷多个, 命题得证. □