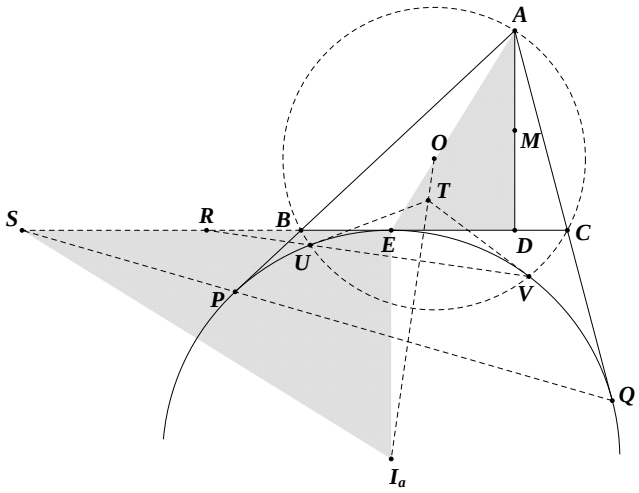
# 第四十期问题征解解答与点评

张端阳

**第一题** 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $O$ 是外心, $M$ 是高 $AD$ 的中点, $\angle A$ 内的旁切圆 $\odot I_a$ 与 $BC$ 切于点 $E$, 与 $AB$、$AC$ 的延长线分别切于点 $P$、$Q$. 设 $OI_a$ 与 $ME$ 交于点 $T$, $TP$、$TQ$ 分别与 $\odot I_a$ 交于另一点 $X$、$Y$. 证明: 直线 $AT$ 是 $\triangle ABX$ 与 $\triangle ACY$ 的外接圆的根轴.

(长沙一中学生 胡冬础 供题)

**证明 (根据巴蜀中学罗智文同学的解答整理):**




设 $\odot O$ 与 $\odot I_a$ 交于 $U, V$ 两点, 重新定义 $T$ 是 $\odot I_a$ 在 $U, V$ 处切线的交点, 则 $T$ 在 $OI_a$ 上. 下面证明 $T$ 在 $ME$ 上.

设直线 $PQ, BC$ 交于点 $S$, 则易知 $AE$ 是 $S$ 关于 $\odot I_a$ 的极线, 所以 $AE \perp SI_a$. 又 $AD \perp SE, DE \perp EI_a$, 所以 $\triangle ADE \backsim \triangle SEI_a$.

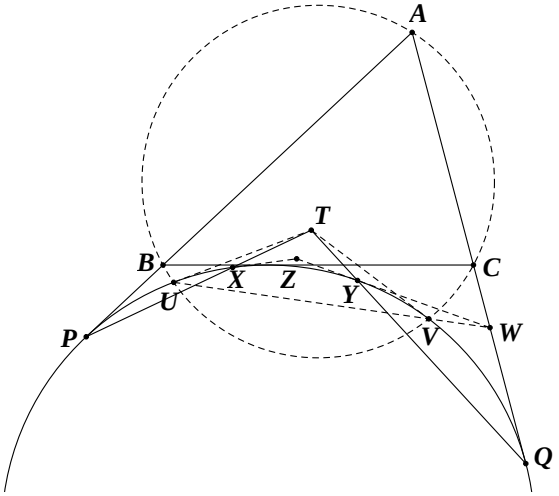
设直线 $UV, BC$ 交于点 $R$, 则

$$RE^2 = RU \cdot RV = RB \cdot RC.$$

结合 $S, E; B, C$ 是调和点列, 知 $R$ 是 $SE$ 的中点.

因为 $M$ 是 $AD$ 的中点, 所以 $M, R$ 是上述相似的对应点, 于是 $ME \perp RI_a$.

又易知 $TE$ 是 $R$ 关于 $\odot I_a$ 的极线, 故 $T$ 在 $ME$ 上.




此时 $UYVQ$ 是调和四边形, 延长 $UV$ 交 $AQ$ 于点 $W$, 则 $WY$ 是 $\odot I_a$ 的切线.

因为 $WY^2 = WU \cdot WV = WA \cdot WC$, 所以 $\triangle ACY$ 的外接圆与 $WY$ 相切, 进而 $\triangle ACY$ 的外接圆与 $\odot I_a$ 相切. 同理, $\triangle ABX$ 的外接圆与 $\odot I_a$ 相切.

设 $\odot I_a$ 在 $X, Y$ 处的切线交于点 $Z$, 则 $Z$ 在 $\triangle ABX$ 与 $\triangle ACY$ 的外接圆的根轴上, 从而 $AZ$ 是这两个圆的根轴.

对退化的圆内接六边形 $PPXQQY$ 用帕斯卡定理得, $A, T$ 及 $PY$ 与 $QX$ 的交点共线. 对退化的圆内接六边形 $PXXQYY$ 用帕斯卡定理得, $T, Z$ 及 $PY$ 与 $QX$ 的交点共线. 故 $A, T, Z$ 共线.

综上, 命题得证. □

**评注 (1).** 不少同学在证明中用到了熟知的结论 $E, I, M$ 共线. 有些同学发现了 $T$ 是 $\triangle PEQ$ 与 $\triangle I_bII_c$ 的位似中心, 其中 $I_b, I_c$ 是 $\triangle ABC$ 的另外两个旁心.

**(2).** 杭州学军中学叶梓、缪何玺、蒋昊、施敖, 武汉市武钢三中王迪, 石家庄二中王旭华, 上海中学刘胤辰, 南昌市第二中学李嘉睿、于沣林, 浙江温州中学金晟治, 华南师大附中戴子一, 湖南师大附中艾宇航, 巴蜀中学胡子渊, 深圳中学汪千桐等同学也给出了本题的正确解答.

**第二题** 证明: 存在无穷多个正整数 $n$, 使得 $n$ 不是幂, 且 $\sigma(\sigma(n))$ 与 $\tau(n)$ 互素, 其中 $\sigma$ 与 $\tau$ 分别表示因数和与因数个数.

注: 在本题中, 幂指形如 $a^b$ 的数, 其中 $a, b$ 是大于 1 的整数.

(湖南师大附中学生 刘宇东 供题)

**证明 1 (根据浙江温州中学金晟治同学的解答整理):**

取 $p$ 为任意大于 100 的素数, 我们证明 $n=2^{p-1}3^{p-1}$ 满足要求.

记

$$m=\frac{(2^p-1)(3^p-1)}{2},$$

则 $\sigma(\sigma(n))=\sigma(m),\tau(n)=p^2$.

设 $q$ 是 $m$ 的任意一个素因子. 由 $p$ 是奇素数知 $q$ 是奇素数, 结合阶的性质, 由 $q\mid 2^p-1$ 或 $q\mid 3^p-1$ 均能得到 $q\equiv 1 \pmod p$, 特别有 $q>p$.

因为 $m$ 的所有素因子均模 $p$ 余 1, 所以

$$\sigma(m)\equiv\tau(m) \pmod p.$$

设 $q^\alpha\|m$, 若 $p\mid\tau(q^\alpha)=\alpha+1$, 则 $\alpha\geq p-1$. 但这导致

$$6^p>m\geq q^\alpha>p^{p-1},$$

与 $p>100$ 矛盾!

从而 $p\nmid\tau(q^\alpha)$, 进而 $p\nmid\tau(m)$, 即 $p\nmid\sigma(m)$, 故 $(\sigma(\sigma(n)),\tau(n))=1$.

综上, 命题得证. □

**证明 2 (根据湖南师大附中陈思遇同学的解答整理):**

只需证明对任意正整数 $N$, 存在整数 $n>N$ 满足要求.

将素数从小到大排列为 $p_1,p_2,\cdots$. 取定正整数 $k$, 使得 $p_k>N$, 并待定充分大的正整数 $M$. 设 $(p_k+1)(p_{k+1}+1)\cdots(p_M+1)$ 的所有奇素因子为 $q_1<q_2<\cdots<q_t$, 则 $q_t\leq\frac{p_M+1}{2}$.

对 $\{k,k+1,\cdots,M\}$ 的任意非空子集 $I$, 记在 $\prod\limits_{i\in I}(p_i+1)$ 的奇数部分的素因数分解中, 指数为奇数的素数的下标集为 $T_I$, 则 $T_I$ 是 $\{1,2,\cdots,t\}$ 的子集.

由素数定理, 可取 $M$ 充分大, 使得区间 $(\frac{p_M+1}{2},p_M)$ 中素数的个数超过 $k$. 结合 $q_t\leq\frac{p_M+1}{2}$ 知 $M\geq k+t$, 于是 $2^{M-k+1}-1>2^t$.

此时 $\{k,k+1,\cdots,M\}$ 的非空子集的个数多于 $\{1,2,\cdots,t\}$ 的子集的个数, 所以由抽屉原理, 存在 $\{k,k+1,\cdots,M\}$ 的不同的非空子集 $I,J$, 使得 $T_I=T_J$.

令

$$n=\prod_{i\in I\triangle J}p_i,$$

其中 "$\triangle$" 表示对称差, 则 $n$ 不是幂, $n\geq p_k>N$, 且

$$\sigma(n)=\prod_{i\in I\triangle J}(p_i+1).$$

由 $T_I = T_J$ 知 $\sigma(n)$ 的奇数部分为完全平方数, 于是 $\sigma(\sigma(n))$ 为奇数. 而 $\tau(n)$ 为 2 的幂, 故 $(\sigma(\sigma(n)), \tau(n)) = 1$.

综上, 命题得证. □

**评注** 华南师大附中戴子一, 上海中学刘胤辰, 石家庄二中王旭华, 武汉市武钢三中王迪, 杭州学军中学缪何玺、叶梓等同学都给出了类似证明二的解答. 这种证法基于如下经典的命题: 存在无穷多个正整数 $n$, 使得 $\sigma(n)$ 是完全平方数.

**第三题** 设正整数 $k \le n$. $T$ 是有 $n$ 个顶点的树, 且有 $k$ 个树叶. 证明: 可以用 $1, 2, \cdots, n$ 将 $T$ 的顶点编号, 使得任意一边的两个顶点编号之差的绝对值不超过 $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$.

(上海大学 冷岗松 供题)

**证明 (根据浙江温州中学金晟治同学的解答整理):**

先说明只需在每个顶点上标不同的整数, 使得任意相邻两个顶点的标数之差的绝对值不超过 $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$.

事实上, 将所标的 $n$ 个数从小到大排列为 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. 由 $|a_i - a_j| \ge |i - j|$, 知将标为 $a_i$ 的顶点编号为 $i$ 即可.

对 $k$ 归纳.

当 $k = 2$ 时, $T$ 是一条链, 将 $1, 2, \cdots, n$ 顺次标在链的每个顶点上即可.

当 $k = 3$ 时, 恰有一个顶点 $x$ 的度为 3, 且 $T$ 是以 $x$ 为起点的三条链之并. 在 $x$ 上标 0, 在第一条链上顺次标 $-1, -3, -5, \cdots$, 在第二条链上顺次标 $-2, -4, -6, \cdots$, 在第三条链上顺次标 $0, 1, 2, \cdots$ 即可.

假设 $k \ge 4$ 且命题对 $k - 2$ 成立, 来看 $k$ 时的情形.

存在一个顶点 $x$ 的度不小于 3.

若 $\deg x \ge 4$, 则任取两个树叶 $u, v$, 使得从 $u$ 到 $v$ 的链经过 $x$.

若 $\deg x = 3$, 则存在一个树叶 $u$, 使得从 $u$ 到 $x$ 的链上有另一个度不小于 3 的顶点 $y$ (否则 $T$ 为以 $x$ 为起点的三条链之并, 只有 3 个树叶, 矛盾!) 再任取一个不同于 $u$ 的树叶 $v$, 使得从 $u$ 到 $v$ 的链经过 $x$. 此时从 $u$ 到 $v$ 的链上有两个不同的顶点 $x, y$, 度均不小于 3.

设从 $u$ 到 $v$ 的链为

$$u = v_0 - v_1 - \cdots - v_m = v,$$

再设

$$s=\min\{1\le i\le m-1 \mid \deg v_i\ge 3\},$$
$$t=\max\{1\le i\le m-1 \mid \deg v_i\ge 3\}.$$

由上面的讨论, $s,t$ 定义良好, 且或者 $s<t$ 或者 $s=t,\deg s\ge 4$.

设从 $T$ 中去掉顶点 $v_0,v_1,\cdots,v_{s-1},v_{t+1},\cdots,v_m$ 后得到 $T'$. 则 $T'$ 仍为树, 且 $T'$ 的所有树叶为 $T$ 的所有树叶去掉 $u,v$, 共 $k-2$ 个.

记 $\lceil\frac{k}{2}\rceil=c$. 由归纳假设, 可将 $T'$ 的顶点标为不同的整数, 使得任意相邻两个顶点的标数之差的绝对值不超过 $c-1$.

对 $T'$ 中的任意一个顶点 $A$, 设 $A$ 的标数为 $f(A)=q(c-1)+r$, 其中 $q,r\in\mathbb{Z},1\le r\le c-1$, 现将其重新标数为 $g(A)=qc+r$.

此时 $T'$ 中所有顶点的新标数不被 $c$ 整除且互不相同, 并且任意相邻两个顶点的标数之差的绝对值不超过 $c$.

不妨设 $g(v_s)\le g(v_t)$, 记 $\left[\frac{g(v_s)}{c}\right]=a,\lceil\frac{g(v_t)}{c}\rceil=b$, 则 $a<b$.

对 $0\le i\le s-1$, 令

$$g(v_i)=ac-(s-1-i)c;$$

对 $t+1\le i\le m$, 令

$$g(v_i)=bc+(i-t-1)c.$$

现将 $T$ 的所有顶点按 $g$ 标数, 则 $n$ 个顶点的标数互不相同, 且相邻两个顶点的标数之差的绝对值不超过 $c$.

归纳证毕.

综上, 命题得证. □

**评注 (1).** 本题是论文 *The bandwidth of a tree with k leaves is at most* $\lceil\frac{k}{2}\rceil$ 中的结果, 其弱化版本曾作为 2021 年新星春季数学奥林匹克的第二题.

**(2).** 武汉市武钢三中王迪, 上海中学刘胤辰, 湖南师大附中艾宇航等同学也给出了本题的正确解答.

**第四题** 给定正整数 $k,n$. 求最大的实数 $\lambda$, 使得对任意满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=kn$ 的正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 都有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{[x_i]^2}{x_i}\ge\lambda$.

(温州育英国际实验学校学生 林逸沿 供题)

**解 (根据人大附中陈锐韬同学的解答整理):**

当 $n \le k$ 时, 我们证明 $\lambda$ 的最大值为 $\frac{(kn-n+1)^2}{kn}$.

一方面, 取

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \frac{(k-1)kn}{kn-n+1} = k-1+\frac{(k-1)(n-1)}{kn-n+1},$$
$$x_n = \frac{k^2 n}{kn-n+1} = k+\frac{k(n-1)}{kn-n+1}.$$

容易验证 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = kn$, 且由 $n \le k$ 知

$$0 \le \frac{(k-1)(n-1)}{kn-n+1} \le \frac{k(n-1)}{kn-n+1} < 1.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{[x_i]^2}{x_i} = (n-1)\cdot \frac{(k-1)^2}{\frac{(k-1)kn}{kn-n+1}} + \frac{k^2}{\frac{k^2 n}{kn-n+1}} = \frac{(kn-n+1)^2}{kn}.$$

另一方面, 由

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n}\{x_i\} > kn-n$$

知

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i] \ge kn-n+1.$$

所以由柯西不等式,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{[x_i]^2}{x_i} \ge \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}[x_i]\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \ge \frac{(kn-n+1)^2}{kn}.$$

当 $n \ge k+1$ 时, 我们证明 $\lambda$ 的最大值为

$$\frac{(n-1)^2(k-1)^2}{kn-k-1} + \frac{k^2}{k+1},$$

其中当 $k=1, n=2$ 时为 $\frac{1}{2}$.

一方面, 对充分小的正实数 $\delta$, 取

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \frac{kn-k-1}{n-1} + \delta = k-1+\frac{n-2}{n-1} + \delta,$$
$$x_n = k+1-(n-1)\delta.$$

容易验证 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = kn$, 且当 $\delta \to 0$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{[x_i]^2}{x_i} \to \frac{(n-1)^2(k-1)^2}{kn-k-1} + \frac{k^2}{k+1}.$$

另一方面, 我们证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{[x_i]^2}{x_i}\geq\frac{(n-1)^2(k-1)^2}{kn-k-1}+\frac{k^2}{k+1}.$$

第一步, 记 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}[x_i]$, 上面已证 $S\geq kn-n+1$.

若 $S\geq kn-n+2$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\{x_i\}\leq n-2$. 不妨设 $[x_1]=a>0$, 并记 $\{x_1\}=\varepsilon$. 由

$$\varepsilon<1\leq\frac{2a^2-a}{(a-1)^2},$$

知

$$\frac{a^2}{a+\varepsilon}>\frac{(a-1)^2}{a},$$

所以存在充分小的正实数 $\eta$, 使得

$$\frac{a^2}{a+\varepsilon}>\frac{(a-1)^2}{a-\eta}.$$

因为 $\sum\limits_{i=2}^{n}\{x_i\}\leq n-2-\varepsilon$, 所以可适当增大 $x_2,\cdots,x_n$, 使得 $[x_2],\cdots,[x_n]$ 不变, 且总共增加 $\varepsilon+\eta$, 得到 $x_2',\cdots,x_n'$. 再令 $x_1'=a-\eta$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i'=kn$,

$$\frac{[x_1]^2}{x_1}=\frac{a^2}{a+\varepsilon}>\frac{(a-1)^2}{a-\eta}=\frac{[x_1']^2}{x_1'},\quad\sum_{i=2}^{n}\frac{[x_i]^2}{x_i}>\sum_{i=2}^{n}\frac{[x_i']^2}{x_i'},$$

且

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i']=\sum_{i=1}^{n}[x_i]-1.$$

因此可不断调整使得 $S=kn-n+1$.

第二步, 不妨设 $[x_1]\geq\left\lceil\frac{kn-n+1}{n}\right\rceil=k$. 由柯西不等式,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{[x_i]^2}{x_i}\geq\frac{[x_1]^2}{x_1}+\frac{(S-[x_1])^2}{kn-x_1}.$$

情形 1: 当 $[x_1]=k$ 时,

$$\frac{[x_1]^2}{x_1}+\frac{(S-[x_1])^2}{kn-x_1}=\frac{k^2}{x_1}+\frac{(S-k)^2}{kn-x_1}.$$

记

$$f(x)=\frac{k^2}{x}+\frac{(S-k)^2}{kn-x},$$

解

$$f'(x)=-\frac{k^2}{x^2}+\frac{(S-k)^2}{(kn-x)^2}\geq 0,$$

得

$$x \geq \frac{k^2 n}{S} = \frac{k^2 n}{kn - n + 1} \geq k + 1.$$

因为 $x_1 \leq k+1$, 所以

$$f(x_1) \geq f(k+1) = \frac{k^2}{k+1} + \frac{(n-1)^2(k-1)^2}{kn-k+1}.$$

情形 2: 当 $[x_1] \geq k+1$ 时, 记 $a = [x_1]$, 则

$$\begin{aligned}\frac{[x_1]^2}{x_1} + \frac{(S-[x_1])^2}{kn-x_1} &= \frac{a^2}{x_1} + \frac{(S-a)^2}{kn-x_1} \\ &= \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{kn-x_1}\right)a^2 - \frac{2S}{kn-x_1}a + \frac{S^2}{kn-x_1}.\end{aligned}$$

这是关于 $a$ 的二次函数, 开口向上, 对称轴

$$\frac{\frac{S}{kn-x_1}}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{kn-x_1}} = \frac{Sx_1}{kn} = \frac{(kn-n+1)x_1}{kn} \leq x_1 - 1,$$

其中最后一步用到了 $x_1 \geq k+1, n \geq k+1$. 于是当 $a = x_1 - 1$ 时取到最小值.

记 $b = x_1 - 1 \geq k$, 则

$$\frac{a^2}{x_1} + \frac{(S-a)^2}{kn-x_1} \geq \frac{b^2}{b+1} + \frac{(S-b)^2}{kn-b-1}.$$

最后证明当 $b \geq k$ 时,

$$\frac{b^2}{b+1} + \frac{(S-b)^2}{kn-b-1} \geq \frac{k^2}{k+1} + \frac{(S-k)^2}{kn-k-1}. \qquad (*)$$

事实上,

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow \frac{b^2}{b+1} - \frac{k^2}{k+1} \geq \frac{(S-k)^2}{kn-k-1} - \frac{(S-b)^2}{kn-b-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{b^2k - bk^2 + b^2 - k^2}{(b+1)(k+1)} \geq \frac{(kn-1)((S-k)^2-(S-b)^2) + k(S-b)^2 - b(S-k)^2}{(kn-k-1)(kn-b-1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{(bk+b+k)(b-k)}{(b+1)(k+1)} \geq \frac{(kn-1)(2S-k-b)(b-k) + (bk-S^2)(b-k)}{(kn-k-1)(kn-b-1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{bk+b+k}{(b+1)(k+1)} \geq \frac{(kn-1)(2S-k-b) + (bk-S^2)}{(kn-k-1)(kn-b-1)} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(b+1)(k+1)} \geq 1 - \frac{(kn-1-S)^2}{(kn-k-1)(kn-b-1)} \\ &\Leftrightarrow (b+1)(k+1)(n-2)^2 - (kn-k-1)(kn-b-1) \geq 0.\end{aligned}$$

上式左边是关于 $b$ 的一次函数, 系数

$$(k+1)(n-2)^2 + (kn-k-1) \geq 0,$$

因此只需证明当 $b = k$ 时成立. 而这等价于

$$(k+1)(n-2) - (kn-k-1) \geq 0 \Leftrightarrow n \geq k+1,$$

成立.

综上, 所求最大值为

$$\begin{cases} \frac{(kn-n+1)^2}{kn}, & n \le k \\ \frac{(n-1)^2(k-1)^2}{kn-k-1} + \frac{k^2}{k+1}, & n \ge k+1 \end{cases}.$$

□

**评注** 长沙麓山国际实验学校童昊阳, 杭州学军中学叶梓、周箴言, 武汉市武钢三中王迪, 石家庄二中王旭华, 华南师大附中戴子一, 巴蜀中学杨皓瑜, 广西师大附外叶骐铭, 湖南师大附中学生艾宇航等同学也给出了本题的正确解答.