数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

三个问题的命题过程

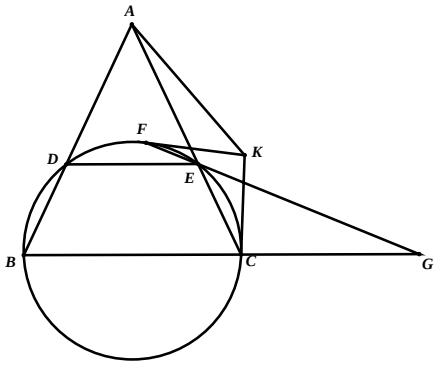
胡俊浦

(温州育英国际实验学校, 325014)

指导教师: 孙涛

我的同学林逸沿最近在数学新星网发表了两个问题和两篇文章. 受林逸沿工作的激励, 我也开始命题尝试. 本文介绍三个问题的命制过程. 难度相当于联赛 1, 2 题难度.

问题 1 在等腰 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别在 AB, AC 上且 $DE \parallel BC$. 设等腰梯形 $DECB$ 的外接圆为 Γ, F 为弧 $\widehat{DE}$ 上的点, FE 与 BC 延长交于 G. K 为圆 Γ 在 F, C 处切线的交点. 证明: AK 平分 CG.

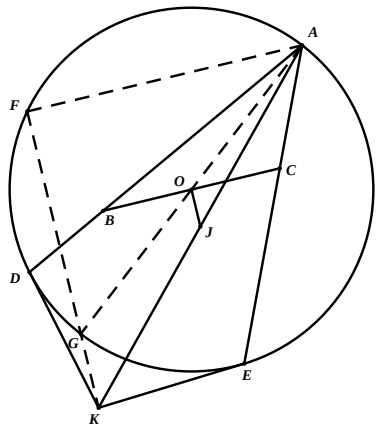


该问题来源于偶然想到一个常见的模型.

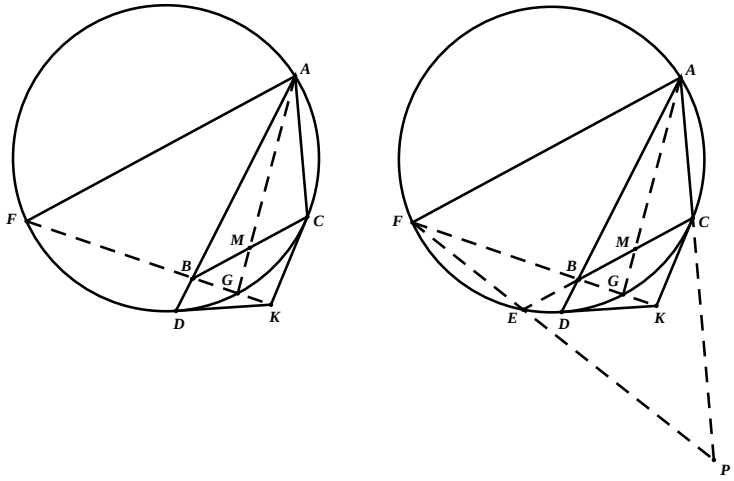
模型 1 设 B, C 为 $\odot O$ 内点满足 BC 过圆心 O 且被 O 平分, A 为圆上一点, 延长 AB, AC 交圆于 D, E. 过 D, E 作切线交于点 K, J 为 AK 的中点, 则 $JO \perp BC$.

证明思路 如图, 作 $AF \parallel BC$ 交圆于 F, 则 AF, AB, AO, AC 成调和线束. 延长 AO 交圆于 G, 则 $FDGE$ 为调和四边形, 根据调和四边形的性质有 KGF 共线. □

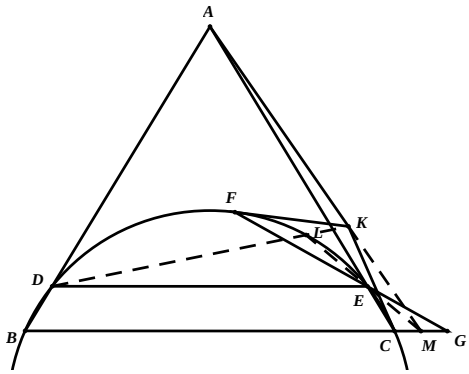
修订日期: **2021-08-08.**



命题过程 受模型 1 的启发, 我试图用这种平行线结合中点得共线的方法命一道题, 过程较为顺利, 把构型中的一个点 C 置于圆上, 另一点 B 置于圆内, 同上作图可知有如下图的共线结论, 其中 M 即为 BC 中点.



为了进一步隐藏点 G, 考虑利用帕斯卡定理转化结论. 上面的核心结论即 $K = FG \cap CC$. 再设 CB 延长交圆于 E, 有 $M = AG \cap CE$. 进而最后的点为 $P = EF \cap AC$, 可以把结论转化为 KP 平分 BC. 根据等腰梯形 $FACE$ 进一步润饰条件和图形的相对位置可得问题 1.



证明 设 M 为 CG 的中点, EM 交圆 Γ 于 L. 由 $ED \parallel CG$ 知 ED, EC, EL, EG 呈调和线束. 从而 $FLCD$ 为调和四边形, 故 D, L, K 共线. 在圆内接六边形 $CCBDLE$ 中用帕斯卡定理知 A, K, M 共线, 故 AK 平分 CG. □

评注 此题过程照这样写十分简略, 同时也可用三角计算的方法解决, 难度不大, 图形简洁, 正常来讲大约 15-30 分钟能解决.

问题 2 已知非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, 求

$$\sum_{1\le i<j\le n} (j-i)\, x_i x_j$$

的最大值.

此题的灵感来源于增刊一上的一道题.

模型 2 已知 $x_i \ge 0$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, 求 $n = 4, 5$ 时

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i (1 - x_i)$$

的最大值.

命题过程 一个自然的想法是将 $n = 4, 5$ 拓展到任意整数, 但显然对 $n = 4, 5$ 的方法在大于 5 时并不适用 (要不然为什么出这题的人不要求直接对任意 n 证明). 于是转而进行另一种思路: 将 $1 - x_i$ 替换为 $\sum\limits_{j\ne i} x_j$, 原式转化为

$$\sum_{1\le i<j\le n} (i+j)\, x_i x_j.$$

进行了齐次化同时也成了命制此题的契机, 联想到下面两个恒等式

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,\, j\le n}^{n} \min\{i,\, j\}\, x_i x_j &= \sum_{i=1}^{n} i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i x_i x_j \\ &= x_n^2 + (x_n + x_{n-1})^2 + \cdots + (x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1)^2; \quad ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,\, j\le n}^{n} \max\{i,\, j\}\, x_i x_j &= \sum_{i=1}^{n} i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} j x_i x_j \\ &= (n+1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \\ &\quad - \left[x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2\right], \quad ②\end{aligned}$$

将两式相加后得到的唯一成果就是 $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$ 时有

$$\sum_{1\le i,\, j\le n} (i+j)\, x_i x_j$$

的最大值为 $n+1$, 实际上由

$$\sum_{1\le i,\, j\le n}(i+j)\,x_ix_j=2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}ix_i\right)$$

易证.

脱离本题将两式相减发现

$$2\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)\,x_ix_j=(n-1)\,S^2-\sum_{i=1}^{n-1}\left(S_i^2+(S-S_i)^2\right),$$

其中 $S_i=\sum\limits_{j=1}^{i}x_j,\ S=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, 后面的式子恰好可由柯西放缩为 $\frac{n-1}{2}S^2$. 故有

$$\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)\,x_ix_j\le\frac{n-1}{4},$$

等号在 $x_1=x_n=\frac{1}{2},\ x_2=\cdots=x_{n-1}=0$ 时取到.

后来发现了另一个妙解如证法 2.

解 取 $x_1=x_n=\frac{1}{2},\ x_2=\cdots=x_n=0$ 知

$$\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)\,x_ix_j=\frac{n-1}{4},$$

下证

$$\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)\,x_ix_j\le\frac{n-1}{4}.$$

法 1 注意到式①, ②. 设 $S_i=\sum\limits_{j=1}^{i}x_j,\ S=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, 两式相减由柯西不等式知

$$\begin{aligned}2\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)\,x_ix_j&=(n-1)\,S^2-\sum_{i=1}^{n-1}\left(S_i^2+(S-S_i)^2\right)\\&\le(n-1)\,S^2-(n-1)\,\frac{S^2}{2}\\&=\frac{n-1}{2}.\end{aligned}$$

得证.

法 2 注意到

$$\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)\,x_ix_j=\sum_{i=1}^{n-1}S_i\,(S-S_i)\le\frac{n-1}{4}S^2=\frac{n-1}{4},$$

即证.

综上所述, $\sum\limits_{1\le i<j\le n}(j-i)\,x_ix_j$ 的最大值为 $\frac{n-1}{4}$. □

评注 此题解法二虽然简单但也并不容易看出, 给同学测试的时候大约要花 30 分钟左右写出, 可见思路的重要性远大于过程.

问题 3 (1) 已知正实数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = n^3-1$, 求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\sqrt{a_i}\right]^2$ 的最小值;

(2) 给定正整数 $n,\ k$, 正实数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = kn$, 求 $\sum\limits_{i=1}^{n}[a_i]^2$ 的最小值.

命题过程 注意到林逸沿研究 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{[a_i]^2}{a_i}$ 有了一定的成果, 也激励我去研究这种 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 且含有取整的式子, 我开始选择入手探究 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\sqrt{a_i}\right]^2$. 与林逸沿的式子不同, 此式在 a_i 为整数照样不能去取等. 故先不妨 a_i 为实数. 设 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = k,\ k<n$ 时平凡, 故不妨 $k\geq n$. 最简单的思路是设 $b_i^2\leq a_i<(b_i+1)^2$, 则 $\left[\sqrt{a_i}\right]=b_i$ 且有 $b_i\geq\max\left\{\sqrt{a_i}-1,\ 0\right\}$. 设

$$a_1,\cdots,a_t\geq 1,\ a_{t+1},\cdots,a_n<1,$$

由柯西不等式

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}[\sqrt{a_i}]^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2&\geq\sum_{i=1}^{t}(\sqrt{a_i}-1)^2\\&=\sum_{i=1}^{t}a_i-2\sum_{i=1}^{t}\sqrt{a_i}+t\\&\geq S-2\sqrt{tS}+t=\left(\sqrt{S}-\sqrt{t}\right)^2,\end{aligned}$$

其中 $S=\sum\limits_{i=1}^{t}a_i>k-(n-t)>t$, 故

$$\sum_{i=1}^{n}[\sqrt{a_i}]^2>\left(\sqrt{k-n+t}-\sqrt{t}\right)^2\geq\left(\sqrt{k}-\sqrt{n}\right)^2,$$

获得一个初步估计最小值约为 $\left\lceil\left(\sqrt{k}-\sqrt{n}\right)^2\right\rceil$. 经尝试发现取特定 k 可使等号成立, 即题 (1).

这次探索的过程就比较曲折了, 不管怎样等号成立都是一个坎, 过不去了我也就只能多换几个式子(这正是我所说的提出做不出困境), 怎么说试了五六个类似的式子, 就不一一赘述了, 最后能看的结论就是上述题 (2).

同时再将根号改成 m 次根发现结论类似有

$$\sum_{i=1}^{n}[\sqrt[m]{a_i}]^m\geq\left(\sqrt[m]{k}-\sqrt[m]{n}\right)^m,$$

此时的证明要用琴生但没什么意义就保留了 2 次的情况.

解 (1) 取 $a_1=a_2=\cdots=a_n=n^2-\frac{1}{n}$ 则

$$\sum_{i=1}^{n}[\sqrt{a_i}]^2=n(n-1)^2.$$

下证

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{a_i}\right]^2 \geq n(n-1)^2.$$

设 $\left[\sqrt{a_i}\right]=b_i$, 则 $b_i^2 \leq a_i < (b_i+1)^2$. 不妨设 $a_1, \cdots, a_t \geq 1$, $a_{t+1}, \cdots, a_n < 1$, 设

$$S=\sum_{i=1}^{t} a_i = n^3-1-\sum_{i=t+1}^{n} a_i \geq n^3-1-n+t > t,$$

则

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{a_i}\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 &\geq \sum_{i=1}^{t}\left(\sqrt{a_i}-1\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{t} a_i - 2\sum_{i=1}^{t}\sqrt{a_i}+t \\
&\geq S-2\sqrt{tS}+t=\left(\sqrt{S}-\sqrt{t}\right)^2 \\
&> \left(\sqrt{n^3-1-n+t}-\sqrt{t}\right)^2 \\
&= \frac{\left(n^3-1-n\right)^2}{\left(\sqrt{n^3-1-n+t}+\sqrt{t}\right)^2} \geq \left(\sqrt{n^3-1}-\sqrt{n}\right)^2
\end{aligned}$$

又

$$\left(\sqrt{n^3-1}-\sqrt{n}\right)^2 > n(n-1)^2-1 \Leftrightarrow 2n^2 > 2\sqrt{n^4-n}$$

成立且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\sqrt{a_i}\right]^2$ 为整数. 故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\sqrt{a_i}\right]^2 \geq n(n-1)^2$ 得证.

综上 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\sqrt{a_i}\right]^2$ 的最小值为 $n(n-1)^2$.

(2) 取 $a_1=\cdots=a_{n-1}=k-\frac{1}{n}$, $a_n=k+\frac{n-1}{n}$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\right]^2=(n-1)(k-1)^2+k^2.$$

又由题意

$$\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\right] > \sum_{i=1}^{n}\left(a_i-1\right)=kn-n$$

且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a_i\right]$ 为整数. 故由 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a_i\right] \geq kn-n+1$ 可知

$$\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\right]^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\right]\right)^2 \geq \frac{(nk-n+1)^2}{n}=n(k-1)^2+2(k-1)+\frac{1}{n}.$$

再由 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a_i\right]^2$ 为整数知

$$\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\right]^2 \geq n(k-1)^2+2k-1=(n-1)(k-1)^2+k^2.$$

综上所述, $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a_i\right]^2$ 的最小值为 $(n-1)(k-1)^2+k^2$. □