2021 年 ELMO 试题解答与评析

梁行健　刘翊哲　刘鹏远　谢朋睿　张榕航

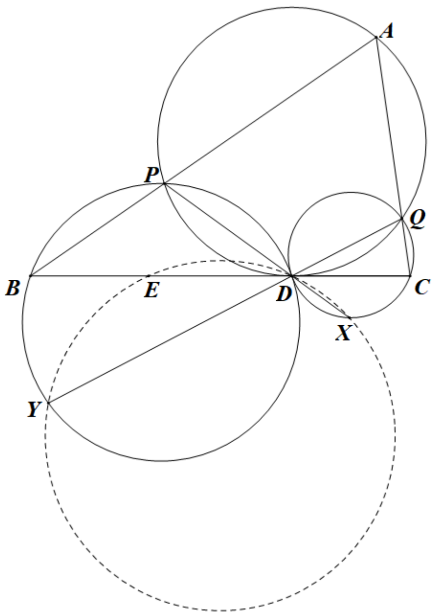
(湖南师范大学附属中学, 410006)

指导教师: 汤礼达

2021 年 ELMO 于 6 月 17, 18 日 14 : 00 − 18 : 30 举行. 本次试题质量较高, 其中 1, 3, 4 较容易, 很适合联赛训练; 2, 5, 6 有一定难度, 是冬令营好的训练题. 其中值得一提的是 6, 观点独特, 内涵丰富, 很好地考察了学生的几何素养. 笔者水平有限, 不当之处还请指正.

I. 试 题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 P 和 Q 分别在边 AB 和 AC 上, 使得 $\triangle APQ$ 的外接圆与 BC 相切于点 D. 边 BC 上的点 E 满足 $BD = EC$. 直线 DP 再次交 $\triangle CDQ$ 的外接圆于 X, 直线 DQ 再次交 $\triangle BDP$ 的外接圆于点 Y. 证明: D、E、X、Y 四点共圆.



修订日期: **2021-08-01.**

2. 给定整数 $n>1$ 和 $a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n$, 且对 $1\le i\le n$ 都有 a_i 满足 $n\mid a_i-i$. 证明: 存在无穷序列 $b_1,\ b_2,\ \cdots$ 满足:

(1) $b_k\in\{\,a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n\}$ 对任意正整数 k 成立;

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{n^k}$ 是一个整数.

3. 在 100×100 的网格中, 每个格子都被涂成了 101 种颜色中的一种. 若一个格子满足, 在它所在的行和列的 199 个格子中, 每种颜色都至少出现了一次, 那么我们称这个格子是多元化的. 求多元化的格子数目的最大可能值.

4. 将正整数集划分成 n 个两两不交的无穷等差数列 $S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n$, 它们的公差分别为 $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n$.

证明: 恰存在一个正整数 $i\ (1\le i\le n)$ 使得 $\frac{1}{d_i}\prod\limits_{j=1}^{n}d_j\in S_i$.

5. 给定正整数 n 和 k. 如果两个无穷数列 $\{s_i\}_{i\ge1}$ 和 $\{t_i\}_{i\ge1}$ 满足: 对任意正整数 i 和 j 有 $s_i=s_j$ 成立当且仅当 $t_i=t_j$ 成立, 那么我们称这两个数列是等价的. 若无穷数列 $\{r_i\}_{i\ge1}$ 满足 $r_1,\ r_2,\ \cdots$ 和 $r_{k+1},\ r_{k+2},\ \cdots$ 等价, 那么我们称其具有等价周期 k. 假设有 M 个具有等价周期 k 的无穷数列, 每个数列的项都是集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 中的元素, 且它们两两都不是等价的, 求 M 的最大可能值.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上, 且满足四边形 $AFDE$、$BDEF$、$CEFD$ 都有内切圆. 证明: $\triangle ABC$ 的内切圆半径是 $\triangle DEF$ 内切圆半径的两倍.

II. 解答与评注

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 P 和 Q 分别在边 AB 和 AC 上, 使得 $\triangle APQ$ 的外接圆与 BC 相切于点 D. 边 BC 上的点 E 满足 $BD=EC$. 直线 DP 再次交 $\triangle CDQ$ 的外接圆于 X, 直线 DQ 再次交 $\triangle BDP$ 的外接圆于点 Y. 证明: D、E、X、Y 四点共圆.

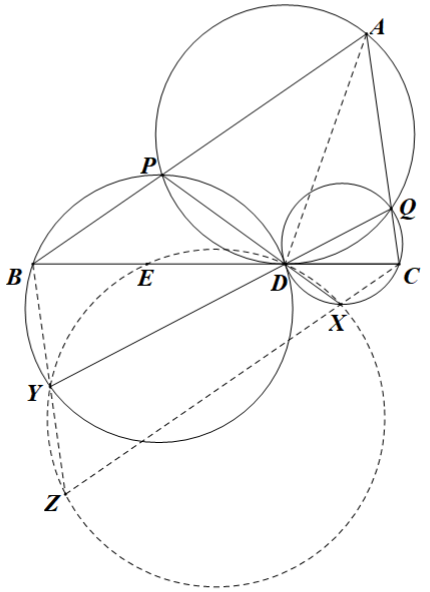
证明 设 BY, CX 交于 Z. 则

$$\angle DXC=\angle AQD=\angle BPD\ \Rightarrow\ AB\parallel CZ.$$

同理, $AC\parallel BZ$. 故 $ABZC$ 为平行四边形.

又

$$\angle BDY=\angle QDC=\angle DAC,\ \angle DBY=\angle ACD\ \Rightarrow\ \triangle DBY\backsim\triangle ACD.$$



故

$$\frac{DB}{AC} = \frac{BY}{CD} \Rightarrow DB \cdot DC = BY \cdot AC$$
$$\Rightarrow BE \cdot BD = BY \cdot BZ$$
$$\Rightarrow Y,\ Z,\ D,\ E \text{ 共圆}.$$

同理, E, D, X, Z 共圆. 故 E, D, X, Y 共圆. □

评注 这是一道难度不大的几何题, 知识点非常基本.

2. 给定整数 $n>1$ 和 $a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n$, 且对 $1 \le i \le n$ 都有 a_i 满足 $n \mid a_i - i$. 证明: 存在无穷序列 $b_1,\ b_2,\ \cdots$ 满足:

(1) $b_k \in \{\ a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n\}$ 对任意正整数 k 成立;

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{n^k}$ 是一个整数.

证明 (刘翊哲) 我们证明: 对于任意给定的 $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \ge 2$, 都一定存在序列 $b_1,\ b_2,\ \cdots \in \{a_1,\ \cdots,\ a_n\}$, 满足

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{n^k} \right\| < \frac{1}{n^{m-1}}, \tag{$*$}$$

其中, $\|x\| = \min\{x - \lfloor x \rfloor,\ \lceil x \rceil - x\}$ 为 x 到与之最近的整数的距离.

我们在 n 进制下看问题:

由题意, $a_1,\ \cdots,\ a_n$ 分别是末位为 $1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ 0$ 的 n 个整数 (把 $-1,\ -2,\ \cdots$ 的末位理解为 $n-1,\ n-2,\ \cdots$), 设其中的位数最大者的位数为 d, 先取 $b_1 = b_2 = \cdots = a_n$, 逐步调整:

由 $b_{m+d}=a_n$, 知此时 $\sum\limits_{k=1}^{m+d}\frac{b_k}{n^k}$ 小数点后第 $(m+d)$ 位为 0, 又设 $\sum\limits_{k=1}^{m+d}\frac{b_k}{n^k}$ 小数点后第 $(m+d-1)$ 位为 k_{m+d-1}, 将 b_{m+d-1} 调整为 $a_{n-k_{m+d-1}}$, 再设此时 $\sum\limits_{k=1}^{m+d}\frac{b_k}{n^k}$ 小数点后第 $(m+d-2)$ 位为 k_{m+d-2}, 将 b_{m+d-2} 调整为 $a_{n-k_{m+d-2}}$.

依此类推, 直至构造完 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{m+d}$, 由构造方式知 $\sum\limits_{k=1}^{m+d}\frac{b_k}{n^k}$ 的小数点后第 $(m+d),\ (m+d-1),\ \cdots,\ 1$ 位均为 0.

又 $\left(\sum\limits_{k=1}^{m+d}\frac{b_k}{n^k}\right)\cdot n^{m+d}\in\mathbb{Z}$, 故 $\sum\limits_{k=1}^{m+d}\frac{b_k}{n^k}$ 的非 0 小数位只可能在小数点后前 $(m+d)$ 位, 故可得: $\sum\limits_{k=1}^{m+d}\frac{b_k}{n^k}\in\mathbb{Z}$.

又因为

$$\left|\sum_{k=m+d+1}^{\infty}\frac{b_k}{n^k}\right|<\sum_{k=m+d+1}^{\infty}\frac{n^{d+1}}{n^k}=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{n^{m-1}(n-1)}\le\frac{1}{n^{m-1}},$$

所以

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{n^k}\right\|=\left\|\sum_{k=m+d+1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\right\|<\frac{1}{n^{m-1}}.$$

即知 $(*)$ 成立.

设对 $m\ge 2$, 前述构造得到的序列为 B_m.

由抽屉原理, 必有无穷多个 B_m 的首项为 a_{i_1} $(i_1\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\})$, 在首项为 a_{i_1} 的所有 B_m 中, 有无穷多个序列的第二项为a_{i_2} $(i_2\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\})$.

依此类推, 得到 $a_{i_3},\ a_{i_4},\ \cdots$, 满足对任意的正整数 k, 有无穷多个 B_m 的前 k 项为 $a_{i_1},\ a_{i_2},\ \cdots,\ a_{i_k}$, 又注意到, 若 B_m 与 B'_m 的前 k 项相同, 那么它们产生的 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{n^k}$ 之差的绝对值

$$|\Delta|<\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{2n^{d+1}}{n^i}=\frac{2}{n^{k-d-1}(n-1)}\le\frac{2}{n^{k-d-1}}.$$

故 B'_m 产生的无穷级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{n^k}$ 到与其最近的整数的距离小于 $\frac{2}{n^{k-d-1}}+\frac{1}{n^{m-1}}$.

现取 $\{b_n\}:\ b_t=a_{i_t}\ (t\in\mathbb{Z}_+)$, 即知对任意固定的 $k\in\mathbb{Z}_+$, 存在无穷多个 $m\in\mathbb{Z}_+$ 满足:

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{n^i}\right\|<\frac{2}{n^{k-d-1}}+\frac{1}{n^{m-1}}.$$

令 $k\to+\infty$, 结合 m 的无限性, 即知 $\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{n^i}\right\|=0$, 即 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{n^i}\in\mathbb{Z}_+$, 证毕. □

评注 前半部分论证利用 n 进制从后往前的调整说明了 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{n^k}$ 可以任意接近一个整数; 后半部分则通过"找公共项"来构造 $\{b_n\}$, 使 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{n^k}$ 等于 (无限接近于) 整数. 需要注意"任意小"和"无穷小"之间的区别.

3. 在 100×100 的网格中, 每个格子都被涂成了 101 种颜色中的一种. 若一个格子满足, 在它所在的行和列的 199 个格子中, 每种颜色都至少出现了一次, 那么我们称这个格子是多元化的. 求多元化的格子数目的最大可能值.

解 (梁行健) 至多有 9996 个多元化的格子.

一方面, 在下图所示的染色方式中, 只有四个角上的格子不是多元化的, 故有 9996 个多元化的格子 (其中 1, 2, $\cdots$, 101 表示 101 种不同的颜色).

1	2	2		....	......		2	2	3
1	4	5	6	...	...	99	100	101	2
2	5	6	7	...	...	100	101	4	1
2	6	7	8	...	...	101	4	5	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱		⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮		⋱	⋮	⋮	⋮	⋮
	99	100	101	...	...	96	97	98	1
2	100	101	4	...	...	97	98	99	1
2	101	4	5	...	...	98	99	100	1
3	3	3		....	......		3	3	1

另一方面, 下证至多有 9996 个多元化的格子.

为了方便, 若一个格子不是多元化的, 我们称它为单一的, 只需证至少有 4 个单一的格子.

用反证法, 假设单一的格子至多 3 个, 则对于每种颜色, 这种颜色的格子不少于 99 个. 否则, 存在两行两列没有这种颜色的格子, 它们交出的 4 个方格都是单一的, 与反证假设矛盾.

又 $100^2 = 99 \times 101 + 1$, 故恰有一种颜色使得这种颜色的格子恰 100 个 (我们称这种颜色为大色), 对其余的 100 种颜色中的每种颜色, 恰有 99 个格子为这种颜色 (我们称另外 100 种颜色为小色).

注意到, 若对于一种小色 (不妨设为 1 色), 某行 r 缺少 1 色的方格, 同时由 1 色为小色知, 存在一列 c 缺少 1 色的方格, 故第 r 行与第 c 列相交的方格颜色是单一的, 则由单一的格子至多 3 个知, 至少有 97 行包含了全部 100 种小色的方格, 因而不包含大色的方格, 同理, 有 97 列不含大色的方格.

故至少有 $97^2=9409>3$ 个方格是单一的, 矛盾!

故单一的格子不少于 4 个, 即多元化的格子至多 9996 个.

综上所述, 答案为至多 9996 个. $\square$

评注 这是一道漂亮的方格表染色问题. 当 $n=1,2,3,4$ 时, 答案都是 n^2-n, 因此最大值很容易被猜成 9900, 而当 $n\geq 5$ 时, 答案却是 n^2-4. 只要正确地猜出答案, 就能较顺利的构造出最大值的例子, 剩下的证明部分也是自然的.

4. 将正整数集划分成 n 个两两不交的无穷等差数列 $S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n$, 它们的公差分别为 $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n$.

证明: 恰存在一个正整数 $i\ (1\leq i\leq n)$ 使得 $\frac{1}{d_i}\prod\limits_{j=1}^{n}d_j\in S_i$.

证明 1 (张榕航) 首先, 我们来证明,

$$\text{对任意 } 1\leq i\leq n,\ \text{总有 } d_i\mid \frac{1}{d_i}\cdot\prod_{j=1}^{n}d_j. \tag{$*$}$$

注意到, 对 $a_s\in S_i,\ b_t\in S_j\ (1\leq i,\ j\leq n,\ i\neq j)$, 则

$$(d_i,\ d_j)\nmid |a_s-b_t|\,.$$

否则, 不妨设 $a_s>b_t$, 由 Bezout 定理, 存在 $x,\ y\in\mathbb{Z}_+$, 使 $y\cdot d_j-x\cdot d_i=|a_s-b_t|$, 那么

$$b_t+y\cdot d_j=b_t+x\cdot d_i+|a_s-b_t|=a_s+x\cdot d_i.$$

由于等式左边属于 S_j, 而等式右边属于 S_i, 故 $S_i\cap S_j=\varnothing$, 矛盾.

设 $d_i=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ ($p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_r$ 为互异素数, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r\in\mathbb{N}^*$). 设 a 是数列 S_i 中某项, 对任意的 $1\leq u\leq r$, 我们有

$$a<a+\frac{d_i}{p_u}<a+d_i\ \Rightarrow\ a+\frac{d_i}{p_u}\in S_j\ (j\neq i),$$

于是

$$(d_i,\ d_j)\nmid\frac{d_i}{p_u}\ \Rightarrow\ p_u^{\alpha_u}\mid (d_i,\ d_j).$$

即对任意的 $u,\ 1\leq u\leq r$, 均存在 $j\neq i$ 使 $p_u^{\alpha_u}\mid d_j$, 故 $d_i\mid\frac{1}{d_i}\cdot\prod\limits_{j=1}^{n}d_j$. 故 $(*)$ 得证.

再证明:

$$\text{存在唯一的 } 1\leq i\leq n,\ \text{使 } S_i=\{kd_i|k\in\mathbb{N}^*\}\,. \tag{$**$}$$

由条件知存在唯一的 $i\ (1\leq i\leq n)$ 使 $\prod\limits_{j=1}^{n}d_j\in S_i$, 又因为 $d_i\mid\prod\limits_{j=1}^{n}d_j$, 有 $S_i\subseteq\{kd_i|k\in\mathbb{N}^*\}$.

假设 S_i 的首项不为 d_i, 不妨设其首项为 $kd_i\ (k\in\mathbb{N}^*,\ k>1\ )$, 则存在 $j\neq i$

使 $(k-1)d_i \in S_j$, 推出

$$(d_i,\ d_j) \nmid |kd_i - (k-1)d_i| = d_i,$$

矛盾.

故假设不成立, 必有 $S_i = \{kd_i | k \in \mathbb{N}^*\}$.

故 $(**)$ 得证.

结合 $(*)$ 及 $(**)$, 知恰存在一个正整数 i, $(1 \le i \le n)$, 使 $\frac{1}{d_i}\prod\limits_{j=1}^{n} d_j \in S_i$, 原命题得证. $\square$

证明 2 (刘翊哲) 若 $a \notin S_k$, 则对任意正整数 t, 有 $a - td_k \notin S_k$.

不妨设 $\prod\limits_{j=1}^{n} d_j \in S_1$, 那么对 $i \in \{2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$, 有

$$\prod_{j=1}^{n} d_j + \frac{1}{d_i}\prod_{j=1}^{n} d_j \in S_1,$$

所以

$$\prod_{j=1}^{n} d_j + \frac{1}{d_i}\prod_{j=1}^{n} d_j \notin S_i,$$

从而

$$\frac{1}{d_i}\prod_{j=1}^{n} d_j \notin S_i.$$

由于 $\prod\limits_{j=1}^{n} d_j \in S_1$, 所以

$$\prod_{j=1}^{n} d_j \notin S_i\ (i \in \{2,\ 3,\ \cdots,\ n\}),$$

进一步得到 $\frac{1}{d_1}\prod\limits_{j=1}^{n} d_j \notin S_i$,从而有 $\frac{1}{d_1}\prod\limits_{j=1}^{n} d_j \in S_1$,

即知 $\frac{1}{d_i}\prod\limits_{j=1}^{n} d_j \in S_i$ 当且仅当 $\prod\limits_{j=1}^{n} d_j \in S_i$, $i \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, 故命题得证. $\square$

评注 在法一中注意到 $\frac{1}{d_i}\prod\limits_{j=1}^{n} d_j$ 是 $n-1$ 个公差的积, 再结合条件去刻画 $\frac{1}{d_i}\prod\limits_{j=1}^{n} d_j$ 的性质, 即 $(*)$ 式, 接着再证明 $(**)$ 便顺利完成证明. 在法二中只需利用等差数列最基本的性质, 便可证明 $\frac{1}{d_i}\prod\limits_{j=1}^{n} d_j \in S_i \Leftrightarrow \prod\limits_{j=1}^{n} d_j \in S_i$, 即可完成证明.

5. 给定正整数 n 和 k. 如果两个无穷数列 $\{s_i\}_{i\ge1}$ 和 $\{t_i\}_{i\ge1}$ 满足: 对任意正整数 i 和 j 有 $s_i = s_j$ 成立当且仅当 $t_i = t_j$ 成立, 那么我们称这两个数列是等价的. 若无穷数列 $\{r_i\}_{i\ge1}$ 满足 $r_1,\ r_2,\ \cdots$ 和 $r_{k+1},\ r_{k+2},\ \cdots$ 等价, 那么我们称其具有等价周期 k. 假设有 M 个具有等价周期 k 的无穷数列, 每个数列的项都是集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 中的元素, 且它们两两都不是等价的, 求 M 的最大可能值.

解 1 (刘鹏远) 答案: $M_{\max}=n^k$.

(1) 令 $f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k)=\{s_i\}_{i=1}^{+\infty}$, 其中 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, 且满足: $\{s_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 具有等价周期 k. 令 $C_0=0$, 对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$, 进行以下操作:

① 当 $a_i\le n-C_{i-1}$ 时, 令

$$s_{(ta_i+j-1)k+i}=C_{i-1}+j\ (t\in\mathbb{N},\ j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ a_i\}), \tag{*}$$

$$C_i=C_{i-1}+a_i.$$

当 $i=1$ 时, 由 $a_i\le n-C_0=n$, 故 $C_1=C_0+a_1=a_1$, 此时 $s_{tk+i}\ (t\in\mathbb{N})$ 取遍 $1,\ 2,\ \cdots,\ C_1$.

当 $i\ge 2$ 时, 若 $s_{tk+j}\ (t\in\mathbb{N},\ 1\le j\le i-1)$ 取遍 $1,\ 2,\ \cdots,\ C_{i-1}$, 由 $(*)$ 知 $s_{tk+i}\ (t\in\mathbb{N})$ 取遍 $C_{i-1}+1,\ C_{i-1}+2,\ \cdots,\ C_{i-1}+a_i=C_i$.

故 $s_{tk+j}\ (t\in\mathbb{N},\ 1\le j\le i)$ 取遍 $1,\ 2,\ \cdots,\ C_i$.

② 当 $a_i>n-C_{i-1}$ 时, 令 $s_i=n+1-a_i\le C_{i-1},\ C_i=C_{i-1}$, 若 $s_{tk+j}\ (t\in\mathbb{N},\ 1\le j\le i)\ (i\ge 2$ 时) 取遍 $1,\ 2,\ \cdots,\ C_{i-1}$, 则 s_i 在 $s_{tk+j}\ (t\in\mathbb{N})\ (1\le j\le i-1)\ (i\ge 2$ 时) 中出现过.

不妨设 $s_i=s_j$, 则由 $\{s_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 具有等价周期 k, 知

$$s_i=s_j\ \Rightarrow\ s_{tk+i}=s_{tk+j},\ t\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ C_i\}\ (t\in\mathbb{N}).$$

故 $s_{tk+j}\ (t\in\mathbb{N},\ 1\le j\le i)\ (i\ge 2$ 时$)$ 取遍 $1,\ 2,\ \cdots,\ C_i$.

(2) 此时 $f^{-1}\left(\{s_i\}_{i=1}^{+\infty}\right)=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k)$ 满足对 $\{s_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 具有等价周期 k, 则有 $C_0=0$, 对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$:

① 若对任意的 $t\in\mathbb{N}$, $s_{tk+i}>C_{i-1}$, 令 a_i 为 $\{s_{tk+i}\}_{t=0}^{+\infty}$ 的周期, $C_i=C_{i-1}+a_i$.

事实上, 由于对任意 $t\in\mathbb{N}$, $s_{tk+i}\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, 且由抽屉原理知 $\{s_{tk+i}\}_{t=0}^{+\infty}$ 中必有两数相等.

故

$$s_{t_1k+i}=s_{t_2k+i}\ (t_1,\ t_2\in\mathbb{N},\ t_1<t_2)$$

$$\Rightarrow s_{tk+i}=s_{((t_2-t_1)+t)k+i}\ (t\in\mathbb{N})$$

因此 $\{s_{tk+i}\}_{t=0}^{+\infty}$ 有周期.

由等价性, 不妨设 $s_{(ta_i+j)k+i}=C_{i-1+j}\ (t\in\mathbb{N},\ j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ a_i\})$.

当 $i=1$ 时, $C_1=C_0+a_1=a_1$, $s_{tk+1}\ (t\in\mathbb{N})$ 取遍 $1,\ 2,\ \cdots,\ a_i$, 即 $1,\ 2,\ \cdots,\ C_1$.

对 $i\ge 2$, 若 $s_{tk+j}\ (1\le j\le i-1,\ t\in\mathbb{N})$ 取遍 $1,\ 2,\ \cdots,\ C_{i-1}$, 则由于 s_{tk+i} 取遍 $C_{i-1}+1,\ \cdots,\ C_i$, 故 $s_{tk+j}\ (1\le j\le i,\ t\in\mathbb{N})$ 取遍 $1,\ 2,\ \cdots,\ C_i$.

② 若存在 $s_i,\ s_{k+i},\ s_{2k+i},\ \cdots$ 中的数不大于 C_{i-1} ($i\ge 2$), s_{tk+j} ($t\in\mathbb{N},\ 1\le j\le i-1$) 取遍 $1,\ 2,\ \cdots,\ C_i$.

设 $s_{t_1k+i}=s_j$ ($t_1\in\mathbb{N}$), 则由于 $\{s_m\}_{\substack{m\ge 1\\ m\equiv j(\bmod k)}}$ 为周期数列, 故数列中存在一项 $s_{j'}$ 满足 $j'>t_1k$, 且 $s_{t_1k+i}=s_{j'}$, 故

$$s_i=s_{j'-t_1k},\ s_{tk+i}=s_{j+(t-t_1)k}\ (\ t\in\mathbb{N}\ ).$$

故 $s_i,\ s_{k+i},\ s_{2k+i},\ \cdots$ 已被确定且为周期数列.

令 $a_i=n+1-s_i,\ C_i=C_{i-1}$, 则 s_{tk+j} ($t\in\mathbb{N}$) ($1\le j\le i$) 取遍 $1,\ 2,\ \cdots,\ C_i$.

综上所述, f 为双射, 故 $M_{\max}=n^k$. □

解 2 (梁行健) $M_{\max}=n^k$.

因为数列之间的等价是等价关系, 所以只需计算所有具有等价周期 k, 且所有项均取自集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的无穷序列的等价类的个数.

注意到两个序列 $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ 等价当且仅当存在双射 $\sigma:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$\sigma(s_i)=t_i,\ i\in\mathbb{Z}_+.$$

因此, 对于等价周期为 k 的序列 $\{x_n\}$, 存在双射 $\sigma:\ \{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$ 满足

$$\sigma(x_i)=x_{k+i},\ i\in\mathbb{Z}_+.$$

故对任意 $i\in\mathbb{Z}_+$, 我们有

$$x_{kn+i}=\sigma^{(n)}(x_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ n\in\mathbb{Z}_+),$$

故序列 $\{x_k\}$ 由它的前 k 项 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ 和双射 σ 唯一确定, 我们把 $\{x_k\}$ 称为由 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ 和 σ 生成的序列.

考虑任意一个具有等价周期 k 的序列 $\{x_n\}$, 固定其前 k 项 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$, 设它们一共取到 t 个不同的值. 由等价性, 不妨设它们是 $1,\ 2,\ \cdots,\ t$, 且对于任意 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ t-1$, i 第一次出现的位置在 $i+1$ 第一次出现的位置之前.

下面我们确定置换 σ 的个数, 使得由前 k 项 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ 和 σ 生成的这些序列 $\{x_n\}$ 互不等价.

设 $I=\{0,\ 1,\ \cdots,\ t\}$, 定义映射 $\sigma_I:\ I\to I$, 对于任意 $i\in I$, 设 $n_\sigma(i)$ 是满足 $\sigma^{(j)}(i)\in I$ 的最小正整数 j. 令 $\sigma_I(i)=\sigma^{(j)}(i)$, 其中 $j=n_\sigma(i)$.

下证 σ_I 为单射.

假设存在 $n_{\sigma'}(x_i)=n_\sigma(x_i),\ i_1,\ i_2\in I,\ i_1\ne i_2$ 满足 $\sigma_I(i_1)=\sigma_I(i_2)\overset{def}{=}s$.

设 j_1 和 j_2 分别为满足 $\sigma^{(j_1)}(i_1)\in I$ 和 $\sigma^{(j_2)}(i_2)\in I$ 的最小正整数, 则

$\sigma^{(j_1)}(i_1)=\sigma^{(j_2)}(i_2)=s$, 故 $j_1\neq j_2$.

不妨设 $j_1<j_2$, 则有

$$\sigma^{(j_2-j_1)}(i_2)=(\sigma^{-1})^{(j_1)}(\sigma^{(j_2)}(i_2))=(\sigma^{-1})^{(j_1)}\,s=i_1\in I,$$

这与 j_2 的最小性矛盾. 因此 σ_I 为单射.

从而, 由 I 为有限集知, σ_I 为满射, 因此 σ_I 为 I 上的置换.

引理 设 σ 和 σ' 为 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 上的两个置换, 则由 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ 和 σ 生成的序列 $\{x_n\}$ 与由 $x_1,\ \cdots,\ x_k$ 和 σ' 生成的序列 $\{x'_n\}$ 等价当且仅当

(1) $\sigma_I=\sigma'_I$;

(2) 对于每个 $i\in I$ 均有 $n_\sigma(i)=n_{\sigma'}(i)$.

证明 必要性. 设 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 上的置换 π 满足: $\pi(x_i)=x'_i$ 对任意正整数 i 成立, 则对所有 $i\in I$, 有 $\pi(i)=i$, 故对所有 $i\notin I$, $\pi(i)\notin I$.

对 $1\le i\le k$, 我们有 $x_{pk+i}=\sigma^{(p)}(x_i)$.

因此, 对 $p=1,\ 2,\ \cdots,\ n_\sigma(x_i)-1$, 有

$$x_{pk+i}\notin I\ \Rightarrow\ x'_{pk+i}=\pi(x_{pk+i})\notin I,$$

并且

$$x_{kn_\sigma(x_i)+i}\in I\ \Rightarrow\ x'_{kn_\sigma(x_i)+i}=\pi\left(x_{kn_\sigma(x_i)+i}\right)\in I.$$

故由 $n_\sigma(i)$ 的定义知,

$$n_{\sigma'}(x_i)=n_\sigma(x_i)\overset{def}{=}j,$$

而且

$$\sigma'_I(x_i)=\sigma'^{(j)}(x'_i)=x'_{kj+i}=\pi(x_{kj+i})=\pi(\sigma^{(j)}(x_i))=\pi(\sigma_I(x_i))=\sigma_I(x_i).$$

故由 i 的任意性知必要性得证.

充分性. 设 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 上的置换 π 满足如下条件:

(1) $\pi(i)=i,\ i\in I$;

(2) 对任意的 $i\in I$ 及 $1\le j<n_\sigma(i)$, 均有 $\pi\left(\sigma^{(j)}(i)\right)=\sigma'^{(j)}(i)$;

下证置换 π 满足 $\pi(x_i)=x_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots$.

对 i 归纳. $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ 时, 显然成立.

假设小于 i 时, 结论成立, 其中 $i\ge k+1$.

1° 若 $x_i\in I$, 分别取最小的正整数 $j_1,\ j_2<i$ 满足 $x_{i-k\cdot j_1},\ x'_{i-k\cdot j_1}\in I$, 注意到 $\pi(i)\in I$ 当且仅当 $i\in I$, 故 $j_1=j_2$, 因此由归纳假设知,

$$\pi(x_{i-k\cdot j_1})=x'_{i-k\cdot j_1},$$

故由 $x_{i-k\cdot j_1}\in I$ 知,

$$x_{i-k\cdot j_1}=x'_{i-k\cdot j_1},$$

故

$$n_\sigma(x_{i-k\cdot j_1})=n_\sigma(x'_{i-k\cdot j_1}),$$

因此

$$\pi(x_i)=x_i=\sigma_I(x_{i-k\cdot j_1})=\sigma'_I(x'_{i-k\cdot j_1})=x'_i.$$

2° 若 $x_i\notin I$, 同情形 1 知, 存在正整数 j, 满足 $x_{i-k\cdot j_1}=x'_{i-k\cdot j_1}\in I$, 且对任意的 $1\le j_1<j$ 都有 $x_{i-k\cdot j_1}$, $x'_{i-k\cdot j_2}\notin I$, 此时有

$$j>n_\sigma(x_{i-k\cdot j_1})=n_{\sigma'}(x'_{i-k\cdot j_1}).$$

故

$$\pi(x_i)=\pi\left(\sigma^{(j)}(x_{i-k\cdot j_1})\right)=\sigma'^{(j)}(x'_{i-k\cdot j_1})=x'_i,$$

结论成立.

由归纳基本原理, 充分性得证, 故引理得证.

回到原题. 对于固定的 $x_1,\ \cdots,\ x_k$, 确定置换 σ_I 的方法数为 $t!$, 确定 $n_\sigma(i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$ 的方法数为 $\binom{n}{t}$ (这里的方法数等于方程 $a_1+\cdots+a_t\le n-t$ 的非负整数解的个数), 设 $F(k,\ t)$ 是从集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$ 到集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ t\}$ 的满射个数, 则由引理知, 所求等价类个数为

$$\sum_{t=1}^{k}\frac{F(k,\ t)}{t!}\cdot t!\ \binom{n}{t}=\sum_{t=1}^{k}F(k,\ t)\ \binom{n}{t}.$$

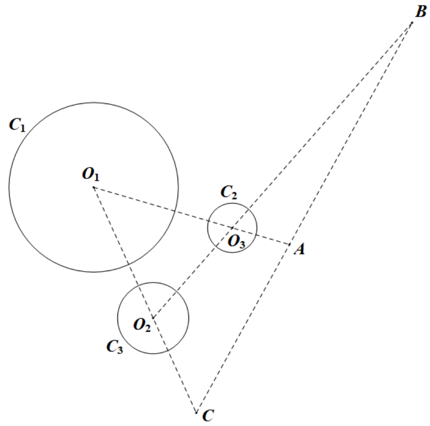
又在 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$ 到 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的所有映射中, 值域为 t 元集的映射恰有 $F(n,\ t)\ \binom{n}{t}$ 个, 故所求即为 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$ 到 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的所有映射的个数, 而这显然为 n^k.

因此, 所求最大值为 n^k. □

评注 本题是一道中等偏难的组合计数题, 关键在于真正理解并转化序列"等价"的定义, 利用双射重新叙述定义之后的想法是自然的, 在书写时对表述的要求较高.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上, 且满足四边形 $AFDE$、$BDEF$、$CEFD$ 都有内切圆. 证明: $\triangle ABC$ 的内切圆半径是 $\triangle DEF$ 内切圆半径的两倍.

证明 (谢朋睿) 先证明一个引理.

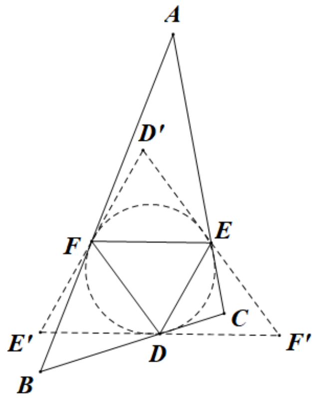


引理 (蒙日定理) 平面上三个圆 C_1, C_2, C_3, 设 $C_1, C_2; C_2, C_3; C_3, C_1$ 的外位似中心分别是 A, B, C. 则 A, B, C 三点共线.

证明 设圆 C_1, C_2, C_3 的圆心为 O_1, O_2, O_3, 半径为 r_1, r_2, r_3, 由两圆位似的性质, 知 O_1, O_2, A; O_2, O_3, B; O_3, O_1, C 分别三点共线, 且

$$\frac{O_1A}{O_2A}=\frac{r_1}{r_2},\ \frac{O_2B}{O_3B}=\frac{r_2}{r_3},\ \frac{O_3C}{O_1C}=\frac{r_3}{r_1}\ \Rightarrow\ \frac{O_1A}{O_2A}\cdot\frac{O_2B}{O_3B}\cdot\frac{O_3C}{O_1C}=1.$$

对 $\triangle O_1O_2O_3$ 使用 Menelaus 定理的逆定理, 得 A, B, C 三点共线, 引理获证.



回到原题.

作 $\triangle D'E'F'$, 使得 D, E, F 分别是 $E'F', F'D', D'E'$ 的中点.

由 $\triangle DEF \backsim \triangle D'E'F'$, 相似比为 $1:2$, 知 $\triangle D'E'F'$ 的内切圆半径是 $\triangle DEF$ 内切圆半径的 2 倍.

我们证明: $\triangle ABC$ 和 $\triangle D'E'F'$ 有相同的内切圆.

因为四边形 $AFDE$ 有内切圆, 所以

$$AF+DE=AE+DF,$$

而

$$D'F = DE,\ DF = D'E,$$

故

$$AF + D'F = AE + D'E,$$

进而四边形 $AED'F$ 有 $A-$旁切圆, 记为 ω_a.

同理, 四边形 $BDE'F$, $CEF'D$ 分别有 $B-$旁切圆, $C-$旁切圆, 分别记为 ω_b, ω_c.

假设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle D'E'F'$ 的内切圆不同, 那么 ω_a, ω_b, ω_c 互不相同. 因为 ω_b, ω_c 都与 BC, $E'F'$ 相切, 所以 ω_b, ω_c 的外位似中心为 $BC \cap E'F' = D$.

同理, ω_a, ω_c; ω_a, ω_b 的外位似中心分别为 $AC \cap D'F' = E$, $AB \cap D'E' = F$. 对 ω_a, ω_b, ω_c 使用引理, 得到 D, E, F 三点共线, 矛盾!

因此 $\triangle ABC$ 和 $\triangle D'E'F'$ 有相同的内切圆.

故 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle D'E'F'} = 2r_{\triangle DEF}$ (这里 r 表示内切圆半径), 原命题得证. □

评注 这是一道难度较大的几何题, 计算方法基本行不通, 作图困难, 从而难以发现题目的关键: $\triangle ABC$ 和 $\triangle D'E'F'$ 有相同的内切圆. 后面的反证与戴维斯定理的证明有异曲同工之妙.