2021 年 IMO 第二题的一个推广

赵斌

(海亮高级中学, 311800)

2021 年 IMO 第二题如下:

问题 对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 证明下述不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i-x_j|}\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i+x_j|}.$$

本文给出了该问题的一个推广, 证明了如下定理:

定理 已知 f 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的单调不减的上凸函数, 且 $f(0)=0$, 则对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(|x_i-x_j|)\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(|x_i+x_j|).$$

上面的推广最先由冷岗松老师提出, 下面证明的想法源于俞辰捷老师.

证明 不等式对 $n=0,1$ 时显然成立. 下证 $n\ge 2$ 时成立, 我们采用第二数学归纳法.

首先注意到, 不等式左侧具有平移不变性, 即当所有的 x_i 增加一个实数 λ 时, 不等式左侧不变的.

我们考察不等式的右侧, 记 $\min\limits_{x_i+x_j}(x_i+x_j)=m, \max\limits_{x_i+x_j}(x_i+x_j)=M$, 并记,

$$f(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(|x_i+x_j+2\lambda|),$$

则当 $m\ge 0$ 时, 由 f 的单调不减性, 得,

$$f(0)\ge f\left(-\frac{m}{2}\right),$$

即可将每个变量增加 $-\frac{m}{2}$ 后不等号右边不增. 当 $M\le 0$ 时类似.

修订日期: **2021-07-24.**

下设 $m<0<M$, 设

$$\alpha=\min_{x_i+x_j>0}(x_i+x_j),\beta=\max_{x_i+x_j<0}(x_i+x_j),$$

注意到在 $\lambda\in[-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}]$ 时, x_i+x_j 与 $x_i+x_j+2\lambda$ 符号相同. 故由 f 的上凸性, 我们有,

$$f(0)\geq\min\left\{f\left(-\frac{\alpha}{2}\right),f\left(-\frac{\beta}{2}\right)\right\},$$

即将问题转化为有两数之和为 0 的情形, 即存在 $i,j,1\leq i,j\leq n$ 使得 $x_i+x_j=0$.

(a) 若 $i=j$, 不妨设 $i=j=n$, 即 $x_n=0$, 则原不等式左边为:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}f(|x_i-x_j|)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(|x_i|),$$

原不等式右边为:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}f(|x_i+x_j|)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(|x_i|),$$

由归纳假设该不等式成立.

(b) 若 $i\neq j$, 不妨设 $i=n-1,j=n$, 即 $x_{n-1}+x_n=0$, 则原不等式左边为:

$$\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}f(|x_i-x_j|)+2\sum_{i=1}^{n-2}\left(f(|x_i-x_n|)+f(|x_i+x_n|)\right)+2f(|2x_n|),$$

原不等式右边为:

$$\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}f(|x_i+x_j|)+2\sum_{i=1}^{n-2}\left(f(|x_i-x_n|)+f(|x_i+x_n|)\right)+2f(|2x_n|),$$

由归纳假设该不等式成立. □