“n” 需要不小于 100 吗

——2021 年 IMO 第一题思路分析

冯跃峰

今年 IMO 的第一题是一道非常“人性化”的题目 (也就是人们通常所说的“送分题”), 作为大考的首题, 让选手从容易入手, 可使其平复紧张的情绪, 正常发挥能力水平. 题目如下:

【原题】 给定整数 $n \geq 100$, 伊凡把 $n, n+1, \cdots, 2n$ 中每个数写在不同的卡片上, 然后将这 $n+1$ 张卡片打乱顺序并分成两堆. 试证: 至少有一堆中包含两张卡片, 使得这两张卡片上的数之和是一个完全平方数.

通过分析, 我们发现, 其中未必要求“$n \geq 100$”, 可优化为“$n \geq 99$”, 但 $n = 98$ 时结论不成立. 也就是说, 题目可改成如下形式:

【改编题】 试证: 对给定整数 $n \geq 99$, 将 $n+1$ 个正整数 $n, n+1, \cdots, 2n$ 任意分成两组, 必有一组包含两个数, 其和是完全平方数. 但 $n = 98$ 时结论不成立.

【题感】 从目标看, 本题属于“存在性”问题. 要证明有一组包含两个数, 具有特定的性质: 其和是完全平方数.

这有明显的抽屉原理背景, 构造“特定性质”抽屉即可: 同一抽屉中的任何两个数的和为平方数.

但仔细一想, 问题没那么简单, 因为题中“抽屉”的个数是确定的: $n+1$ 个数任意分成两堆, 每一组为一个抽屉.

由此想到换一种维度思考: 只需在区间 $[n,\ 2n]$ 中找到 3 个元素 a, b, c, 使其中任何两个数的和为平方数.

如何找到这样的 3 个数? 由于 n 是不确定的, 可从特例开始, 寻找规律.

【换维思考】 更改策略: 找到 3 个数, 其中任何 2 个数的和为平方数.

修订日期: 2021-07-25.

【研究特例】 取 $n=99$, 则相应区间为 $[99,\ 198]$.

此区间有 100 个数, 仍然很复杂.

尽管题中限定 $n\geq 99$, 但并不能阻止我们对较小的"n"进行研究, 从中发现规律, 最终看出"$n\geq 99$"的实际意义.

为直观起见, 用点表示数, 如果两数的和为平方数, 则将对应的点连边, 从而问题变成寻找长为 3 的圈.

【更换参数】 依次考察自然数 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 构成的图, 发现如下的一些边:

$1^2: 0\sim 1,$

$2^2: 0\sim 4,\ 1\sim 3,$

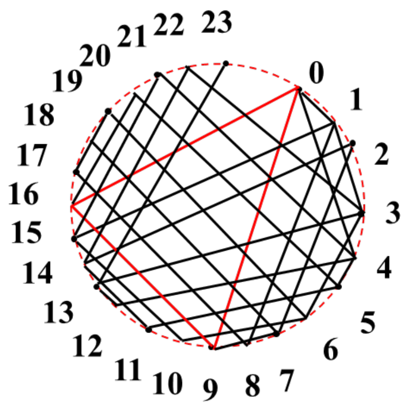
$3^2: 0\sim 9,\ 1\sim 8,\ 2\sim 7,\ 3\sim 6,\ 4\sim 5,$

$4^2: 0\sim 16,\ 1\sim 15,\ 2\sim 14,\ 3\sim 13,\ 4\sim 12,$

$5^2: 0\sim 25,\ 1\sim 24,\ 2\sim 23,\ 3\sim 22,\ 4\sim 21,\ 5\sim 20,\ 6\sim 19,\ 7\sim 18,\ 8\sim 17,\ 9\sim 16,\ 10\sim 15,\ 11\sim 14,\ 12\sim 13.$

至此, 发现一个 3−圈: $(0,\ 9,\ 16)$.

若直接画一个图, 则更一目了然.



这个圈有何特点? 一个显然的特点是 3 个数本身都是平方数. 但这个特点是难以迁移的: 要使任两数和为平方数, 则要求任两平方数在同一个勾股组中, 这是很难实现的.

考察圈中任何两个数的和: $0+9=3^2,\ 0+16=4^2,\ 9+16=5^2$, 发现每两数和是 3 个连续平方数.

【特征迁移】 一般地, 我们期望有 3−圈 (a,b,c), 使

$$a+b=(m-1)^2,\ a+c=m^2,\ b+c=(m+1)^2.$$

三式相加, 得 $2(a+b+c)=3m^2+2$, 所以 m 为偶数. 令 $m=2k$, 则

$$a+b=(2k-1)^2,\ a+c=4k^2,\ b+c=(2k+1)^2,\ a+b+c=6k^2+1.$$

解得

$$a=2k^2-4k,\ b=2k^2+1,\ c=2k^2+4k.$$

【待定参数】 现在确定 k 的取值, 使 $a,\ b,\ c\in[n,\ 2n]$.

令 $2k^2-4k\geq n,\ 2k^2+4k\leq 2n$.

下面证明, 当 $n\geq 99$ 时(此时才发现该条件的意义), 上述关于 k 的不等式组有正整数解.

由于 k 要同时满足两个条件, 可采用"拟对象逼近"策略: 先满足其中一个条件, 然后优化到满足另一个条件.

【拟对象逼近】 考察满足"$2k^2+4k\leq 2n$"的整数 k, 期望其中有一个 k, 还满足 $2k^2-4k\geq n$.

怎样找到这样的 k? 这自然是 k"越大越好", 想到取极端.

【考察极端】 取最大的整数 k, 使 $k^2+2k\leq n$, 由 k 的"最大性", 有

$$(k+1)^2+2(k+1)>n.$$

我们只需证明对这样取定的 k, 有 $2k^2-4k\geq n$.

为了利用 $n<(k+1)^2+2(k+1)$, 采用"差比放缩法".

$$\begin{aligned}n-(2k^2-4k)&<[(k+1)^2+2(k+1)]-(2k^2-4k)\\&=-k^2+8k+3\\&=-(k-4)^2+19.\end{aligned}$$

要使 $-(k-4)^2+19\leq 0$, 只需 $k\geq 9$, 这由 $(k+1)^2+2(k+1)>n\geq 99$ 保证, 命题获证.

【构造反例】 当 $n=98$ 时, 构造的思路是很简单的, 因为 $[98,\ 196]$ 中两数的和只可能是 225, 256, 289, 324, 361, 令其和为五者之一的两数分属两个不同集合即可.

但具体构造过程并不简单, 我们最初的构造就出现漏洞.

为了呈现构造的规律, 我们将每个集合分解为若干等差数列的并. 此外, 为了使构造简单, 希望每个等差数列尽可能长, 且公差尽可能小.

【以简驭繁】 最简单的整数等差数列的公差为 1, 可取"最长"的连续自然数序列:

$$98,\ 99,\ \cdots,\ 112\in A,$$

则由平方数 225, 可知

$$113,\ 114,\ \cdots,\ 127 \in B.$$

如此下去, 得到一种构造:

$$A = \{98,\ 99,\ \cdots,\ 112\} \cup \{128,\ 129,\ \cdots,\ 144\} \cup \{162,\ 163,\ \cdots,\ 176\},$$

$$B = \{113,\ 114,\ \cdots,\ 127\} \cup \{145,\ 146,\ \cdots,\ 161\} \cup \{177,\ 178,\ \cdots,\ 196\}.$$

但这个构造有漏洞, 比如: A 中有 $112 + 144 = 256$ 等等.

【改进】 再尝试公差为 2 的等差数列: 取“最长”的等差数列:

$$98,\ 100,\ \cdots,\ 128 \in A.$$

因为 $225 - 98 = 127,\ 225 - 128 = 97$, 所以必有等差数列:

$$99,\ 101,\ \cdots,\ 127 \in B.$$

同样, $256 - 98 = 158,\ 256 - 128 = 128$, 所以必有等差数列:

$$130,\ 132,\ \cdots,\ 158 \in B.$$

又 $289 - 98 = 191,\ 289 - 128 = 161$, 所以必有等差数列:

$$161,\ 163,\ \cdots,\ 191 \in B.$$

但其中 $161 + 163 = 182$, 想到将序列的“首项” 161 调入 A, 这样, 又必须将以前属于 A 的 128 调入 B $(161 + 128 = 172)$.

至此,

$$A \supseteq (\{98,\ 100,\ \cdots,\ 126\} \cup \{161\}).$$

前面的过程都需作相应的修改:

因为 $225 - 98 = 127,\ 225 - 126 = 99$, 所以必有等差数列:

$$99,\ 101,\ \cdots,\ 127 \in B.$$

同样, $256 - 98 = 158,\ 256 - 126 = 130$, 所以必有等差数列:

$$130,\ 132,\ \cdots,\ 158 \in B.$$

又 $289 - 98 = 191,\ 289 - 126 = 163$, 所以必有等差数列:

$$163,\ 165,\ \cdots,\ 191 \in B.$$

此外, 前面已调入 $128 \in B$.

所以,

$$B \supseteq (\{99,\ 101,\ \cdots,\ 127\} \cup \{128,\ 130,\ 132,\ \cdots,\ 158\} \cup \{163,\ 165,\ \cdots,\ 191\}).$$

【局部扩展】 现在, 让每个等差数列尽可能延长, 第一个无法延长, 因为 $127+129=256$.

第二个可加入 160 (162 不能加入: $127+162=289$); 第三个可加入 193, 195. 由此, 得到如下构造:

$$A=\{98,\ 100,\ \cdots,\ 126\}\cup\{129,\ 131,\ \cdots,\ 161\}\cup\{162,\ 164,\ \cdots,\ 196\},$$

$$B=\{99,\ 101,\ \cdots,\ 127\}\cup\{128,\ 130,\ \cdots,\ 160\}\cup\{163,\ 165,\ \cdots,\ 195\}.$$

穷举检验可知, $A,\ B$ 中都没有其和为平方数的两个数, 故 $n=98$ 时结论不成立.

【注】 该构造由杨丕业老师通过电脑编程给出, 特此致谢! 以上是我们还原的探索过程.

【新写】 对给定的正整数 $n(n\geq 99)$, 存在唯一的正整数 k, 使

$$k^2+2k\leq n<(k+1)^2+2(k+1).$$

对这样的 k, 由

$$(k+1)^2+2(k+1)>n\geq 99,$$

有 $k\geq 9$. 于是,

$$\begin{aligned}n-(2k^2-4k)&<[(k+1)^2+2(k+1)]-(2k^2-4k)\\&=-k^2+8k+3\\&=-(k-4)^2+19\\&\leq -52+19<0.\end{aligned}$$

令

$$a=2k^2-4k,\ b=2k^2+1,\ c=2k^2+4k,$$

则 $a,\ b,\ c\in[n,\ 2n]$, 且

$$a+b=(2k-1)^2,\ a+c=4k^2,\ b+c=(2k+1)^2.$$

依题意, a,b,c 被分成 2 组, 必定有一组含有其中 2 个数, 这两个数的和为平方数.

$n=98$ 时, 反例如下:

令

$$A=\{98,\ 100,\ \cdots,\ 126\}\cup\{129,\ 131,\ \cdots,\ 161\}\cup\{162,\ 164,\ \cdots,\ 196\},$$

$$B=\{99,\ 101,\ \cdots,\ 127\}\cup\{128,\ 130,\ \cdots,\ 160\}\cup\{163,\ 165,\ \cdots,\ 195\},$$

则 A, B 中都没有其和为平方数的两个数.

综上所述, 命题获证. $\square$

【致谢】 感谢瞿振华教授仔细审阅全稿, 并修正文中疏漏.