

2021 年第二届百年老校数学竞赛试题解答

王彬

(中国科学院数学与系统科学研究院, 100190)

第二届百年老校数学竞赛于 2021 年 8 月 1 日至 5 日在浙江省宁波中学举行. 下面介绍本次考试试题及解答.

I. 试题

1. 某班有 10 名同学计划在暑假举行若干次聚会, 要求每名同学至多参加三次聚会, 并且任意两名同学至少在一次聚会中相遇.

求最大的正整数 m , 使得无论如何安排符合上述要求的聚会, 都一定存在某次聚会有至少 m 名同学参加.

(清华附中 王彗兴 供题)

2. 求最大的实数 λ , 使得不等式

$$\sum_{k=1}^n x_k^3 (x_k - x_{k-1}) \geq \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{n}$$

对任意正整数 n 以及任意实数 $0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = 1$ 均成立.

(宁波中学 顾寅 供题)

3. 给定正整数 L . 记

$$a_n = L + 1! + 2! + \cdots + n!, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

证明: 对任意素数 $p > 20210802$, 存在无穷多个非负整数对 (m, k) , 满足 $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+100}$ 这 100 个数都能被 p^k 整除, 并且都不能被 p^{k+1} 整除.

(苏州中学 朱磊克 供题)

4. 已知素数 p, q 满足 $p = 2q + 1$.

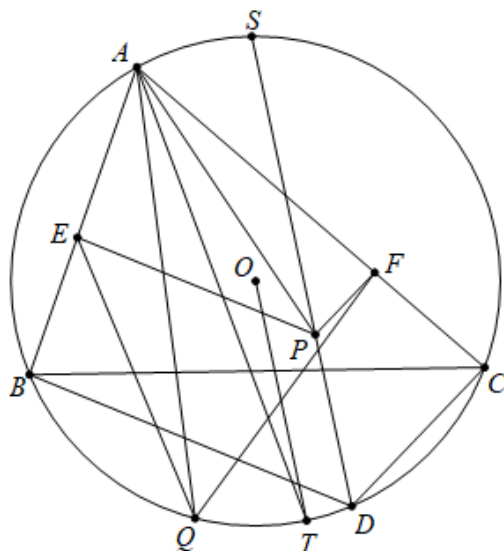
证明: 存在正整数 m 使得 mp 的十进制表示的各位数字之和是 2 或 3.

(清华附中 黄鹤 供题)

5. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, D 是弧 $\widehat{BC}$ (不含 A) 上一点, S 为弧 $\widehat{BAC}$ 的中点. P 为线段 SD 上一点, 过 P 作 DB 的平行线交 AB 于点 E , 过 P 作 DC 的平行线交 AC 于点 F , 过 O 作 SD 的平行线交弧 $\widehat{BDC}$ 于点 T . 已知 $\odot O$ 上的点 Q 满足 $\angle QAP$ 被 AT 平分.

证明: $QE = QF$.

(南京师大附中 王子扬 供题)



6. 给定素数 $p \geq 5$. 称 $1, 2, \dots, p$ 的排列 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为“好排列”, 如果对 $k = 1, 2, \dots, p$ 均有 $a_k \neq k$, 并且 $a_1 + 2a_2 + \dots + pa_p$ 是 p 的倍数.

求“好排列”的个数除以 $p^2 - p$ 的余数.

(镇海中学 沈虎跃 供题)

II. 解答

1. 某班有10名同学计划在暑假举行若干次聚会, 要求每名同学至多参加三次聚会, 并且任意两名同学至少在一次聚会中相遇.

求最大的正整数 m , 使得无论如何安排符合上述要求的聚会, 都一定存在某次聚会有至少 m 名同学参加.

解. 设有 n 次聚会, 聚会人数分别为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ (均为正整数). 我们有:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &\leq 10 \times 3 = 30 \\ \binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \dots + \binom{x_n}{2} &\geq \binom{10}{2} = 45 \end{aligned}$$

记 $S_1 = x_1 + \cdots + x_n, S_2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, 则 $S_2 - S_1 \geq 90$ 可知 $S_2 \geq 4S_1$, 即

$$\max\{x_1, \dots, x_n\} \geq \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + \cdots + x_n} \geq 4$$

若上式等号成立, 则必须 $x_1 = \cdots = x_n = 4$, 并且 $S_1 = x_1 + \cdots + x_n = 30$, 这样可得 $n = 7.5$ 导致矛盾. 所以我们有 $\max\{x_1, \dots, x_n\} \geq 5$, 即一定存在某次聚会有至少 5 名同学参加, 即 $m = 5$ 满足题意.

另一方面, 我们给出 10 名同学参加聚会的一种安排方式: 共 A, B, C, D, E, F 六次聚会, 每次聚会恰好有 5 名同学参加, 下面的 10 个三元子集分别表示 10 名同学各参加哪三次聚会:

$$\{ABC\}, \{CDE\}, \{AEF\}, \{BDF\}, \{ABD\},$$

$$\{ADE\}, \{BCE\}, \{BEF\}, \{CDF\}, \{ACF\}$$

易知 A, B, C, D, E, F 中的每一个在上述 10 个三元子集中恰好出现 5 次, 并且这 10 三元子集两两相交(因为 10 对互补的三元子集均恰好出现一个). 即每次聚会都恰好有 5 名同学参加, 并且任意两名同学至少在一次聚会中相遇. 这意味着 $m \geq 6$ 不满足题意.

因此所求的最大正整数 m 是 5. □

注记. 另一种构造

$$\{ABC\}, \{ABC\}, \{BEF\}, \{BEF\}, \{CDF\},$$

$$\{CDF\}, \{ABD\}, \{AEF\}, \{ADE\}, \{CDE\}.$$

2. 求最大的实数 λ , 使得不等式

$$\sum_{k=1}^n x_k^3(x_k - x_{k-1}) \geq \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{n}$$

对任意正整数 n 以及任意实数 $0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = 1$ 均成立.

解法一. 设 $A = \sum_{k=1}^n x_k^3(x_k - x_{k-1}), B = \sum_{k=1}^n x_{k-1}^3(x_k - x_{k-1})$, 则

$$\begin{aligned} A + B &= \sum_{k=1}^n (x_k^3 + x_{k-1}^3)(x_k - x_{k-1}) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k^3 + x_k^2 x_{k-1} + x_k x_{k-1}^2 + x_{k-1}^3)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k^4 - x_{k-1}^4) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A - B &= \sum_{k=1}^n (x_k^3 - x_{k-1}^3)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 (x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2) \\
&\geq \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 (x_k^2 + 2x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2) \\
&= \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n (x_k^2 - x_{k-1}^2)^2 \\
&\geq \frac{3}{4} \times \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n (x_k^2 - x_{k-1}^2) \right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

所以 $A \geq \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{n}$, 即 $\lambda = \frac{3}{8}$ 满足题目要求.

另一方面, 我们取 $x_k = \sqrt{\frac{k}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n$. 此时

$$\begin{aligned}
A + B - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 (x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 \\
&\leq \frac{1}{2n} \times \max_k \{(x_k - x_{k-1})\} = \frac{1}{2n} \times (x_1 - x_0) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

$$A - B - \frac{3}{4} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^4 \leq \frac{1}{4} \times \max_k \{(x_k - x_{k-1})^3\} = \frac{1}{4n\sqrt{n}}$$

即此时我们有 $A \leq \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{n} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{n\sqrt{n}}$, 这样满足题意的 λ 需要满足

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{n} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{n\sqrt{n}} \geq A \geq \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \lambda \leq \frac{3}{8} + \frac{3}{8\sqrt{n}}$$

对所有正整数 n 均成立. 故 $\lambda \leq \frac{3}{8}$, 即满足题目要求的最大实数 λ 是 $\frac{3}{8}$. □

注记. 一般的, 对于区间 $[0, 1]$ 的下凸函数 $f(x)$, 我们有

$$A = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \times f(x_k) \geq \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{2n} \times \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)} dx \right)^2.$$

我们取 $B = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \times f(x_{k-1})$, 由凸性有: $A + B \geq 2 \int_0^1 f(x) dx$.

以及

$$\begin{aligned}
n(A - B) &= n \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) \\
&\geq \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1}))} \right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x) dx} \right)^2 \\
&\geq \left(\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{f'(x)} dx \right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)} dx \right)^2.
\end{aligned}$$

特别的, 当 $f(x) = x^m$ 时, $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{m+1}$, $\int_0^1 \sqrt{f'(x)}dx = \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$, 我们有

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \times x_k^m \geq \frac{1}{m+1} + \frac{2m}{(m+1)^2} \times \frac{1}{n}.$$

解法二. 固定正整数 n , 对任意的实数 $0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = 1$, 设 $\sum_{k=1}^n x_k^3(x_k - x_{k-1})$ 的最小值为 A_n .

考虑 A_n 与 A_{n-1} 的递推关系, 记 $y = x_{n-1}$, $y_k = \frac{x_k}{x_{n-1}} = \frac{x_k}{y}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, 则

$$\sum_{k=1}^n x_k^3(x_k - x_{k-1}) = 1 - y + y^4 \sum_{k=1}^{n-1} y_k^3(y_k - y_{k-1}).$$

因此

$$A_n = \max_y \{(1 - y) + y^4 \times A_{n-1}\} = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{\sqrt[3]{4A_{n-1}}}.$$

题目所需的 λ 是对任意正整数 n 都有: $A_n \geq \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{n}$, 即 $B_n = \frac{1}{4A_{n-1}} \leq \frac{n}{4\lambda}$ 对任意 n 成立. $A_1 = 1$, $B_1 = \frac{1}{3}$, 我们看看 B_n 的变化情况.

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{4A_n - 1} = \frac{1}{3 - 3\frac{1}{\sqrt[3]{4A_{n-1}}}} = \frac{\sqrt[3]{4A_{n-1}}}{3(\sqrt[3]{4A_{n-1}} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt[3]{4A_{n-1}}(1 + \sqrt[3]{4A_{n-1}} + (\sqrt[3]{4A_{n-1}})^2)}{3(4A_{n-1} - 1)} \\ &= \frac{1}{4A_{n-1} - 1} + \frac{\sqrt[3]{4A_{n-1}} + (\sqrt[3]{4A_{n-1}})^2 + 4A_{n-1} - 3}{3(4A_{n-1} - 1)} \quad (\text{记 } t = \sqrt[3]{4A_{n-1}}) \\ &= \frac{1}{4A_{n-1} - 1} + \frac{t + t^2 + t^3 - 3}{3(t^3 - 1)} = B_{n-1} + \frac{t^2 + 2t + 3}{3(t^2 + t + 1)} \end{aligned}$$

即 $\{B_n\}$ 数列的增量

$$B_n - B_{n-1} = \frac{t^2 + 2t + 3}{3(t^2 + t + 1)} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \quad \text{因为 } t = \sqrt[3]{4A_{n-1}} > 1$$

这样由归纳法易得 $B_n < \frac{2n}{3}$, 即 $\lambda = \frac{3}{8}$ 满足题意.

另一方面, 当 n 充分大时, B_n 无界增长, A_n 接近于 $\frac{1}{4}$, $t = \sqrt[3]{4A_{n-1}}$ 接近于 1, 增量 $B_n - B_{n-1}$ 接近于 $\frac{2}{3}$. 即对任意的 $\alpha < \frac{2}{3}$, 当 n 足够大时都有 $B_n - B_{n-1} > \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}$, 这样 $B_n > \alpha n$ 对充分大的 n 成立.

因此当 $\lambda > \frac{3}{8}$ 即 $\frac{1}{4\lambda} < \frac{2}{3}$ 时, 对充分大的 n 有 $B_n > \frac{n}{4\lambda}$, 即这样的 λ 不合题意.

因此满足题目要求的最大实数 λ 是 $\frac{3}{8}$. □

3. 给定正整数 L . 记

$$a_n = L + 1! + 2! + \cdots + n!, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

证明: 对任意素数 $p > 20210802$, 存在无穷多个非负整数对 (m, k) , 满足 $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+100}$ 这 100 个数都能被 p^k 整除, 并且都不能被 p^{k+1} 整除.

证. 对素数 p 与正整数 n , 记 $\nu_p(n)$ 为满足 $p^k | n$ 的最大非负整数 k .

题目所证即数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个长为 100 的段 $(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+100})$ 有相同的 $\nu_p(\cdot)$ 值. 我们证明

引理. 对任意正整数 N , $A_N = \{a_{pN-1}, a_{pN}, a_{pN+1}, \dots, a_{pN+p-1}\}$ 中存在脚标连续的 100 个数有相同的 $\nu_p(\cdot)$ 值.

我们记 $\beta = \beta_N = \nu_p((pN)!)$, 即 A_N 中的 $p+1$ 个数模 p^β 同余.

若 $\nu_p(a_{pN-1}) < \beta$, 则对任意 $m \geq pN$ 均有 $\nu_p(a_m) = \nu_p(a_{pN-1})$, 引理成立.

若 $\nu_p(a_{pN-1}) \geq \beta$, 则 A_N 中的数都被 p^β 整除. 设 A_N 中被 $p^{\beta+1}$ 整除的数依次为 $a_{t_1}, a_{t_2}, \dots, a_{t_l}$. 其中 $pN-1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_l \leq pN+p-1$. 若引理不成立, 则 $t_{i+1} - t_i \leq 100, i = 1, 2, \dots, l-1$, 以及 $t_1 \leq pN+99, t_l \geq pN+p-100$.

对某个 $i = 1, 2, \dots, l-1$, 记 $t_{i+1} - t_i = k$, 我们考虑:

$$\begin{aligned} a_{t_{i+1}} - a_{t_i} &= (t_i + 1)! + (t_i + 2)! + \dots + (t_i + k)! \\ &= (t_i + 1)! \times [1 + (t_i + 2) + (t_i + 2)(t_i + 3) \\ &\quad + \dots + (t_i + 2)(t_i + 3) \dots (t_i + k)] \end{aligned}$$

由 $pN \leq t_i + 1 \leq pN + p - 1$, 可知 $\nu_p((t_i + 1)!) = \nu_p((pN)!) = \beta$,

因此 $p^{\beta+1} | a_{t_{i+1}} - a_{t_i} = a_{t_i+k} - a_{t_i}$ 意味着

$$p | 1 + (t_i + 2) + (t_i + 2)(t_i + 3) + \dots + (t_i + 2)(t_i + 3) \dots (t_i + k).$$

我们考虑多项式序列

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 1, f_2(t) = 1 + (t + 2), f_3(t) = 1 + (t + 2) + (t + 2)(t + 3), \\ f_k(t) &= 1 + (t + 2) + (t + 2)(t + 3) + \dots + (t + 2)(t + 3) \dots (t + k), k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

我们得到: 若 $t_{i+1} - t_i = k$ 则 $f_k(t_i) \equiv 0 \pmod{p}$.

注意到 $f_k(t)$ 是关于 $k-1$ 次首一多项式. 由拉格朗日定理, 即有限域 F_p 上的多项式的根的个数不超过该多项式的次数, 因此在模 p 意义下至多有 $k-1$ 个 t 使得 $f_k(t) \equiv 0 \pmod{p}$. 即 $t_{i+1} - t_i = k$ 的情况至多出现 $k-1$ 次.

这就意味着 $t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_l - t_{l-1}$ 这些数的分布情况是:

没有 1, 至多有一个 2, 至多有两个 3, $\dots$, 至多有 $k-1$ 个 $k, \dots$, 至多有 99 个 100, 没有 101 以上的. 这样

$$t_l - t_1 = \sum_{i=1}^{l-1} (t_{i+1} - t_i) \leq 0 \times 1 + 1 \times 2 + \dots + 99 \times 100 = \frac{99 \times 100 \times 101}{3}$$

$$t_l - t_1 \geq (pN + p - 100) - (pN + 99) = p - 199$$

所以 $p \leq 333300 + 199 < 333500$. 这与题设 $p > 20210802$ 矛盾, 这意味着对任意的正整数 N , $p+1$ 元组 $a_{pN-1}, a_{pN}, a_{pN+1}, \dots, a_{pN+p-1}$ 中存在脚标连续的 100 个数的 $\nu_p(\cdot)$ 值相同. 因此符合题意的 (m, k) 有无穷多对. $\square$

4. 已知素数 p, q 满足 $p = 2q + 1$.

证明: 存在正整数 m 使得 mp 的十进制表示的各位数字之和是 2 或 3.

证. $p = 2, 3$ 不合题意, 若 $p = 5$ 则取 $mp = 20$ 即可. 下面假设 $p \geq 7$.

由费马小定理 $p | 10^{p-1} - 1 = 10^{2q} - 1 = (10^q + 1)(10^q - 1)$ 可知 $p | 10^q + 1$ 或 $p | 10^q - 1$. 前者意味着取 $mp = 10^q + 1$ 满足条件. 若是 $p | 10^q - 1$, 我们断言 $A = \{10^0, 10^1, 10^2, \dots, 10^{q-1}\}$ 中的数模 p 两两不同余, 即有 q 个不同的余数.

这是因为若有 $10^a \equiv 10^b \pmod{p}$, $(0 \leq a < b \leq q-1)$ 则 $10^{b-a} \equiv 1 \pmod{p}$, 由 $b-a$ 与 q 互素以及裴蜀定理知存在正整数 u, v 使得 $u(b-a) - vq = 1$, 这样

$$1 \equiv (10^{b-a})^u = 10^{vq+1} = (10^q)^v \times 10 \pmod{p}.$$

这意味着 $p | 10 - 1 = 9$ 即 $p = 3$, 不合题意. 因此 $A = \{10^0, 10^1, 10^2, \dots, 10^{q-1}\}$ 中的数模 p 两两不同余. 设它们的余数是 $B = \{r_1, r_2, \dots, r_q\} \subseteq \{1, 2, \dots, p-1\}$.

考虑 $\frac{p-5}{2}$ 个抽屉, 它们覆盖了除了 $\{0, 1, \frac{p-1}{2}, p-2, p-1\}$ 之外的所有余数:

$$\{2, p-3\}, \{3, p-4\}, \dots, \{\frac{p-3}{2}, \frac{p+1}{2}\}$$

若某个抽屉里的两个余数都在 B 中出现, 不妨设 $10^a \equiv k, 10^b \equiv p-1-k$, 则 $mp = 10^a + 10^b + 1$ 是 p 的倍数, 满足题意.

若每个抽屉里的余数均在 B 至多出现一个的话, 由于 $|B| = \frac{p-1}{2}$, 所以 $\{0, 1, \frac{p-1}{2}, p-2, p-1\}$ 在 B 中出现至少两个, 已知 $1 \in B, 0 \notin B$, 因此其余三个余数 $\frac{p-1}{2}, p-2, p-1$ 至少有一个在 B 中出现.

若 $\frac{p-1}{2} \in B$, 即有某个 $10^a \equiv \frac{p-1}{2}$, 则 $mp = 2 \times 10^a + 1$ 满足题意.

若 $p-2 \in B$, 即有某个 $10^a \equiv p-2$, 则 $mp = 10^a + 2$ 满足题意.

若 $p-1 \in B$, 有某个 $10^a \equiv p-1$, 则 $mp = 10^a + 1$ 满足题意.

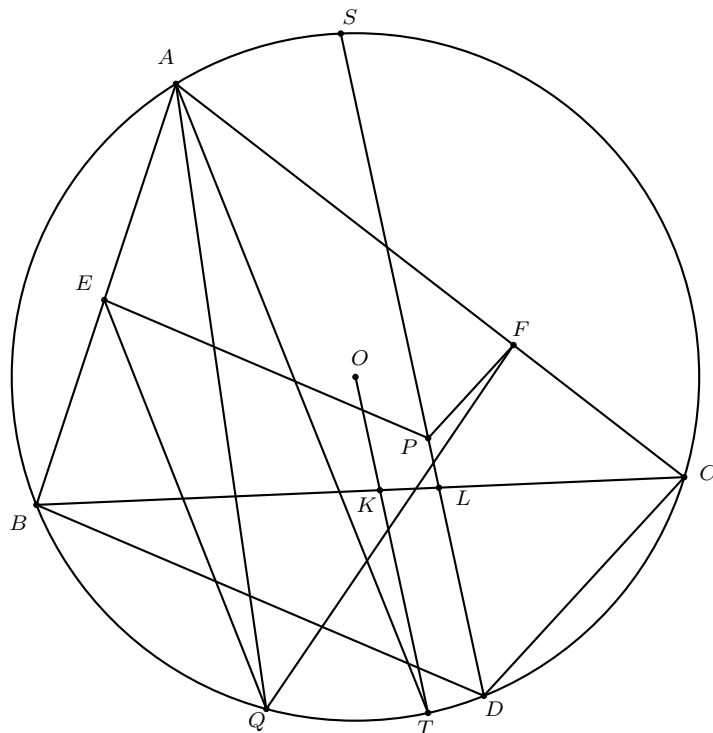
综上所述, 存在 p 的倍数的十进制数字和是 2 或 3. $\square$

注记. 我们有更一般的结论:

若素数 p, q 满足 $p = kq + 1$. 则存在某个 p 的倍数的十进制表示的各位数字之和不超过 $k+1$.

5. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, D 是弧 $\widehat{BC}$ (不含 A) 上一点, S 为弧 $\widehat{BAC}$ 的中点. P 为线段 SD 上一点, 过 P 作 DB 的平行线交 AB 于点 E , 过 P 作 DC 的平行线交 AC 于点 F , 过 O 作 SD 的平行线交弧 $\widehat{BDC}$ 于点 T . 已知 $\odot O$ 上的点 Q 满足 $\angle QAP$ 被 AT 平分.

证明: $QE = QF$.



证. 设 OT, SD 分别与 BC 交于点 K, L .

由 $\angle AEP + \angle AFP = \angle ABD + \angle ACD = \pi$ 知 A, E, P, F 共圆.

由 $\angle ASP = \angle ACD = \angle AFP$ 知 S, A, P, F 共圆, 即 S, A, E, P, F 五点共圆.

注意 $\angle SEF = \angle SAF = \angle SBC$, 同理 $\angle SFE = \pi - \angle SAE = \angle SCB$ 可知 $\triangle SEF$ 与 $\triangle SBC$ 相似. 因此 $\frac{SE}{SF} = \frac{SB}{SC}$, 即 $SE = SF$.

$$\begin{aligned} 2\angle TAC &= \angle TOC = \angle TKC - \angle KCO = \angle DLC - \left(\frac{\pi}{2} - \angle A\right) \\ &= \angle DBC + \angle BDS - \left(\frac{\pi}{2} - \angle A\right) = \angle DSC + \left(\frac{\pi - \angle A}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \angle A\right) \\ &= \angle DSC + \frac{1}{2}\angle A. \end{aligned}$$

由 AT 平分 $\angle QAP$ 可知:

$$\angle QAC = 2\angle TAC - \angle PAC = \angle DSC + \frac{1}{2}\angle A - \angle PSF = \frac{1}{2}\angle A + \angle FSC.$$

因此

$$\angle QSF = \angle QSC - \angle FSC = \angle QAC - \angle FSC = \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle ESF.$$

即 QS 是 $\angle ESF$ 的平分线, 结合 $SE = SF$ 可知 SQ 是 EF 的垂直平分线, 故 $QE = QF$. $\square$

6. 给定素数 $p \geq 5$. 称 $1, 2, \dots, p$ 的排列 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为“好排列”, 如果对 $k = 1, 2, \dots, p$ 均有 $a_k \neq k$, 并且 $a_1 + 2a_2 + \dots + pa_p$ 是 p 的倍数.

求“好排列”的个数除以 $p^2 - p$ 的余数.

解. 把排列看成是 $P = \{1, 2, \dots, p\}$ 到自身的置换(一一映射) $f: P \mapsto P$. “好排列”即没有不动点(即对 $x = 1, 2, \dots, p$ 均有 $f(x) \neq x$), 且 $S(f) = \sum_{x=1}^p xf(x) \equiv 0$ 的好置换 f . (本题所有同余均为 $\text{mod } p$ 意义).

设所有好置换构成集合 M . 我们按照 $f(p)$ 的取值把 M 分成 $p-1$ 个部分

$$M = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{p-1}, \quad B_k = \{f \in M, f(p) = k\}, k = 1, 2, \dots, p-1$$

我们想实现 B_k 之间的对应, 为此考虑对置换 f 进行操作:

$$T_a(f)(x) \equiv a^{-1}f(ax), \quad a = 1, 2, \dots, p-1$$

其中 a^{-1} 表示 a 模 p 的数论倒数.

若 $f \in M$, 即 f 没有不动点并且 $S(f) \equiv 0$, 则 $T_a(f)$ 亦没有不动点, 同时

$$S(T_a(f)) \equiv \sum_{k=1}^p ka^{-1}f(ak) \equiv a^{-2} \sum_{k=1}^p (ak) \times f(ak) \equiv a^{-2}S(f) \equiv 0.$$

所以 $T_a(f) \in M$.

并且若 $f \in B_k$, 则 $T_a(f) \in B_{a^{-1}k}$. 这样以来我们就找到了 $B_k \mapsto B_{a^{-1}k}$ 的单射, 于是 $|B_1| = |B_2| = \dots = |B_{p-1}|$, 因而 $|M|$ 是 $(p-1)$ 的倍数.

另一方面, 我们考虑另一种操作: $R(f)(x) = f(x+1) - 1$.

若 $f \in M$, 即 f 没有不动点并且 $S(f) \equiv 0$, 则 $R(f)$ 亦没有不动点, 同时

$$\begin{aligned} S(R(f)) &= \sum_{k=1}^p k[f(k+1) - 1] = \sum_{k=1}^p [(k+1)f(k+1) - f(k+1) - k] \\ &= S(f) - \sum_{k=1}^p f(k) - \sum_{k=1}^p k \equiv S(f) \equiv 0. \end{aligned}$$

所以 $R(f) \in M$.

由于 R 操作是以 p 为周期的, 即 $R^{(p)}(f) = f$, 所以我们考虑 $f \in M$ 在 R 操作下的最小正周期 $d = d(f)$. 由于 $d|p$, 只能 $d = 1$ 或 $d = p$.

若 f 的周期 $d = 1$ 即 f 满足 $f(x+1) = f(x) + 1$ 对任意 x 成立, 这样的 f

一定是 $f(x) = x + b, b = 1, 2, \dots, p-1$ 的形式, 这些置换都满足

$$S(f) = \sum_{x=1}^p x(x+b) = \sum_{x=1}^p x^2 + b \sum_{x=1}^p x = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + b \times \frac{p(p+1)}{2} \equiv 0,$$

并且没有不动点, 所以 $f(x) = x + b, b = 1, 2, \dots, p-1$ 都在 M 中.

若 f 的周期 $d = p$, 则 $\{f, R(f), R^2(f), \dots, R^{p-1}(f)\}$ 两两不同, 这 p 个置换可以围成一圈, 构成 p 元组.

这样可知: M 中的元素除了 $p-1$ 个 $f(x) = x + b, b = 1, 2, \dots, p-1$ 形式的之外, 其余的 $|M| - (p-1)$ 个元素都可以分成若干个 p 元组. 因此 $|M| - (p-1)$ 是 p 的倍数, 之前已知 $|M|$ 是 $(p-1)$ 的倍数, 于是 $|M|$ 除以 $p^2 - p$ 的余数是 $p-1$. □