数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

2021 年国家集训队第二轮选拔试题解析

王一川　唐立华

(华东师范大学第二附属中学, 201203)

2021 年 4 月 5 日－ 4 月 13 日, 中国国家队第二轮选拔在有千年校史的姑苏名校苏州中学举行, 集训队员和教练们下榻的三元宾馆更是以清乾隆 46 年钱棨连中三元而得名. 这似乎预示着今年的中国国家队的好运, 果然中国队于今年 7 月中旬在俄罗斯圣彼特堡举办的 IMO 竞赛中荣获个人、金牌数和团体总分三项第一. 本次第二轮选拔试题新颖, 难度分布合理, 具有较好的选拔功能, 其中第 5、6 两天均为"易中难" (无交换顺序) 的难度分布, 且难题难度很大, 非常贴合 IMO; 第 7 天整体难度较大, 体现出选拔功能; 第 8 天则相对容易. 其中, 笔者个人认为 5.2 和 8.6 这 2 个题为最佳试题! 以下解答是由第一作者根据考试时的解法整理而成, 不当之处在所难免, 敬请大家不吝赐教.

I. 试 题

5.1 凸 $n(n\geq 5)$ 边形 $\Omega: P_1P_2\cdots P_n$ 的所有对角线无三线共点于 Ω 内部. 证明: 可以在每个四边形 $P_iP_jP_kP_l(1\leq i<j<k<l\leq n)$ 内部选出一个不在任何 Ω 的对角线上的点, 使得所选出的 $\binom{n}{4}$ 个点两两不同, 且任意两点所确定的线段与至少一条 Ω 的对角线相交.

5.2 给定 2021 个互不相同的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2021}$, 归纳定义数列 $\{a_n\}$ 如下: 对每个整数 $n\geq 2022$, a_n 是在 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 中未出现的且不是乘积 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_{n-2021}$ 的约数的最小正整数. 证明: 存在正整数 M, 使得所有不小于 M 的正整数都在数列 $\{a_n\}$ 中出现.

5.3 求最大的正实数 C, 使得对任意整数 $n\geq 2$, 存在实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\in[-1,1]$ 满足

$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)\geq C^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

修订日期: **2021-07-30.**

6.4 对每个正整数 N, 记 N 的正约数个数为 $\tau(N)$, N 的两两不同的素因子个数为 $\omega(N)$, N 的素因子个数(计入重数)为 $\Omega(N)$. 证明: 对任意正整数 n, 有

$$\sum_{m=1}^{n} 5^{\omega(m)} \leq \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \tau(k)^2 \leq \sum_{m=1}^{n} 5^{\Omega(m)}.$$

这里, $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

6.5 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足: 对于任意 $x,\ y\in\mathbb{R}$,

$$f\left(xf(y)+y^{2021}\right)=yf(x)+(f(y))^{2021}.$$

6.6 证明存在正实数 λ 满足: 对任意正整数 m, 如果平面直角坐标系中 $\triangle ABC$ 的三个顶点的横纵坐标均为整数, 并且 $\triangle ABC$ 内部 (不含边界) 有且仅有一个点的横纵坐标均为 m 的整数倍, 则 $\triangle ABC$ 的面积小于 λm^3.

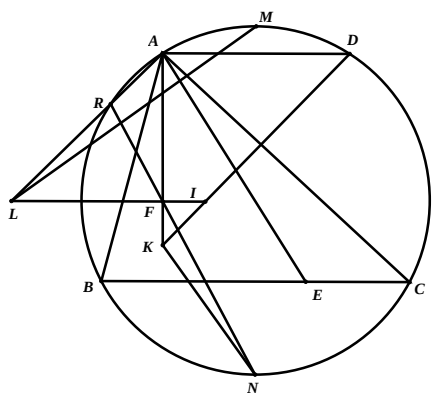
7.1 给定整数 $n\geq 2$. 求最小的正整数 m, 使得存在 n^2 个两两不同的正实数 $x_{i,j}(1\leq i,\ j\leq n)$ 满足以下条件:

(1) 对任意 i,j, $x_{i,j}=\max\{x_{i,1},x_{i,2},\cdots,x_{i,j}\}$ 或 $x_{i,j}=\max\{x_{1,j},x_{2,j},\cdots,x_{i,j}\}$;

(2) 对任意 i, 至多存在 m 个下标 k, 使得 $x_{i,k}=\max\{x_{i,1},\ x_{i,2},\ \cdots,\ x_{i,k}\}$;

(3) 对任意 j, 至多存在 m 个下标 k, 使得 $x_{k,j}=\max\{x_{1,j},\ x_{2,j},\ \cdots,\ x_{k,j}\}$.

7.2 如图所示, 锐角 $\triangle ABC$ $(AB<AC)$ 的内心是 I, 外接圆是 $\odot O$. M 和 N 分别是弧 $\widehat{BAC}$ 和 $\widehat{BC}$ 的中点. D 是 $\widehat{AC}$ 上一点, 满足 $AD\parallel BC$. $\triangle ABC$ 在 $\angle BAC$ 内的旁切圆与边 BC 相切于点 E. 点 F 在 $\triangle ABC$ 内, 满足 $IF\parallel BC$ 且 $\angle BAF=\angle CAE$. 设直线 NF 与 $\odot O$ 的另一个交点是 R, 直线 AF 与 DI 相交于点 K, 直线 AR 与 IF 相交于点 L. 证明: $NK\perp ML$.



7.3 记 $S(k)$ 为正整数 k 在十进制表示下的所有数码之和. 求所有整数 $n\geq 2$ 和有理数 $\beta\in(0,1)$, 使得存在 n 个两两不同的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 满足: 对于 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的任意 $r(r\geq 2)$ 元子集 I, 有 $S\Big(\sum\limits_{i\in I}a_i\Big)=\beta\cdot\sum\limits_{i\in I}S(a_i)$.

8.4 对所有实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{60}\in[-1,1]$, 求

$$\sum_{i=1}^{60} x_i^2(x_{i+1}-x_{i-1})$$

的最大可能值, 这里 $x_0=x_{60},\ x_{61}=x_1$.

8.5 求最小的正实数 α, 使得对面积为 1 的任意凸多边形 P, 存在平面上一点 M 使得 $P\cup Q$ 的凸包的面积不超过 α. 这里 Q 为 P 关于点 M 的中心对称图形.

8.6. 给定整数 $n\geq 2$. 有 $2n^2$ 位选手参加中国象棋比赛, 每两位选手恰对弈一局, 结果可有平局. 已知

(1) 对任意三位选手甲、乙、丙, 若甲胜乙, 且乙胜丙, 则甲胜丙;

(2) 所有比赛中平局的场数不超过 $\frac{n^3}{16}$.

证明: 可从这 $2n^2$ 位选手中选出 n^2 位选手, 并适当记作 $P_{ij}(1\leq i,\ j\leq n)$, 使得对任意 $i,\ j,\ i',\ j'\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, 若 $i>i'$, 则 P_{ij} 胜 $P_{i'j'}$.

Ⅱ. 解答与评注

5.1 凸 $n(n\geq 5)$ 边形 $\Omega: P_1P_2\cdots P_n$ 的所有对角线无三线共点于 Ω 内部. 证明: 可以在每个四边形 $P_iP_jP_kP_l(1\leq i<j<k<l\leq n)$ 内部选出一个不在任何 Ω 的对角线上的点, 使得所选出的 $\binom{n}{4}$ 个点两两不同, 且任意两点所确定的线段与至少一条 Ω 的对角线相交.

证明 设对角线将 Ω 分成若干个区域 $U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_t$, 则只需使选出的 $\binom{n}{4}$ 个点两两在不同区域中.

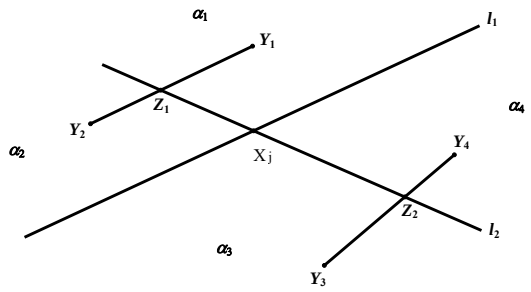
注意到, 每个凸四边形 $P_iP_jP_kP_l(1\leq i<j<k<l\leq n)$ 可对应到对角线 P_iP_k, P_jP_l 的交点, 称这样的交点为"结点", 设所有结点是 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ $\left(m=\binom{n}{4}\right)$. 我们希望 $P_iP_jP_kP_l$ 内选出的点所在区域与结点 $P_iP_k\cap P_jP_l$ 相邻(称结点 K 与区域 α 相邻当且仅当 K 是 α 的一个顶点).

现在考虑下述操作: 对任意非空子集 $\Gamma\subseteq\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m\}$, 设 Γ 的凸包是 S, S 是点或线段或凸多边形, 取 S 的一个顶点 X_j (X_j 不在 S 某条边界内部).

断言 存在一个与 X_j 相邻的区域 α, α 不与 Γ 中其他结点相邻. ①

证明 设过 X_j 的对角线为 $l_1,\ l_2$, 与 X_j 相邻的区域是 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$, 如下图.

用反证法, 假设存在结点 $Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4\in\Gamma\setminus\{X_j\}$, $Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4$ 分别与 α_1, $\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ 相邻($Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4$ 可能相同). 显然线段 Y_1Y_2 与 l_2 有公共点(记为 Z_1), 线段 Y_3Y_4 与 l_2 有公共点(记为 Z_2), 且 $Z_1,\ Z_2$ 在 X_j 两侧.



故可依次推出 Z_1, Z_2, X_j 在 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 的凸包内, 其中"X_j 在 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 的凸包内"与"X_j 是 Γ 凸包的一个顶点"矛盾!

故①得证.

现在考虑从 X_1, X_2, $\cdots$, X_m 中, 每次去掉凸包上一个点.

不妨设对 $1 \le i \le m$, X_i 是 X_i, X_{i+1}, $\cdots$, X_m 的凸包的一个顶点(否则重排), 由①知: 对 $1 \le i \le m$, 可取出一个与 X_i 相邻的区域 V_i, V_i 与 X_{i+1}, $\cdots$, X_m 均不相邻. 显然 V_1, V_2, $\cdots$, V_m 两两不同. 对 $1 \le i \le m$, 令 X_i 对应的凸四边形中取出的点在区域 V_i 中即可.

原题得证. □

评注 本题是简单的组合几何问题, 有多种解法, 本解答利用了对角线交点 $P_iP_k \cap P_jP_l$, 用 Hall 定理也可以做出本题.

5.2 给定 2021 个互不相同的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2021}$, 归纳定义数列 $\{a_n\}$ 如下: 对每个整数 $n \ge 2022$, a_n 是在 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 中未出现的且不是乘积 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_{n-2021}$ 的约数的最小正整数. 证明: 存在正整数 M, 使得所有不小于 M 的正整数都在数列 $\{a_n\}$ 中出现.

证明 (I) 首先用代数方法估计 $\{a_n\}$ 的增长速度.

熟知存在常数 $C > 0$, 使得任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, n 的正约数个数 $\tau(n) < C \cdot n^{0.0001}$.

注意到: 对 $n \ge 2022$, a_n 不能取的值为 a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} 及 $a_{n-1}\cdots a_{n-2021}$ 的正约数, 共 $n-1+\tau(a_{n-1}\cdots a_{n-2021})$ 个数, 故

$$\begin{aligned} a_n &\le n + \tau(a_{n-1}\cdots a_{n-2021}) \\ &\le n + C\cdot(a_{n-1}\cdots a_{n-2021})^{0.0001} \\ &\le n + C\cdot\max\{a_{n-1},\ \cdots,\ a_{n-2021}\}^{\frac{2021}{10000}}. \end{aligned} \qquad ①$$

注意到 $n \ge \max\{a_1,\ \cdots,\ a_{2021}\}+1$ 时,

$$\max\{a_1,\ \cdots,\ a_n\} \ge n > \max\{a_1,\ \cdots,\ a_{2021}\}.$$

故可设 $\max\{a_1, \cdots, a_n\} = a_m$, $2022 \le m \le n$, 由①知

$$\begin{aligned}\max\{a_1, \cdots, a_n\} &= a_m \\ &\le m + C \cdot \max\{a_{m-1}, \cdots, a_{m-2021}\}^{\frac{2021}{10000}} \\ &\le n + C \cdot \max\{a_1, \cdots, a_n\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

解得

$$\max\{a_1, \cdots, a_n\} \le \left(\frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} + n}\right)^2 \quad (\forall n \ge \max\{a_1, \cdots, a_{2021}\} + 1).$$

特别地 $a_n \le \left(\frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} + n}\right)^2$, 这表明:

存在常数 $k > 0$, 使 $a_n \le n + k \cdot \sqrt{n} (\forall n \in \mathbb{Z}^+)$. ②

(II) 接下来解决原问题, 任取一个不在 $\{a_n\}$ 中的正整数 x, 由于 $\{a_n\}$ 中只有有限项 $\le x$, 故 n 充分大时 $a_n > x$, 此时 a_n 不取 x 的理由一定是: x 整除 $a_{n-1} \cdots a_{n-2021}$. 故

$$x \mid a_{n-1} \cdots a_{n-2021}. \quad (\text{对任意充分大的 } n) \qquad ③$$

断言 1 x 无大于 10^4 的素因子.

证明 用反证法. 若存在素数 $p \mid x$, $p > 10^4$, 则由③知: 对充分大的 n, $p \mid a_{n-1} \cdots a_{n-2021}$, 即 $a_{n-1}, \cdots, a_{n-2021}$ 中有 p 的倍数. 于是存在常数 L, 使得对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, $a_1, \cdots, a_n$ 中 p 的倍数的个数 $\ge \frac{n}{2021} - L$. 进而

$$\max\{a_1, \cdots, a_n\} \ge \max_{\substack{1 \le i \le n \\ p \mid a_i}} \{a_i\} \ge p \cdot \left(\frac{n}{2021} - L\right).$$

结合②知

$$n + k \cdot \sqrt{n} \ge p \cdot \left(\frac{n}{2021} - L\right),$$

令 n 充分大即得矛盾(因为 $1 < \frac{P}{2021}$).

断言 2 对任意素数幂 $p^\alpha \mid x$, 有 $\alpha \le 10^8$.

证明 用反证法. 假设 $a > 10^8$, 由③知: 对充分大的 n, $p^{10^8} \mid a_{n-1} \cdots a_{n-2021}$, 进而 $a_{n-1}, \cdots, a_{n-2021}$ 中存在 p^{10^4} 的倍数, 于是存在常数 L', 使得对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, $a_1, \cdots, a_n$ 中 p^{10^4} 的倍数个数 $\ge \frac{n}{2021} - L'$, 进而

$$\max\{a_1, \cdots, a_n\} \ge \max_{\substack{1 \le i \le n \\ p^{10^4} \mid a_i}} \{a_i\} \ge p^{10^4} \cdot \left(\frac{n}{2021} - L'\right).$$

结合②知

$$n + k\sqrt{n} \ge p^{10^4} \cdot \left(\frac{n}{2021} - L'\right),$$

令 n 充分大即得矛盾 (因为 $\frac{p^{10^4}}{2021} \ge \frac{2^{10^4}}{2021} > 1$).

结合断言 1, 2 知: $x \mid \prod\limits_{\text{素数}p\le 10^4} p^{10^8}$, 进而

$$x \le \prod_{\text{素数}p\le 10^4} p^{10^8} \le (10^4!)^{10^8},$$

取 $M=(10^4!)^{10^8}+1$, 即符合原题要求. □

评注 本题是中等难度的数论问题, 本题形式和 2018 加试 4 比较像, 可以先考虑类似加试题地考虑每一项的素因子分解, 但发现做不出, 必须寻找新的方法, 经过尝试发现可以用正约数个数估计来估计 $\{a_n\}$ 增长速度 (事实上, 题目中写"不是 $a_{n-1}\cdots a_{n-2021}$ 的正约数"而不是"不整除 $a_{n-1}\cdots a_{n-2021}$"也提示了这一点) 进而做出本题, 本题形式传统而解法新颖, 个人认为是本届集训队出得最好的题.

5.3 求最大的正实数 C, 使得对任意整数 $n\ge 2$, 存在实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\in[-1,1]$ 满足

$$\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)\ge C^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

解 不妨设 $1\ge x_1\ge\cdots\ge x_n\ge -1$ (否则重排), 于是可设 $x_i=\cos\theta_i$ $(1\le i\le n)$, $0\le\theta_1\le\cdots\le\theta_n\le\pi$. 考虑复数 $p_j=e^{i\theta_j},\ q_j=e^{-i\theta_j}(1\le j\le n)$, $p_1,\ \cdots,\ p_n,\ q_n,\cdots,\ q_1$ 是单位圆上依次排列的 $2n$ 个复数, 设它们对应点 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{2n}$, 则对 $1\le j<k\le n$,

$$\begin{aligned}
x_j-x_k&=\cos\theta_j-\cos\theta_k\\
&=2\cdot\sin\frac{\theta_k-\theta_j}{2}\cdot\sin\frac{\theta_k+\theta_j}{2}\\
&=\frac{1}{2}|p_j-p_k|\cdot|q_j-p_k|\quad(\text{正弦定理})\\
&=\frac{1}{2}\cdot|A_jA_k|\cdot|A_{2n+1-j}A_k|\\
&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{|A_jA_k|\cdot|A_{2n+1-j}A_k|\cdot|A_jA_{2n+1-k}|\cdot|A_{2n+1-j}A_{2n+1-k}|},
\end{aligned}$$

进而

$$\prod_{1\le j<k\le n}(x_j-x_k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{C}_n^2}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{1\le j<k\le 2n\\ j+k\ne 2n+1}}|A_jA_k|}. \qquad ①$$

将所有弦 $A_jA_k(1\le j<k\le 2n,$ 含$j+k=2n+1$ 者) 按下标差分 n 组:

$$\Omega_1: A_1A_2,\ A_2A_3,\ \cdots,\ A_{2n}A_1,$$

$$\Omega_2: A_1A_3,\ A_2A_4,\ \cdots,\ A_{2n}A_2,$$

$$\vdots$$

$$\Omega_{n-1}: A_1A_n,\ A_2A_{n+1},\ \cdots,\ A_{2n}A_{n-1},$$

$$\Omega_n: A_1A_{n+1},\ A_2A_{n+2},\ \cdots,\ A_nA_{2n}.$$

对 $1 \le t \le n-1$, Ω_t 中所有弦圆周角之和 $\le t \cdot \pi$.

Ω_t 中有 $\lambda_t \in \{2n-2,\ 2n\}$ 条弦 A_jA_k 满足 $j+k \ne 2n+1$. 其中,

$$t\pi \le (n-1)\pi \le \lambda_t \cdot \frac{\pi}{2}.$$

记 Ω_t 中满足 $j+k \ne 2n+1$ 的弦的长度乘积为 p_t, 由琴生不等式,

$$p_t \le (2 \cdot \sin\frac{t\pi}{\lambda_t})^{\lambda_t} \le 2^{2n} \cdot \left(\sin\frac{t\pi}{\lambda_t}\right)^{2n-2} \le 2^{2n} \cdot (\sin\frac{t\pi}{2n-2})^{2n-2}. \qquad ②$$

又注意到, 显然 Ω_n 中满足 $j+k \ne 2n+1$ 的弦长乘积 $\le 2^n$, 故

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{1\le j<k\le 2n\\ j+k\ne 2n+1}} |A_jA_k| &\le 2^n \cdot \prod_{t=1}^{n-1} 2^{2n} \cdot \left(\sin\frac{t\pi}{\lambda_t}\right)^{2n-2}\\ &= 2^{3n-2} \cdot \left(\prod_{t=1}^{n-1} 2 \cdot \sin\frac{t\pi}{2n-2}\right)^{2n-2}\\ &= 2^{3n-2} \cdot (2 \cdot \sqrt{n-1})^{2n-2}.\end{aligned}$$

代入①知:

$$\prod_{1\le j<k\le n} (x_j - x_k) \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{C}_n^2} \cdot 2^{\frac{3n-2}{2}} \cdot (2 \cdot \sqrt{n-1})^{n-1},$$

由此即知原题中的 C 必满足 $C \le \dfrac{1}{2}$.

另一方面, 对任意 $n \ge 2$, 令 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 是凸 $2n$ 边形, 相应地

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = \left(\cos\frac{\pi}{2n},\ \cos\frac{3\pi}{2n},\ \cdots,\ \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right).$$

此时

$$\prod_{\substack{1\le j<k\le 2n\\ j+k\ne 2n+1}} |A_jA_k| \ge \prod_{\substack{1\le j<k\le 2n\\ k-j\ne n}} |A_jA_k| = \prod_{t=1}^{n-1} \left(2 \cdot \sin\frac{t\pi}{2n}\right)^{2n} = (\sqrt{n})^{2n} > 1.$$

代入①知

$$\prod_{1\le j<k\le n} (x_j - x_k) \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{C}_n^2}.$$

故原题所求 C 最大值为 $\frac{1}{2}$. □

评注 本题是困难的不等式问题, 首先猜测构造, 注意到 $\{x_i\}$ 的分布是"两端密, 中间疏", 由此猜测可能是一列 cos (即半圆在直径上的投影), 进而可作三角换元, 将本题归结于熟悉的问题, 估计单位圆上弦长的乘积.

6.4 对每个正整数 N, 记 N 的正约数个数为 $\tau(N)$, N 的两两不同的素因子个数为 $\omega(N)$, N 的素因子个数(计入重数)为 $\Omega(N)$. 证明: 对任意正整数 n, 有

$$\sum_{m=1}^{n} 5^{\omega(m)} \le \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \tau(k)^2 \le \sum_{m=1}^{n} 5^{\Omega(m)}.$$

这里, $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

证明 注意到 $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ 表示 $1, 2, \cdots, n$ 中 k 的倍数的个数, 故

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \cdot \tau(k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \Big(\tau(k)^2 \cdot \sum_{\substack{1 \le m \le n \\ k \mid m}} 1 \Big) = \sum_{m=1}^{n} \Big(\sum_{k \mid m} \tau(k)^2 \Big),$$

从而只需证明: 对任意 $m \ge 1$, 有

$$5^{\omega(m)} \le \sum_{k \mid m} \tau(k)^2 \le 5^{\Omega(m)}. \qquad ①$$

$m = 1$ 时①显然, 下设 $m \ge 2$ (不是归纳).

设 m 的素因子分解为 $p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$, 则 m 的所有正约数为 $p_1^{\beta_1} \cdots p_t^{\beta_t}$, 其中 $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$, $\cdots$, $0 \le \beta_t \le \alpha_t$, 且

$$\tau\left(p_1^{\beta_1} \cdots p_t^{\beta_t}\right)^2 = (\beta_1 + 1)^2 \cdots (\beta_t + 1)^2,$$

故

$$\sum_{k \mid m} \tau(k)^2 = \sum_{\substack{0 \le \beta_1 \le \alpha_1 \\ \cdots \\ 0 \le \beta_t \le \alpha_t}} (\beta_1 + 1)^2 \cdots (\beta_t + 1)^2 = \prod_{i=1}^{t} \left(1^2 + 2^2 + \cdots + (\alpha_i + 1)^2\right),$$

于是

$$① \Leftrightarrow 5^t \le \prod_{i=1}^{t} \left(1^2 + 2^2 + \cdots + (\alpha_i + 1)^2\right) \le 5^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_t}.$$

只需证: 对任意 $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$5 \le 1^2 + 2^2 + \cdots + (\alpha + 1)^2 \le 5^{\alpha}. \qquad ②$$

记

$$S(\alpha) = 1^2 + 2^2 + \cdots + (\alpha + 1)^2 = \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(2\alpha + 3)}{6},$$

则 $S(1) = 5$, 且 $\alpha \ge 1$ 时

$$\frac{S(\alpha + 1)}{S(\alpha)} = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} \cdot \frac{\alpha + 3}{\alpha + 2} \cdot \frac{2\alpha + 5}{2\alpha + 3} \in \left[1,\ \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3}\right] = [1,\ 5],$$

归纳易知 $S(\alpha) \in [5,\ 5^{\alpha}]$ 对任意 $\alpha \ge 1$ 成立, ②得证.

进而原题得证. □

评注 本题是简单的数论不等式, 类似的问题还有 2014 集训队第三天第 1 题 (2014 年那个题更难).

6.5 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足: 对于任意 $x,\ y\in\mathbb{R}$,

$$f\left(xf(y)+y^{2021}\right)=yf(x)+(f(y))^{2021}.$$

解 记原题条件为 $P(x,\ y)$.

显然, 若 f 常值, 则只能 $f\equiv 0$. 下设 f 非常值.

断言 1 对 $d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 有 $f(d)\neq 0$.

证明 用反证法, 若 $f(d)=0$, 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 由 $P(x,\ d)$ 知

$$f\left(d^{2021}\right)=df(x)+f(d)^{2021}.$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{d}\cdot\left(f\left(d^{2021}\right)-f(d)^{2021}\right),$$

推出 f 常值函数, 矛盾.

断言 2 $f(1)=1$.

证明 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 由 $P(x,\ 1)$ 知

$$f(xf(1)+1)=f(x)+f(1)^{2021}.$$

由断言 1 知 $f(1)\neq 0$, 进而对任意 $x\in\mathbb{R}$,

$$f(xf(1)+1)\neq f(x),$$

只能 $f(1)=1$.

断言 3 $f(x+1)=f(x)+1,\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

证明 由 $P(x,\ 1)$ 知

$$f(xf(1)+1)=f(x)+f(1)^{2021},$$

结合 $f(1)=1$ 即知 $f(x+1)=f(x)+1$.

由断言 2, 3 知 $f(n)=n,\quad \forall n\in\mathbb{Z}$.

断言 4 $f(x+f(y))=f(x)+y,\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}$.

证明 $y=0$ 时, 由 $f(0)=0$ 知断言 4 成立. 下设 $y\neq 0$.

固定 y, 任取 $z\in\mathbb{R}$, 由 $P(z,\ y),\ P(z+1,\ y)$ 知:

$$f\left(zf(y)+y^{2021}\right)=yf(z)+f(y)^{2021},$$

$$f\left(zf(y)+f(y)+y^{2021}\right)=yf(z+1)+f(y)^{2021},$$

两式相减得

$$f\left(zf(y)+f(y)+y^{2021}\right)-f\left(zf(y)+y^{2021}\right)=y(f(z+1)-f(z))=y.$$

由断言 1 知 $f(y)\neq 0$, 故 $zf(y)+y^{2021}$ 取遍 $\mathbb{R}$, 从而

$$f(x+f(y))-f(x)=y,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

断言 5 $f(f(y))=y,\quad \forall y\in\mathbb{R}.$

证明 在断言 4 中取 $x=0$ 即可.

断言 6 $f(x+y)=f(x)+f(y),\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$

证明 在断言 4 中用 $f(y)$ 替换 y 即可.

断言 7 $f(xy)=f(x)f(y),\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$

证明 由断言 5 知: 原题条件可写为

$$f\left(xf(y)\right)+f\left(y^{2021}\right)=yf(x)+f(y)^{2021},\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

在上式中令 $x=0$, 可知

$$f\left(y^{2021}\right)=f(y)^{2021},\quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

进而

$$f(xf(y))=yf(x),\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

在上式中用 $f(y)$ 替换 y 得

$$f(xy)=f(x)f(y),\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

结合断言 6, 7 易知 f 在 $[0,\ +\infty)$ 上不减, 这是由于对任意 $u\geq v\geq 0$, 存在 $\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbb{R},\ u=\alpha_1^2+\alpha_2^2,\ v=2\alpha_1\alpha_2$, 从而

$$f(u)-f(v)=f(\alpha_1^2+\alpha_2^2)-f(2\alpha_1\alpha_2)=f(\alpha_1)^2+f(\alpha_2)^2-2f(\alpha_1)f(\alpha_2)\geq 0.$$

于是 f 在 $[0,\ +\infty)$ 上满足柯西方程, 结合 $f(1)=1$ 知

$$f(x)=x,\quad \forall x\in[0,\ +\infty),$$

再由断言 6 知

$$f(-x)=f(0)-f(x)=-x,\quad x\geq 0,$$

故

$$f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

显然 $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ 满足要求.

故所求函数为

$$1^\circ\quad f(x)=x,\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

$$2^\circ\quad f(x)=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

解答完毕! □

评注 本题是中等难度的函数方程, 关键的一步是取出 $P(x+1,\ y)$, $P(x,\ y)$ 差分.

6.6 证明存在正实数 λ 满足: 对任意正整数 m, 如果平面直角坐标系中 $\triangle ABC$ 的三个顶点的横纵坐标均为整数, 并且 $\triangle ABC$ 内部 (不含边界) 有且仅有一个点的横纵坐标均为 m 的整数倍, 则 $\triangle ABC$ 的面积小于 λm^3.

证明 称横纵坐标均为 m 倍的点为"m 倍点".

首先考虑仿射变换

$$(x,\ y) \to (ax+by,\ cx+dy),$$

其中$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}$, $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 1$. 该变换的好处是: 我们可不妨设某条直线是水平线.

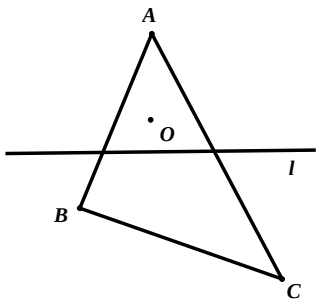
回到原题. 由 Pick's 定理, 只需证 $\triangle ABC$ 内(含边界)整点数 $\leq \Theta(m^3)$. 将所有整点按横, 纵坐标 $\bmod m$ 分成 m^2 类, 只需证 $\triangle ABC$ 内每一类整点数 $\leq \Theta(m)$.

具体地, 任取 $x_0,\ y_0 \in \mathbb{Z}$, 称满足 $x \equiv x_0,\ y \equiv y_0 \pmod m$ 的 $(x,\ y)$ 是"好点". 我们证明 $\triangle ABC$ 内"好点"个数 $\leq \Theta(m)$. ①

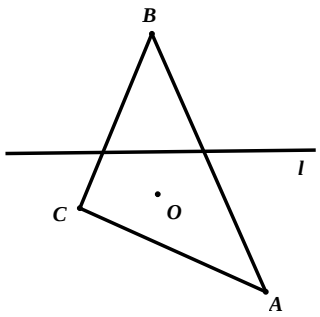
断言 对每条直线 l, l 上至多 $2m+100$ 个好点在 $\triangle ABC$ 内. ②

证明 用反证法. 假设 $l \cap \triangle ABC$ 含 $\geq 2m+101$ 个好点(作仿射, 平移, 不妨设 l 水平).

设 $\triangle ABC$ 内唯一"m 倍点"是 O, 考虑 O, l 的位置关系, 有 2 种:



情形 1 (可能 O 在 l 上)



情形 2

【情形 1】

过 O 作 $l_0 \parallel l$, 设 $P = AO \cap l$.

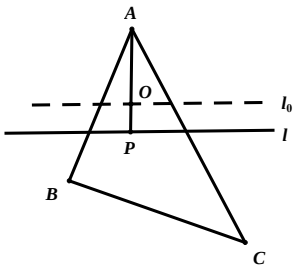
若 $|OP| > m \cdot |AO|$, 则将 AO 延长 m 倍可得 $\triangle ABC$ 内另一点"m 倍点", 矛

盾.

若 $|OP| \le m \cdot |AO|$, 则线段长度:

$$l_0 \cap \triangle ABC\text{长度} \ge \frac{1}{m+1} \cdot (l \cap \triangle ABC\text{长度}) > \frac{2m+10}{m+1} \cdot m > 2m,$$

于是 $l_0 \cap \triangle ABC$ 上有另一"m 倍点", 矛盾.



【情形 2】

过 O 作 $l_0 \parallel l$, 过 C 作 $l_c \parallel l$, 设 $P = AO \cap l_c$.

若 $|AP| > (m+1) \cdot |AO|$, 则将 AO 延长 m 倍可得另一点"m 倍点", 矛盾.

若 $(m+1) \cdot |AO| \ge |AP| \ge |AO|$, 则

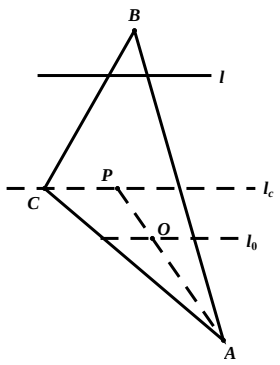
$$\begin{aligned} l_0 \cap \triangle ABC\text{长度} &\ge \frac{1}{m+1} \cdot (l_c \cap \triangle ABC\text{长度}) \\ &\ge \frac{1}{m+1} \cdot (l \cap \triangle ABC\text{长度}) \\ &> \frac{2m+10}{m+1} \cdot m \\ &> 2m, \end{aligned}$$

于是 $l_0 \cap \triangle ABC$ 上有另一"m 倍点", 矛盾.

若 $|AO| \ge |AP| \ge 0$, 则

$$l_0 \cap \triangle ABC\text{长度} \ge l \cap \triangle ABC\text{长度} > 2m,$$

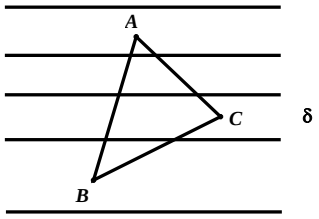
也矛盾.



故断言得证.

现在证明①: 若 $\triangle ABC$ 内好点数 $\leq 10^8$, 则①成立.

下设 $\triangle ABC$ 内好点数 $> 10^8$, 则由抽屉, $\triangle ABC$ 内存在两好点 R, S 横, 纵坐标 mod $100m$ 得到的二元组相同, 于是线段 RS 上有 101 个好点, 记 δ 为直线 RS, 不妨设 δ 即为直线 $y = y_0$ (作仿射, 平移).



易知 $\triangle ABC \cap$ (直线$y = y_0 + m$) 至多含 2 个"好点".否则, 可设 $y = y_0$ 上含好点 $(z,\ y_0)$, $(z + 2m,\ y_0)$, $y = y_0 + m$ 上有好点 $(w,\ y_0 + m)$, $(w + 2m,\ y_0 + m)$, 作仿射平移, 不妨设 $z = w$, 则上述四点围成的长方形内有 2 个 m 倍点, 矛盾.

同理 $\triangle ABC \cap$ (直线$y = y_0 - m$) 上也至多 2 个"好点".

进而对整数 $i \geq 2$, $\triangle ABC \cap$ (直线 $y = y_0 + im$) $= \varnothing$. 否则

$$\triangle ABC \cap (y = y_0 + m) \text{ 长度 } \geq \frac{1}{2} \cdot (\triangle ABC \cap (y = y_0) \text{ 长度 }) \geq 50m,$$

推出 $\triangle ABC \cap (y = y_0 + m)$ 上有 ≥ 10 个"好点".

同理对于 $i \leq -2$, 故

$$\triangle ABC \text{ 内好点数 } \leq 2 + (2m + 100)(\text{由断言}) + 2 \leq \Theta(m),$$

①也成立.

故①得证. 进而原题得证. □

评注 本题是困难的组合几何问题, 有多种解法, 在各种解法中基本都要用到"将 AO 延长 m 倍", 同时还要观察到其他方面的很多性质, 才能做出本题.

7.1 给定整数 $n \geq 2$. 求最小的正整数 m, 使得存在 n^2 个两两不同的正实数 $x_{i,j}(1 \leq i,\ j \leq n)$ 满足以下条件:

(1) 对任意 i, j, $x_{i,j} = \max\{x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots, x_{i,j}\}$ 或 $x_{i,j} = \max\{x_{1,j}, x_{2,j}, \cdots, x_{i,j}\}$;

(2) 对任意 i, 至多存在 m 个下标 k, 使得 $x_{i,k} = \max\{x_{i,1},\ x_{i,2},\ \cdots,\ x_{i,k}\}$;

(3) 对任意 j, 至多存在 m 个下标 k, 使得 $x_{k,j} = \max\{x_{1,j},\ x_{2,j},\ \cdots,\ x_{k,j}\}$.

解 结论是: m 最小为 $\begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, & (2 \mid n) \\ \dfrac{n+3}{2}, & (2 \nmid n) \end{cases}$.

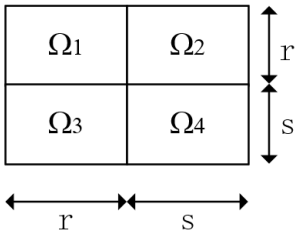
将 $x_{i,j}$ 排成 $n\times n$ 表格:

$$\begin{array}{cccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{array}$$

称满足 $x_{i,j}=\max\{x_{i,1},\cdots,x_{i,j}\}$ 的 $x_{i,j}$ 是"行好的", 满足 $x_{i,j}=\max\{x_{1,j},\cdots,x_{i,j}\}$ 的 $x_{i,j}$ 是"列好的".

(I) 先给出构造:

将 $n\times n$ 表格分成 4 部分 $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \Omega_4,\ (r=\left[\frac{n}{2}\right],\ s=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil)$.



令 $\Omega_i(1\le i\le 4)$ 中的数均在 $(i,\ i+1)$ 中, 且 $\Omega_1,\ \Omega_4$ 中的数从左下到右上递增, $\Omega_2,\ \Omega_3$ 中的数从右上到左下递增.

例如: 若 $r=2,\ s=3$, 则 Ω_2 中可以填:

2.4	2.2	2.1
2.6	2.5	2.3

此时, 对 $1\le i\le r$, 第 i 行中 $x_{i,1},\cdots,x_{i,r+1}$ 是行好的, 对 $r+1\le i\le n$, 第 i 行中 $x_{i,1},\ x_{i,r+1},\ x_{i,r+2},\cdots,x_{i,n}$ 是行好的. 类似对于列.

故每一行(列)中行(列)好的数的个数$\le\max\{s+1,\ r+1\}=\begin{cases}\dfrac{n+2}{2}, & 2\mid n\\ \dfrac{n+3}{2}, & 2\nmid n\end{cases}$.

(II) 再证明 $m\ge\left[\frac{n+3}{2}\right]$.

显然, 第一行(列)中的数列均是列(行)好的.

对 $2\le i\le n$, 设第 i 行有 λ_i 个数是行好的, 第 i 列有 μ_i 个数是列好的.

由于对 $2\le i,\ j\le n,\ x_{i,j}$ 或者行好, 或者列好, 故

$$\sum_{i=2}^{n}(\lambda_i-1)+\sum_{i=2}^{n}(\mu_i-1)\ge(n-1)^2. \qquad ①$$

进而

$$m\ge\max\{\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\ \mu_2,\cdots,\mu_n\}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i\right) \\
&\geq \frac{1}{2(n-1)} \cdot \left(2(n-1) + (n-1)^2\right) \\
&= \frac{n+1}{2}. \qquad ②
\end{aligned}
$$

现在用反证法, 假设“$m < \frac{n+2}{2}$, $2 \mid n$”或“$m < \frac{n+3}{2}$, $2 \nmid n$”, 由②知只能 $m = \frac{n+1}{2}$, $2 \nmid n$, 且①, ②中各 $\geq$ 号均取等. 这表明:

$$\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \frac{n+1}{2}, \quad (\text{由②})$$

且每个 $x_{i,j}(2 \leq i,\ j \leq n)$ 不能同时行好, 列好(由②). 考虑 $x_{i,j}((i,\ j) \neq (1,\ 1))$ 中最大项 $x_{i_0,\ j_0}$.

若 $i_0,\ j_0 \geq 2$, 则 $x_{i_0,\ j_0}$ 同时行好, 列好, 矛盾.

若 $1 \in \{i_0,\ j_0\}$, 不妨设 $i_0 = 1,\ j_0 \geq 2$, 则第 j_0 列中只有 x_{1,j_0} 是列好的, 而

$$\mu_{j_0} = \frac{n+1}{2} \geq \frac{3+1}{2} = 2,$$

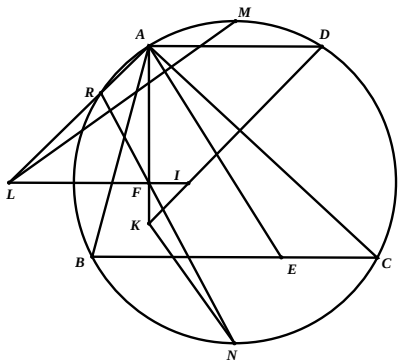
矛盾.

故反证法不成立.

综上, 所求 m 最小值为 $\begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, & (2 \mid n) \\ \dfrac{n+3}{2}, & (2 \nmid n) \end{cases}$. □

评注 本题是中等难度的组合题, 本题的解答看似简单, 实际上有很多地方可能会卡住(例如猜测答案、构造).

7.2 如图所示, 锐角 $\triangle ABC$ $(AB < AC)$ 的内心是 I, 外接圆是 $\odot O$. M 和 N 分别是弧 $\widehat{BAC}$ 和 $\widehat{BC}$ 的中点. D 是 $\widehat{AC}$ 上一点, 满足 $AD \parallel BC$. $\triangle ABC$ 在 $\angle BAC$ 内的旁切圆与边 BC 相切于点 E. 点 F 在 $\triangle ABC$ 内, 满足 $IF \parallel BC$ 且 $\angle BAF = \angle CAE$. 设直线 NF 与 $\odot O$ 的另一个交点是 R, 直线 AF 与 DI 相交于点 K, 直线 AR 与 IF 相交于点 L. 证明: $NK \perp ML$.



证明 取 BC 中点 Z. 熟知 $IZ \parallel AE$ 且 $\triangle NIZ \sim \triangle NMI$, 且

$$\angle BAF = \angle CAE \Rightarrow \angle FAI = \angle EAI,$$

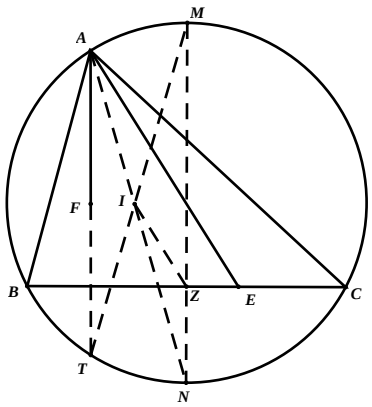
故

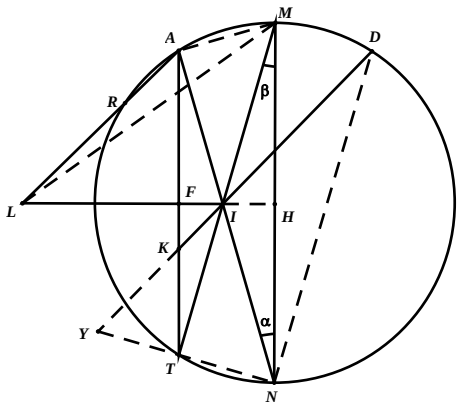
$$\angle FAI = \angle EAI = \angle ZIN = \angle IMN.$$

这表明: AF, MI 的交点在 $\odot O$ 上, 记为 T.

设 $NT \cap DI = Y$, 设 $\angle INM = \alpha$, $\angle IMN = \beta$, 设 $FI \cap MN = H$. 注意到 TM, TN 是 $\angle ATD$ 内、外角平分线, 故 TA, TM, TD, TN 调和线束. 从而 Y, K, I, D 调和点列, 进而 NY, NK, NI, ND 调和线束, 因此

$$\frac{\sin\angle INK}{\sin\angle TNK} = \frac{\sin\angle IND}{\sin\angle TND} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}. \qquad ①$$





另一方面, 在 $\triangle MAI$ 中, 由角元塞瓦,

$$\begin{aligned}\frac{\sin\angle AML}{\sin\angle IML} &= \frac{\sin\angle MAL}{\sin\angle IAL}\cdot\frac{\sin\angle AIL}{\sin\angle MIL}\\ &= -\tan\angle MAL\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\\ &= \tan\angle MNF\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}. \qquad ②\end{aligned}$$

由 $\angle IHN = \angle ITN = 90^\circ$ 知 I, T, N, H 共圆, 进而 $\angle ITH = \alpha$, 在 $\triangle FNT$ 中, 由角元塞瓦,

$$\begin{aligned}\tan\angle MNF &= \frac{\sin\angle FNH}{\sin\angle HFN}\\ &= \frac{\sin\angle HNT}{\sin\angle HTN}\cdot\frac{\sin\angle HTF}{\sin\angle HFT}\\ &= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}. \qquad ③\end{aligned}$$

将③带入②得

$$\frac{\sin\angle AML}{\sin\angle IML} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha-\beta)},$$

结合①知:

$$\frac{\sin\angle INK}{\sin\angle TNK}=\frac{\sin\angle AML}{\sin\angle IML}. \qquad ④$$

又注意到: $AM\perp IN$, $IM\perp TN$, 故

$$\angle INK=\angle AML,\ \angle TNK=\angle IML,$$

进而 $ML\perp NK$, 原题得证! □

评注 本题是简单几何题, 注意到 $AM\perp IN$, $IM\perp TN$, 从而为证明 $ML\perp NK$, 只需证: $\frac{\sin\angle AML}{\sin\angle IML}=\frac{\sin\angle INK}{\sin\angle TNK}$, 导角元塞瓦就可以了.

7.3 记 $S(k)$ 为正整数 k 在十进制表示下的所有数码之和. 求所有整数 $n\geq 2$ 和有理数 $\beta\in(0,1)$, 使得存在 n 个两两不同的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 满足: 对于 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的任意 $r(r\geq 2)$ 元子集 I, 有 $S\Big(\sum\limits_{i\in I}a_i\Big)=\beta\cdot\sum\limits_{i\in I}S(a_i)$.

解 结论是: 所求 $(n,\ \beta)$ 为使 $2\leq n\leq 10$, $\beta\in(0,\ 1)\cap\mathbb{Q}$ 的 $(n,\ \beta)$.

(I) 先给出 $2\leq n\leq 10$ 的构造: 将 $a_1,\ \cdots,\ a_n$ 按数码分若干段, 每一段为(空白表示 0):

(I 类段)

$$\begin{array}{ll}
a_1: 099\cdots991 & (s\text{个}9)\\
a_2: \qquad\quad 1 & \\
\qquad\vdots & \\
a_n: \qquad\quad 1 &
\end{array}$$

(II类段)

$$\begin{array}{ll}
a_1: 1 & \\
a_2: \ 1 & \\
\qquad\ddots & \\
a_n: \qquad\quad 1 &
\end{array}$$

取 n 个 I 类段(轮换, 所有 s 相同), t 个 II 类段, 则

$$S(a_1)=\cdots=S(a_n)=9s+n+t,$$

对 $I\subseteq\{1,\ \cdots,\ n\}$, $|I|\geq 2$,

$$S\left(\sum_{i\in I}a_i\right)=|I|\cdot n+|I|\cdot t,$$

只需选出 $s,\ t\in\mathbb{Z}^+$ 使 $n+t=\beta\cdot(9s+n+t)$, 这显然可以做到.

(II) 再说明 $n\geq 11$ 不可行.

反证法: 假设 $n \geq 11$, 不妨设 $n = 11$.

显然 a_1 加 a_2 时进位, 故可取 T 为最小非负整数, 使得存在一对 $a_i,\ a_j (i \neq j)$ 相加时在 10^T 位进位.

设 $a_1, \cdots, a_{11}$ 的 10^T 位为 $x_1, \cdots, x_{11}$, 不妨设 $9 \geq x_1 \geq \cdots \geq x_{11} = 0$, 由于某对 $a_i,\ a_j$ 相加在 10^T 位进位, 故 $x_1 + x_2 \geq 10$. 注意到, 对 $I_1,\ I_2 \subseteq \{1,\ \cdots,\ 11\}$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, $|I_1|,\ |I_2| \geq 2$, 由于

$$S\left(\sum_{i \in I_1} a_i\right) + S\left(\sum_{i \in I_2} a_i\right) = S\left(\sum_{i \in I_1 \cup I_2} a_i\right),$$

故 $\sum\limits_{i \in I_1} a_i,\ \sum\limits_{i \in I_2} a_i$ 相加不进位.

特别地, $\sum\limits_{i \in I_1} x_i,\ \sum\limits_{i \in I_2} x_i$ 相加在个位不进位. ①

易知 $x_{10} \neq 0$ (否则 $(x_1 + x_{10}),\ (x_2 + x_{11})$ 相加进位, 矛盾), 故 $x_{10} \geq 1$. 现在将 $x_1,\ \cdots,\ x_{11}$ 分若干组(允许有数不在任何组中), 每组 ≥ 2 个数, 各组数之和的个位数之和 ≥ 10. ②

若②如成立, 则将各组之和依次相加, 即与①矛盾. 下面说明②成立.

先取出尽可能多的二元组, 每个二元组的和的个位数 ≥ 2. 若取出了 5 个二元组, 则②成立. 下设至多取出 4 个二元组, 则剩下 ≥ 3 个数, 且剩下的数中, 无两数 $\in [1,\ 4]$, 无两数 $\in [6,\ 9]$, 故必剩下 0 或 5 至少一个.

若剩下的数有 0, 则可推出剩下的数为 $0,\ 1,\ \cdots,\ 1 (\geq 2$ 个 $1)$, 矛盾.

故至少剩下一个 5, 进而剩下的数只能是"若干个 5"或"若干个 5, 一个 6", 将剩下的数三个三个一组, 设有 $m (0 \leq m \leq 4)$ 个二元组, $\left[\frac{11-2m}{3}\right]$ 个三元组, 则各组数之和的个位数之和 $\geq 2 \cdot m + 5 \cdot \left[\frac{11-2m}{3}\right]$, 易验证 $m = 0,\ 1,\ \cdots,\ 4$ 时均有

$$2 \cdot m + 5 \cdot \left[\frac{11-2m}{3}\right] \geq 10.$$

②成立. 故可推出矛盾!

结合 (I), (II) 即得原题所需结论. □

评注 本题是困难的组合题, 第一个难点在猜答案, 有多种可能的方向, 构造也有一定难度, 不一定一下就能想到, 需要作一定尝试, 事实上, 若答案是"对某些 n, β 不是空也不是全部", 则在证明部分可能需要作大量讨论;若答案是"对每个 n, β 或者空, 或者全部", 则在构造部分要达到 β 很小, 需要构造很多的进位, 本题最终的答案是后一种, 在证明的部分, 需首先猜到只需考虑第 1 个进位的那一位, 进而归结于一个关于 $x_1,\ \cdots,\ x_{11}$ 的小问题, 最后的这个小问题还需要选取合适的分类讨论的方法(在考场时间内能讨论完). 本题是第二轮选拔最难的一题.

8.4 对所有实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{60}\in[-1,1]$, 求

$$\sum_{i=1}^{60}x_i^2(x_{i+1}-x_{i-1})$$

的最大可能值, 这里 $x_0=x_{60},\ x_{61}=x_1$.

解 注意到

$$\sum_{i=1}^{60}x_i^2(x_{i+1}-x_{i-1})=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{60}(x_{i+1}-x_i)^3.$$

对 $1\le i\le 60$, 记 $y_i=x_{i+1}-x_i$, 由 $x_i,\ x_{i+1}\in[-1,\ 1]$ 知 $y_i\in[-2,\ 2]$, 进而

$$(y_i-2)(y_i+1)^2\le 0,$$

即

$$y_i^3\le 3y_i+2.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{60}x_i^2(x_{i+1}-x_{i-1})=\frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{60}y_i^3\le\frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{60}(3y_i+2)=40.$$

另一方面, 令 $(x_1,\ \cdots,\ x_{60})=(1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ -1,\ \cdots,\ 1,\ 0,\ -1)$. 此时

$$\sum_{i=1}^{60}x_i^2(x_{i+1}-x_{i-1})=40.$$

故

$$\sum_{i=1}^{60}x_i^2(x_{i+1}-x_{i-1})$$

的最大值为 40. □

评注 本题是简单的不等式, 注意到 $\sum x_i^2(x_{i+1}-x_{i-1})$ 就是 $\frac{1}{3}\cdot\sum(x_{i+1}-x_i)^3$ 就可以了.

8.5 求最小的正实数 α, 使得对面积为 1 的任意凸多边形 P, 存在平面上一点 M 使得 $P\cup Q$ 的凸包的面积不超过 α. 这里 Q 为 P 关于点 M 的中心对称图形.

解 结论是: α 最小为 2.

(I) 一方面, 令 P 是正 $\triangle ABC$.

若 M 在 P 外, 则 $P\cup Q=\varnothing$, 进而

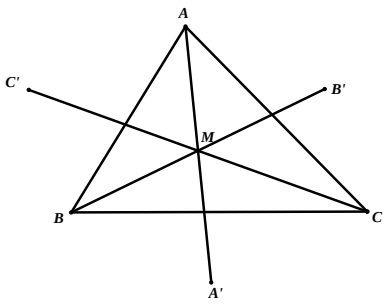
$$P\cup Q\text{ 凸包面积 }\ge P\cup Q\text{ 面积 }=2.$$

若 M 在 P 内, 设 $A,\ B,\ C$ 关于 M 对称点为 $A',\ B',\ C'$, 则

$$P\cup Q\text{ 凸包面积 }\ge S_{\triangle AMB'}+S_{\triangle B'MC}+S_{\triangle CMA'}+S_{\triangle A'MB}+S_{\triangle BMC'}+S_{\triangle C'MA}$$

$$= 2(S_{\triangle AMB} + S_{\triangle BMC} + S_{\triangle CMA})$$
$$= 2.$$

故 $\alpha \geq 2$.



(II) 另一方面, 我们说明 $\alpha = 2$ 符合要求.

取 P 的距离最远(之一)的一对顶点 A, B, 建系, 设 $A(0,\ 0)$, $B(L,\ 0)$, $L > 0$, 则

$$P \subseteq \{(x,\ y) \mid 0 \leq x \leq L,\ y \in \mathbb{R}\} \quad (\text{由 } AB \text{ 最长}).$$

取 M 为 $\left(\frac{L}{2},\ 0\right)$. 设 $P \cup Q$ 的凸包是 R, 由对称性, 为说明 $S_R \leq 2$, 只需说明 $S_{R_1} \leq S_{P_1} + S_{Q_1}$, 这里 P_1, Q_1, R_1 分别是 P, Q, R 与第一象限的交.

注意到 P_1, Q_1, R_1 可看作凸函数的图像, 设 P_1, Q_1, R_1 分别对应 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g(x)$ $(x \in [0,\ L])$, 则

$$S_{P_1} = \int_0^L f_1(x)dx,\ S_{Q_1} = \int_0^L f_2(x)dx,\ S_{R_1} = \int_0^L g(x)dx.$$

为说明 $S_{p_1} + S_{Q_1} \geq S_{R_1}$, 只需说明对 $x \in [0,\ L]$, 有

$$f_1(x) + f_2(x) \geq g(x).$$

取定 x, 由 R 的定义知 $g(x)$ 可表示为

$$\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \cdot f_i(\beta) + \frac{\beta-x}{\beta-\alpha} \cdot f_j(\alpha),$$

这里 $0 \leq \alpha \leq x \leq \beta \leq L$, $\alpha \neq \beta$, $i,\ j \in \{1,\ 2\}$. 由于 f_1, f_2 值域 $\subseteq [0,\ +\infty)$, 故

$$\begin{aligned} g(x) =& \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \cdot f_i(\beta) + \frac{\beta-x}{\beta-\alpha} \cdot f_j(\alpha) \\ \leq& \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \cdot f_1(\beta) + \frac{\beta-x}{\beta-\alpha} \cdot f_1(\alpha) + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \cdot f_2(\beta) + \frac{\beta-x}{\beta-\alpha} \cdot f_2(\alpha) \\ \leq& f_1(x) + f_2(x), \quad (\text{凸性}) \end{aligned}$$

进而 $S_R \leq 2$.

综上, α 最小值为 2. □

评注 本题是简单的组合几何, 得到 $\alpha \geq 2$ 的构造后, 证明部分也不难.

8.6. 给定整数 $n \geq 2$. 有 $2n^2$ 位选手参加中国象棋比赛, 每两位选手恰对弈一局, 结果可有平局. 已知

(1) 对任意三位选手甲、乙、丙, 若甲胜乙, 且乙胜丙, 则甲胜丙;

(2) 所有比赛中平局的场数不超过 $\frac{n^3}{16}$.

证明: 可从这 $2n^2$ 位选手中选出 n^2 位选手, 并适当记作 $P_{ij}(1 \leq i,\ j \leq n)$, 使得对任意 $i,\ j,\ i',\ j' \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, 若 $i > i'$, 则 P_{ij} 胜 $P_{i'j'}$.

证明 记 $t = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \in \mathbb{Z}^+$.

先去掉平局次数 $\geq t$ 的选手, 则去掉的选手数 $\leq \frac{\frac{n^3}{8}}{t} \leq \frac{n^2}{2}$, 故至少剩下 $\frac{3n^2}{2}$ 名选手, 记为 $V_1,\ \cdots,\ V_N(N \geq \frac{3n^2}{2})$, 约定自己胜自己, 则"胜"是 $V_1,\ \cdots,\ V_N$ 上的偏序关系. 作拓扑排序, 不妨设: 对 $1 \leq i,\ j \leq N$, 若 V_i 胜 V_j, 则 $i \leq j$. 现在将 $V_1,\ \cdots,\ V_N$ 取出前 $n^2 + (n-1)(2t-2)$ 项, 分成 $2n-1$ 段 $\Gamma_1,\ \cdots,\ \Gamma_{2n-1}$, 每段依次含 $n,\ 2t-2,\ n,\ 2t-2,\ \cdots,\ n,\ 2t-2,\ n$ 名选手, 由于

$$n \cdot n + (n-1)(2t-2) \leq n \cdot n + (n-1)\left(2 \cdot \left(\frac{n}{4} + 1\right) - 2\right) < \frac{3n^2}{2},$$

故这可以做到.

现在选取 $P_{i,j}$, 记

$$A_i = \{P_{i,1},\ \cdots,\ P_{i,n}\} \quad (1 \leq i \leq n),$$

令

$$(A_1,\ \cdots,\ A_n) = (\Gamma_{2n-1},\ \cdots,\ \Gamma_5,\ \Gamma_3,\ \Gamma_1),$$

我们验证这样就符合要求.

任取 $\alpha = P_{i,j},\ \beta = P_{i',\,j'},\ i > i'$. 设 $\alpha \in \Gamma_p,\ \beta \in \Gamma_q$, 由 $i > i'$ 知 $p \equiv q \equiv 1 \pmod 2$, 且 $p < q$, 设 $\alpha = V_r,\ \beta = V_s$, 由于 $\Gamma_p,\ \Gamma_q$ 之间有一个长为 $2t-2$ 的段, 故 $s - r \geq 2t-1$, 进而存在 $r \leq k \leq s$, 使 V_r 与 $V_k,\ V_k$ 与 V_s 均不是平局 (因为 $V_r,\ V_s$ 平局数均 $\leq t-1$). 从而 V_r 胜 $V_k,\ V_k$ 胜 V_s, 推出 V_r 胜 V_s.

故这样的 $P_{i,j}$ 符合要求.

原题得证! □

评注 本题是中等难度的组合题, 首先注意到 $\frac{1}{16}$ 很小, 可以先考虑 $\Theta(n^3)$, 由此想到可以先去掉平局数很多的人(量级估计的常用手法)(事实上, 后面再具体计算 n^3 前的系数发现 $\frac{1}{16}$ 刚好够). 后面选取 $P_{i,\,j}$ 有多种可能的方向, 需大胆尝试, 这与 IMO 2017 第 5 题比较像, 本题是一个很好的具有选拔功能的组合题.