2021 年第 20 届中国女子数学奥林匹克试题解答

瞿振华

(华东师范大学, 200241)

本文给出 2021 年第 20 届中国女子数学奥林匹克试题的解答.

I. 试题

1. 设 n 是正整数, $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}, p, q$ 是正实数, 满足 $p<q$, 且

$$x_{n+1}^p > x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p.$$

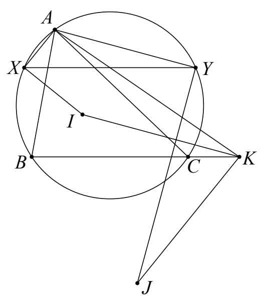
(1) 证明: $x_{n+1}^q > x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q$;

(2) 证明: $\left(x_{n+1}^p - x_1^p - x_2^p - \cdots - x_n^p\right)^{1/p} < \left(x_{n+1}^q - x_1^q - x_2^q - \cdots - x_n^q\right)^{1/q}$.

(华东师范大学 吴尉迟 供题)

2. 如图所示, 在锐角三角形 ABC 中, $AB < AC$, I 是内心, J 是顶点 A 所对的旁心. 点 X, Y 分别在三角形 ABC 外接圆的劣弧 $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ 上, 满足 $\angle AXI = \angle AYJ = 90^\circ$. 点 K 在 BC 的延长线上, 满足 $KI = KJ$. 证明: 直线 AK 平分线段 XY.

(华东师范大学 何忆捷 供题)



3. 求最小的正整数 n, 使得可将 $n \times n$ 的方格表中的每个小方格染为红、黄、蓝三种颜色之一, 满足以下三个条件:

(i) 每种颜色的小方格数目相同;

(ii) 若某行中有红格, 则该行中必有蓝格, 且无黄格;

(iii) 若某列中有蓝格, 则该列中必有红格, 且无黄格.

(华东师范大学 何忆捷 供题)

4. 我们称一个正整数数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是CGMO数列, 如果 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是严格递增的, 并且对任意整数 $n \geq 2022$, a_n 是在所有大于 a_{n-1} 的正整数中满足以下条件的最小数: 存在 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$ 的一个非空子集 A_n, 使得 $a_n \cdot \prod_{a \in A_n} a$ 是完全平方数.

证明: 存在正常数 c_1, c_2, 使得对任意一个CGMO数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, 均存在正整数 N (依赖于这个数列), 满足对任意整数 $n \geq N$, 有 $c_1 \cdot n^2 \leq a_n \leq c_2 \cdot n^2$.

(华东师范大学 瞿振华 供题)

5. 证明: 从集合 $\{1, 2, \cdots, 20\}$ 中任取4个(可以相同的)数后, 必可将其中3个数适当地记为 a, b, c, 使得关于 x 的同余方程 $ax \equiv b \pmod{c}$ 有整数解.

(华东师范大学 瞿振华 供题)

6. 设 S 是一个有限集合, $P(S)$ 是 S 的所有子集构成的集合. 对任意函数 $f: P(S) \to \mathbb{R}$, 证明:

$$\sum_{A \in P(S)} \sum_{B \in P(S)} f(A) f(B) 2^{|A \cap B|} \geq 0,$$

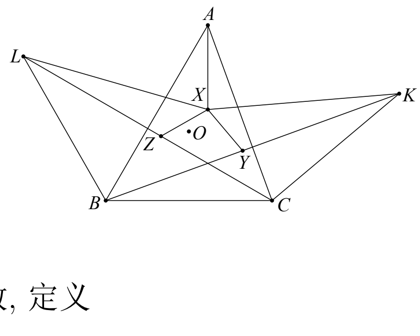
这里 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

(南方科技大学 付云皓 供题)

7. 如图所示, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, O 是外心. 点 B 关于 AC 的对称点为 K, 点 C 关于 AB 的对称点为 L. X 是 $\triangle ABC$ 内部一点, 满足 $AX \perp BC$, $XK = XL$. 点 Y, Z 分别在线段 BK, CL 上, 满足 $XY \perp CK$, $XZ \perp BL$.

证明: B, C, Y, O, Z 五点共圆.

(华东师范大学 林天齐 供题)



8. 设 m, n 是正整数, 定义

$$f(x) = (x-1)(x^2-1)\cdots(x^m-1), \quad g(x) = (x^{n+1}-1)(x^{n+2}-1)\cdots(x^{n+m}-1).$$

证明: 存在 mn 次整系数多项式 $h(x)$, 满足 $f(x)h(x) = g(x)$, 并且 $h(x)$ 的 $mn+1$ 个系数均为正整数.

(中国科学院数学与系统科学研究院 王彬 供题)

II. 解答

1. 设 n 是正整数, $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}, p, q$ 是正实数, 满足 $p < q$, 且

$$x_{n+1}^p > x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p.$$

(1) 证明: $x_{n+1}^q > x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q$;

(2) 证明: $\left(x_{n+1}^p - x_1^p - x_2^p - \cdots - x_n^p\right)^{1/p} < \left(x_{n+1}^q - x_1^q - x_2^q - \cdots - x_n^q\right)^{1/q}$.

(华东师范大学 吴尉迟 供题)

证明: 注意到要证的不等式均是齐次的, 可不妨设$x_{n+1} = 1$, 否则用$\frac{x_i}{x_{n+1}}$ 替换x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$. 此时, 条件不等式变为

$$x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p < 1,$$

故 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0, 1)$.

(1) 因为$p < q$, 故

$$x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q < x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p < 1.$$

(2) 记

$$a = (1 - x_1^p - x_2^p - \cdots - x_n^p)^{1/p},$$

则 $a \in (0, 1)$. 又 $q > p$, 故

$$a^q + x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q < a^p + x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p = 1.$$

从而

$$1 - x_1^q - x_2^q - \cdots - x_n^q > a^q,$$

即

$$(1 - x_1^q - x_2^q - \cdots - x_n^q)^{1/q} > a = (1 - x_1^p - x_2^p - \cdots - x_n^p)^{1/p}.$$

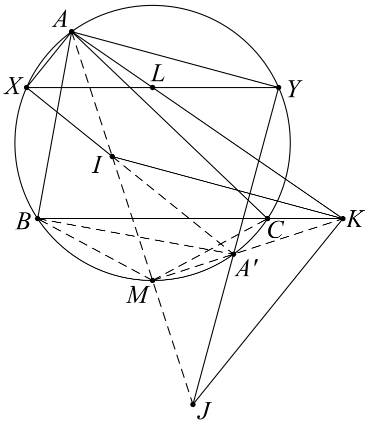
命题证毕. □

评注: (1)可转化为证明 $(\sum\limits_{i=1}^{n} x^p)^{1/p} \geq (\sum\limits_{i=1}^{n} x^q)^{1/q}$, 此即范数不等式. (2)需要设出差量, 便转化到(1)的结论. 在处理齐次不等式时, 将某个量设为常值是非常有用的技巧.

2. 如图所示, 在锐角三角形 ABC 中, $AB < AC$, I 是内心, J 是顶点 A 所对的旁心. 点 X, Y 分别在三角形 ABC 外接圆的劣弧 $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ 上, 满足 $\angle AXI = \angle AYJ = 90°$. 点 K 在 BC 的延长线上, 满足 $KI = KJ$. 证明: 直线 AK 平分线段 XY.

(华东师范大学 何忆捷 供题)

证法一:



设线段 IJ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 M, 点 A 的对径点为 A'.

由于 $\angle AXI = \angle AYJ = 90°$, 故直线 XI, YJ 均过点 A'. 又由内心、旁心熟知的性质可知 $MI = MJ = MB$, 结合 $KI = KJ$ 可得 $KM \perp IJ$, 于是点 A' 在 KM 上. 从而可知 $A'I = A'J$, 故 $\angle AIX = \angle A'IJ = \angle A'JI = \angle AJY$. 结合 $\angle AXI = \angle AYJ$ 可知 $\triangle AIX \backsim \triangle AJY$. 因此 $\angle XAM = \angle XAI = \angle YAJ = \angle YAM$, 故 $\overset{\frown}{XM} = \overset{\frown}{YM}$. 又 $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$, 故 $\overset{\frown}{BX} = \overset{\frown}{CY}$, 进而 $XY \parallel BC$. 又由相似三角形的性质, 有

$$\frac{AX}{AY} = \frac{AI}{AJ}. \tag{1}$$

由于 $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$, 故 $\angle MA'B = \angle MBC = \angle MBK$, 因此 $\triangle MA'B \backsim \triangle MBK$, 于是 $MA' \cdot MK = MB^2 = MI \cdot MJ$. 因此 $\triangle MIA' \backsim \triangle MKJ$, 进而 $IA' \perp KJ$, 即 $XA' \perp KJ$. 又 $AX \perp XA'$, 故 $AX \parallel KJ$. 同理 $AY \parallel KI$. 因此

$$\angle XAK = 180° - \angle AKJ, \angle YAK = \angle AKI. \tag{2}$$

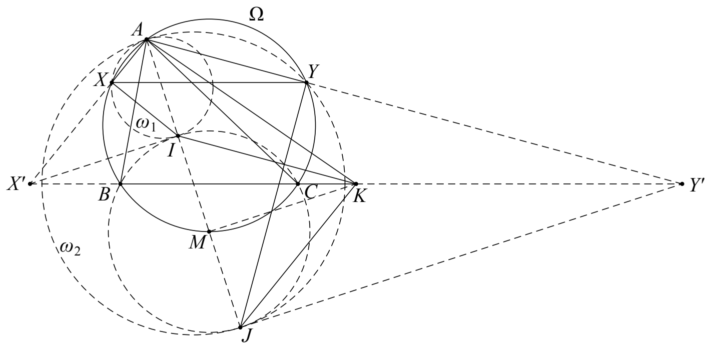
记 AK, XY 相交于点 L, 结合(1), (2)可知:

$$\frac{XL}{YL} = \frac{S_{\triangle AXL}}{S_{\triangle AYL}} = \frac{AX}{AY} \cdot \frac{\sin\angle XAK}{\sin\angle YAK} = \frac{AI}{AJ} \cdot \frac{\sin\angle AKJ}{\sin\angle AKI} = \frac{AI}{AJ} \cdot \frac{S_{\triangle AKJ}}{S_{\triangle AKI}} = 1.$$

因此 AK 平分线段 XY, 命题证毕. □

证法二: 记 $\triangle ABC$ 的外接圆是圆 Ω. 显然 A, I, J 三点共线, 该直线与圆 Ω 的另一个交点是 M, 则由内心、旁心熟知的性质可知 $MI = MJ = MB = MC$. 以 M 为圆心, MB 为半径作 $\odot M$. 记以 AI, AJ 为直径的圆分别是圆 ω_1, 圆 ω_2.

延长 AX, AY, 与直线 AB 分别相交于顶点 X', Y'.



同证法一证明 $KM \perp IJ$, $XY \parallel BC$.

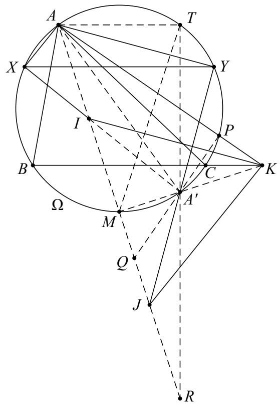
由于直线 AX 是圆 ω_1 和圆 Ω 的根轴, 直线 BC 是圆 Ω 和 $\odot M$ 的根轴, 故直线 AX, BC 的交点 X' 是圆 Ω, ω_1 与 $\odot M$ 的根心. 故 X 在圆 ω_1 和 $\odot M$ 的根轴上. 进而 $X'I \perp AI$. 同理 $Y'J \perp AJ$.

又 $KM \perp AM$, 故 $X'I \parallel KM \parallel Y'J$. 于是 $\dfrac{X'K}{Y'K} = \dfrac{IM}{JM} = 1$, 即 $X'K = Y'K$.

结合 $XY \parallel X'Y'$ 与 $X'K = Y'K$ 可知, AK 平分线段 XY.

命题证毕. □

证法三: 记三角形 ABC 的外接圆是圆 Ω. 作点 A 的对径点为 A'. 过 A 作 BC 的平行线, 与圆 Ω 相交于另一点 T. 设 AK 与圆 Ω 相交于另一点 P. 设 $\angle BAC$ 的平分线与直线 $A'P, A'T$ 和圆 ω 分别相交于点 Q, R 和 M (不同于 A), 显然 I, J 也在该角平分线上.



同证法一可知 M, A', K 三点共线, $XY \parallel BC$. 因此 $AT \parallel BC$.

注意到 M 是 $\widehat{BC}$ 的中点. 故 $MA = MT$. 又 $\angle ATR = 90°$, 故 $MA = MR$.

又 $AP \perp A'P$, 即 $AK \perp A'Q$, 故 $\triangle AMK \backsim \triangle A'MQ$, 于是 $MA \cdot MQ = MA' \cdot MK$. 又 $MA = MR$ 且同证法一可知 $MA' \cdot MK = MI^2$, 故

$$MR \cdot MQ = MI^2.$$

又 M 是 IJ 的中点, 故 I,J,Q,R 成调和点列.

因此 $A'I,A'J,A'Q,A'R$ 成调和线束. 又

$$AX\perp A'I,\ AY\perp A'J,\ AK\perp A'Q,\ AT\perp A'R,$$

故 AX,AY,AK,AT 也成调和线束. 又 $AT\parallel XY$, 故由调和线束的性质可知 AK 平分线段 XY.

命题证毕. □

评注: 本题证法较多, 各种几何性质也容易发现, 属于中等难度的几何问题.

3. 求最小的正整数 n, 使得可将 $n\times n$ 的方格表中的每个小方格染为红、黄、蓝三种颜色之一, 满足以下三个条件:

(i) 每种颜色的小方格数目相同;

(ii) 若某行中有红格, 则该行中必有蓝格, 且无黄格;

(iii) 若某列中有蓝格, 则该列中必有红格, 且无黄格.

(华东师范大学 何忆捷 供题)

解: 假定一种染色方案已具有性质(i)、(ii)、(iii), 显然 $3\mid n^2$, 所以 $3\mid n$, 故可设 $n=3k$, 而红、黄、蓝三色的格子各有 $3k^2$ 个.

若将方格表的任意两行对换, 或任意两列对换, 性质(i)、(ii)、(iii)仍保持, 因此不妨设有黄格的行恰为第 $1,2,\cdots,u$ 行, 有黄格的列恰为第 $1,2,\cdots,v$ 列.

将表格前 u 行与前 v 列的公共部分记为 A, 前 u 行与后 $3k-v$ 列的公共部分记为 B, 后 $3k-u$ 行与前 v 列的公共部分记为 C, 后 $3k-u$ 行与 $3k-v$ 列的公共部分记为 D, 如图x所示(若 $u=3k$, 则区域 C,D 不存在; 若 $v=3k$, 则区域 B,D 不存在).

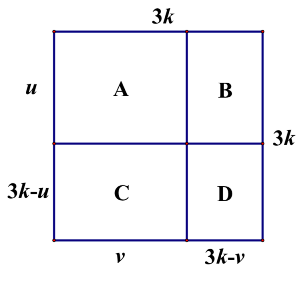


图 x

因第 $1,2,\cdots,u$ 行存在黄格, 根据性质(i), 区域 A,B 不再有红格(同时意味着区域 C,D 存在); 因第 $1,2,\cdots,v$ 列存在黄格, 根据性质(ii), 区域 A,C 不再有蓝格(同时意味着区域 B,D 存在). 由此可知, A 中全为黄格, 又注意到黄格仅出现在 A 中, 所以黄格数 $uv=3k^2$, 而且 B 中必全为蓝格, C 中必全为红格.

对于区域 D, 结合性质(ii)、(iii)知, D 中每行都有蓝格, 每列都有红格. 因此 B 所含的蓝格数小于蓝格总数, 即 $u(3k-v)<3k^2=uv$, 而 C 所含的红格数小于红格总数, 即 $(3k-u)v<uv$. 这样经化简可得,

$$u>\frac{3}{2}k,\ v>\frac{3}{2}k. \tag{1}$$

由于 $3\mid uv$, 根据对称性, 可设 $3\mid u$ (否则, 考虑行与列转置、并将红色与蓝色互换后的方格表). 记 $\frac{u}{3}=rs,\ v=rt$, 其中 $r=\left(\frac{u}{3},v\right)$, 此时 $st=\frac{uv}{3r^2}=\left(\frac{k}{r}\right)^2$ 为平方数, 而 s,t 互素, 从而 s,t 分别为平方数. 可设 $s=p^2,t=q^2$, 这样就有

$$u=3p^2r,\ v=q^2r,\ k=pqr,$$

代入(1)可得, $3p^2r>\frac{3}{2}pqr,\ q^2r>\frac{3}{2}pqr$, 即 $\frac{3}{2}p<q<2p$, 故必有 $\frac{3}{2}p<2p-1$, 这表明 p 至少是 3, 且由 $q>\frac{3}{2}p$ 进一步知 q 至少是 5.

由此可知, $n=3k=3pqr\geqslant 45$.

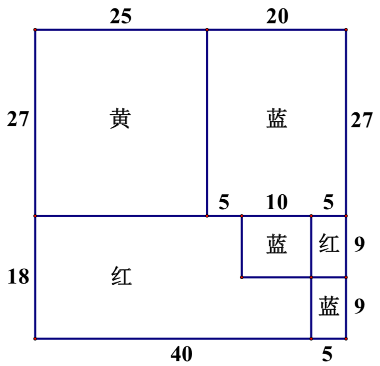


图 y

另一方面, 我们在 $n=45$ (即 $k=15$)时构造一种满足条件的染色方案. 此时 $uv=675$, 且由(1)知 $u,v>\frac{45}{2}$. 在 $3\mid u$ 时, 必有 $u=27,\ v=25$. 于是, 按图y的方式划分区域 A,B,C,D (取 $u=27,\ v=25$), 先将 A 中的格子全染为黄色, B 中的格子全染为蓝色, C 中的格子全染为红色, 再对 D 中的格子进行染色, 其中需要染 135 个蓝格和 225 个红格, 并保证每行有蓝格, 每列有红格. 图y给出了一种符合要求的染色方案.

综上所述, 所求 n 的最小值为 45. $\square$

评注: 由条件, 将表格的染色情形先确定为形如图 x 的状态, 再对每种颜色的方格个数进行估计使其相等, 例子也不唯一. 本题总体想法是自然的, 后一部分需要一些讨论, 属于中等偏易的组合问题.

4. 我们称一个正整数数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是CGMO数列, 如果 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是严格递增的, 并且对任意整数 $n\geq 2022$, a_n 是在所有大于 a_{n-1} 的正整数中满足以下条

件的最小数: 存在 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}$ 的一个非空子集 A_n, 使得 $a_n\cdot\prod\limits_{a\in A_n}a$ 是完全平方数.

证明: 存在正常数 c_1,c_2, 使得对任意一个CGMO数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, 均存在正整数 N (依赖于这个数列), 满足对任意整数 $n\geq N$, 有 $c_1\cdot n^2\leq a_n\leq c_2\cdot n^2$.

(华东师范大学 瞿振华 供题)

证明: 我们证明正常数 $c_1=2^{-4042}$, $c_2=2$ 满足要求.

设 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是任意一个CGMO数列. 首先证明上界.

由 a_{2022} 的定义, 存在 $A_{2022}\subset\{a_1,a_2,\cdots,a_{2011}\}$, 使得 $a_{2022}\cdot\prod\limits_{a\in A_{2022}}a$ 是完全平方数, 设等于 L^2, $L>0$. 下面对整数 $k\geq 0$, 归纳证明 $a_{2022+k}\leq(L+k)^2$.

$k=0$ 时, 显然 $a_{2022}\leq a_{2022}\cdot\prod\limits_{a\in A_{2022}}a=L^2$. 假设结论对 k 成立, 即 $a_{2022+k}\leq(L+k)^2$. 由于 $(L+k+1)^2>(L+k)^2\geq a_{2022+k}$, 且 $(L+k+1)^2\cdot a_{2022}\cdot\prod\limits_{a\in A_{2022}}a=(L+k+1)^2L^2$ 是完全平方数, 结合 $a_{2022+k+1}$ 满足的条件, 可知 $a_{2022+k+1}\leq(L+k+1)^2$. 这就完成了归纳证明.

因此对 $n\geq 2022$, 有 $a_n\leq(L+n-2022)^2$. 显然存在正整数 $N\geq 2022$, 使得当 $n\geq N$ 时, 均有 $(L+n-2022)^2\leq 2n^2$, 从而 $a_n\leq 2n^2$. 这里 N 仅与 L, 即仅与序列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 有关.

下面再证明下界. 任意正整数 m, 可唯一地表示为 $m=ab^2$, 其中 a,b 是正整数, 且 a 不含平方因子. 称 a 是 m 的无平方因子部分, 记为 $a=f(m)$. 注意到 f 有简单的性质 $f(xy^2)=f(x)$, $f(xy)=f(f(x)f(y))$.

记 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2021}\}$, 令 $F=\{f(\prod\limits_{a\in B}a)|\,B\subseteq S\}$, 这里空集的元素乘积等于1. 注意到 F 有如下性质, 对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_t\in F$, 有 $f(x_1x_2\cdots x_t)\in F$.

假设 $x_i=f\left(\prod\limits_{a\in B_i}a\right)$, $B_i\subseteq S$, $1\leq i\leq t$, 令 $B=B_1\Delta B_2\Delta\cdots\Delta B_t$ (这里 $X\Delta Y$ 是集合 X,Y 的对称差, $X\Delta Y=(X\backslash Y)\cup(Y\backslash X)$), 则 $f(x_1x_2\cdots x_t)=f\left(\prod\limits_{a\in B}a\right)\in F$.

我们归纳地证明对每个正整数 n, a_n 的无平方因子部分均属于 F.

显然对 $1\leq n\leq 2021$ 结论成立. 假设结论对 $1\leq n\leq m$ 均成立, $m\geq 2021$, 由 a_{m+1} 的定义, 存在 $A_{m+1}\subseteq\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, 使得 $a_{m+1}\cdot\prod\limits_{a\in A_{m+1}}a$ 是完全平方数. 由归纳假设, 对任意 $a\in A_{m+1}$, $f(a)\in F$, 从而结合 F 具有的性质, 有

$$f(a_{m+1})=f\left(\prod_{a\in A_{m+1}}a\right)=f\left(\prod_{a\in A_{m+1}}f(a)\right)\in F.$$

设 $|F|=m$, 则 $m\leq 2^{2021}$. 对任意的正整数n, 考虑$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这n 个数

的不含平方因子部分. 由抽屉原理, 这n 个数中存在$k \geqslant \lceil \frac{n}{m} \rceil \geq \lceil \frac{n}{2^{2021}} \rceil$ 个数的不含平方因子部分相同, 设为$f(a_{i_1}) = f(a_{i_2}) = \cdots = f(a_{i_k}) = u$, 其中$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$. 则由于$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_k}$ 且它们的不含平方因子部分均为u, 我们有

$$a_{i_k} \geqslant uk^2 \geqslant k^2 \geqslant \left(\frac{n}{2^{2021}}\right)^2,$$

从而 $a_n \geqslant a_{i_k} \geqslant 2^{-4042} \cdot n^2$. □

评注: 上界较为容易, 证明下界需要考虑 a_n 的无平方因子部分, 证明每个 a_n 的无平方因子部分都落在一个大小可控的集合中. 一部分考生解答中 c_1, c_2 也依赖于数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, 没有准确理解题意. 最终共有四名考生解出本题.

5. 证明: 从集合 $\{1, 2, \cdots, 20\}$ 中任取4个(可以相同的)数后, 必可将其中3个数适当地记为 a, b, c, 使得关于 x 的同余方程 $ax \equiv b \pmod{c}$ 有整数解.

(华东师范大学 瞿振华 供题)

证明: 熟知 $ax \equiv b \pmod{c}$ 有整数解当且仅当 $\gcd(a, c) \mid b$.

用反证法. 假设从 $\{1, 2, \cdots, 20\}$ 中取出 4 个数 a_1, a_2, a_3, a_4 后结论不成立.

(1) 若 a_1, a_2, a_3, a_4 中有素数方幂. 不妨设 $a_1 = p^\alpha$, p 是素数, $\alpha \geqslant 0$. 又不妨设 $v_p(a_2) = \beta \leqslant v_p(a_3) = \gamma$. 则取 $a = a_1$, $b = a_3$, $c = a_2$, 有 $\gcd(a, c) = p^{\min(\alpha, \beta)} \mid p^\gamma$, 故 $\gcd(a, c) \mid b$. 与反证法假设矛盾, 故 a_1, a_2, a_3, a_4 中没有素数方幂.

(2) 若 a_1, a_2, a_3, a_4 中有整除关系. 不妨设 $a_1 \mid a_2$. 则可取 $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$. 有 $\gcd(a, c) \mid a_1$, 故 $\gcd(a, c) \mid b$. 与反证法假设矛盾. 因此 a_1, a_2, a_3, a_4 没有整除关系(特别地, 也没有相同数).

(3) 罗列 $1, 2, \cdots, 20$ 中的所有含有至少两个不同素因子的数, 有

$$6, 12, 18, 10, 15, 14, 20.$$

故我们所选4个数在上面所列的7个数中. 注意到 14 的素因子 7 在其它数中不出现, 因此在检验条件 $\gcd(a, c) \mid b$ 时, 14 等同于 2 看待, 从而 14 不能选. 而剩余 6 个数中注意到整除关系, $6 \mid 12$, $6 \mid 18$, $10 \mid 20$. 从中选 4 个无整除关系的数只能选 $12, 18, 15$ 以及 $10, 20$ 中的一个. 这样取 $a = 12$, $b = 18$, $c = 15$ 有 $\gcd(a, c) = 3 \mid b$, 结论成立.

故反证法假设不成立, 原命题结论成立. □

评注: 本题中 20 可以加强为 104, 并且 104 是最佳值. 首先, 由于 $2, 3, 5, 7$ 中取3个数相乘可得4个数 $30, 42, 70, 105$, 这4个数中任意两数的最大公约数不整除

第三个数, 因此结论对 105 不成立. 下面证明在 $\{1,2,\cdots,104\}$ 中任取4个数, 均存在两数的最大公约数可以整除第三个数. 反证法, 假设存在反例 a,b,c,d. 若 $\gcd(a,b,c,d)=x>1$, 则可用 $\frac{a}{x},\frac{b}{x},\frac{c}{x},\frac{d}{x}$ 替换 a,b,c,d, 仍然是反例, 因此可不妨设 $\gcd(a,b,c,d)=1$, 由此可知 a,b,c,d 中必有奇数. 不妨设 a 是奇数.

考虑 $d_1=\gcd(a,b)$, $d_2=\gcd(a,c)$, $d_3=\gcd(a,d)$. d_1,d_2,d_3 中没有整除关系, 这是因为假如 $d_2\mid d_1$, 那么 $(a,c)\mid b$, $ax\equiv b \pmod c$ 有整数解. 从而 a 有三个互不整除的约数 d_1,d_2,d_3, a 不能是素数方幂. 若 a 有至少三个不同素因子, 则 $a\geq 3\times 5\times 7>104$, 不成立. 因此 a 有两个不同素因子, 设 $a=p^\alpha q^\beta$.

设 $d_i=p^{\alpha_i}q^{\beta_i}$, $i=1,2,3$. 由 d_1,d_2,d_3 互不整除可知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 互不相同, β_1,β_2,β_3 也互不相同, 因此 $\alpha\geq 2$, $\beta\geq 2$, 这样 $a\geq 3^2\times 5^2>104$, 不成立. 结论得证.

考虑到作为第二天第一题, 特将 104 改为本届女子奥林匹克的届数 20, 使得有更多的路线可以尝试.

6. 设 S 是一个有限集合, $P(S)$ 是 S 的所有子集构成的集合. 对任意函数 $f: P(S)\to\mathbb{R}$, 证明:

$$\sum_{A\in P(S)}\sum_{B\in P(S)} f(A)f(B)2^{|A\cap B|}\geq 0,$$

这里 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

(南方科技大学 付云皓 供题)

证明: 注意到

$$2^{|A\cap B|}=\sum_{X\subset A\cap B}1=\sum_{\substack{X\subset A\\ X\subset B}}1,$$

不等式左端可改写为

$$\sum_{A\in P(S)}\sum_{B\in P(S)}\sum_{\substack{X\subset A\\ X\subset B}} f(A)f(B),$$

交换求和次序, 得到

$$\begin{aligned}&\sum_{X\in P(S)}\sum_{\substack{A\in P(S)\\ A\supset X}}\sum_{\substack{B\in P(S)\\ B\supset X}} f(A)f(B)\\ =&\sum_{X\in P(S)}\left(\sum_{\substack{A\in P(S)\\ A\supset X}} f(A)\right)\left(\sum_{\substack{B\in P(S)\\ B\supset X}} f(B)\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{X \in P(S)} \left(\sum_{\substack{A \in P(S) \\ A \supset X}} f(A) \right)^2 \geqslant 0.$$

最后一个不等式是因为若干个实数的平方和是非负的. 得证. □

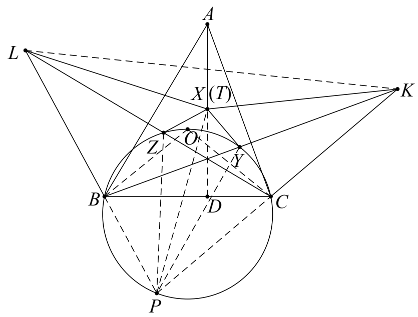
评注: 本题是一个组合形式的二次型, 证明二次型非负必然需要配成平方式. 可通过对较小的 n 探索配方的结果. 实际做对的人数低于预期.

7. 如图所示, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, O 是外心. 点 B 关于 AC 的对称点为 K, 点 C 关于 AB 的对称点为 L. X 是 $\triangle ABC$ 内部一点, 满足 $AX \perp BC$, $XK = XL$. 点 Y, Z 分别在线段 BK, CL 上, 满足 $XY \perp CK$, $XZ \perp BL$.

证明: B, C, Y, O, Z 五点共圆.

(华东师范大学 林天齐 供题)

证明:



设直线 BL, CK 相交于点 P. 作 $AD \perp BC$ 于点 D.

设 T 是 $\triangle PKL$ 的外心, 则 $TL = TP = TK$. 在等腰三角形 TLP 中, 由熟知的结论, $TB^2 = TP^2 - BL \cdot BP$. 同理 $TC^2 = TP^2 - CK \cdot CP$.

由已知条件可得 $BL = BC = CK$, 故

$$TB^2 - TC^2 = (TP^2 - BL \cdot BP) - (TP^2 - CK \cdot CP) = BC(CP - BP).$$

注意到 A 是 $\triangle PBC$ 中顶点 P 所对的旁心, 而 D 是旁切圆切点, 故 $CP - BP = BD - CD$, 因此

$$TB^2 - TC^2 = (BD + CD)(BD - CD) = BD^2 - CD^2,$$

进而 $XD \perp BC$. 又 $TK = TL$, 故 X, T 均在直线 AD 和线段 KL 的中垂线上.

而 $AB > AC$, 故 KL 与 BC 不平行, 则直线 AD 和线段 KL 的中垂线也不平行, 两者有唯一的公共点. 因此 T, X 重合, 则 X 是 $\triangle PKL$ 的外心.

因为 $XY \perp CK$, 即 $XY \perp PK$, 故点 Y 在 PK 的中垂线上, 进而 $YP = YK$. 结合 $BC = CK$ 可知 $\angle CPY = \angle CKY = \angle CBY$, 故 B, Y, C, P 四点共圆.

同理 B,Z,C,P 四点共圆. 又

$$\begin{aligned}\angle BPC &= \angle CBL + \angle BCK - 180^\circ = 2(\angle ABC + \angle ACB) - 180^\circ \\ &= 180^\circ - 2\angle BAC = 180^\circ - \angle BOC,\end{aligned}$$

故 B,P,O,C 四点共圆.

综上, B,P,C,Y,O,Z 六点共圆, 进而 B,C,Y,O,Z 五点共圆.

命题证毕. □

评注: 证明 B,C,Y,Z 四点共圆并不困难. 证明外心 O 也在这个圆上需要证明 X 是三角形 PKL 的外心, 此时需要用到同一法. 本题是中等偏难的几何题.

8. 设 m,n 是正整数, 定义

$$f(x) = (x-1)(x^2-1)\cdots(x^m-1), \quad g(x) = (x^{n+1}-1)(x^{n+2}-1)\cdots(x^{n+m}-1).$$

证明: 存在 mn 次整系数多项式 $h(x)$, 满足 $f(x)h(x) = g(x)$, 并且 $h(x)$ 的 $mn+1$ 个系数均为正整数.

(中国科学院数学与系统科学研究院 王彬 供题)

证明: 我们对 $m+n$ 归纳归纳证明结论: 对非负整数 m,n, 分式

$$f_{m,n}(x) = \frac{(x^{m+1}-1)(x^{m+2}-1)\cdots(x^{m+n}-1)}{(x-1)(x^2-1)\cdots(x^n-1)}$$

化简之后是一个mn 次多项式, 并且其$mn+1$ 个系数均为正整数. 这里 $m=0$ 时, 零个式子相乘仍为是1.

首先注意有对称性$f_{m,n}(x) = f_{n,m}(x)$. 直接计算可知$f_{m,0}(x) = f_{0,n}(x) = 1$, $f_{1,1}(x) = 1+x$, $f_{1,2}(x) = f_{2,1}(x) = 1+x+x^2$.

设$m,n>0$, $m+n \geq 4$, 且结论对更小的$m+n$ 成立, 则由于

$$\frac{f_{m-1,n}(x)}{f_{m,n}(x)} = \frac{(x^m-1)(x^{m+1}-1)\cdots(x^{m+n-1}-1)}{(x^{m+1}-1)(x^{m+2}-1)\cdots(x^{m+n}-1)} = \frac{x^m-1}{x^{m+n}-1},$$

$$\frac{f_{m,n-1}(x)}{f_{m,n}(x)} = \frac{f_{n-1,m}(x)}{f_{n,m}(x)} = \frac{(x^n-1)(x^{n+1}-1)\cdots(x^{m+n-1}-1)}{(x^{n+1}-1)(x^{n+2}-1)\cdots(x^{m+n}-1)} = \frac{x^n-1}{x^{m+n}-1},$$

我们有

$$x^n \times \frac{f_{m-1,n}(x)}{f_{m,n}(x)} + \frac{f_{m,n-1}(x)}{f_{m,n}(x)} = \frac{x^n \times (x^m-1)}{x^{m+n}-1} + \frac{x^n-1}{x^{m+n}-1} = 1.$$

根据归纳假设, $f_{m,n}(x) = x^n \times f_{m-1,n}(x) + f_{m,n-1}(x)$ 是mn 次非负整数系数多项式, 并且由$f_{m-1,n}(x)$ 的所有系数均为正可知$f_{m,n}(x)$ 的$x^n, x^{n+1}, \ldots, x^{mn}$ 项系数均为正, 由$f_{m,n-1}(x)$ 的所有系数均为正可知$f_{m,n}(x)$ 的$x^0, x^1, \ldots, x^{mn-m}$ 项系数均为正, 所以$f_{m,n}(x)$ 的所有$x^0, x^1, \ldots, x^{mn}$ 项的系数均为正整数. 由归纳法, 结论成立. □

评注: 本题有组合计数的背景, 记

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = f_{m,n}(q) = \frac{(q^{m+1}-1)(q^{m+2}-1)\cdots(q^{m+n}-1)}{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^n-1)},$$

称为 q-二项式系数, q^k 的系数等于将 k 写成至多 m 个加数且每个加数均不超过 n 的无序分拆数, 显然是正整数. 然而完整证明上面 q-二项式系数的组合意义并不容易, 本题只需证很弱的结论, 但也需要递推关系, 该递推关系是 q-二项式系数的基本关系, 但对于不具备这些背景的考生, 独立发现这个递推关系也是不容易的. 最终本题有三名学生解出.