数学竞赛与高等数学的联系

艾颖华

清华大学数学科学系

内容提要

我们将从以下四个方面探讨数学竞赛与高等数学的联系.

- 数学竞赛对学习高等数学的促进作用.
- 数学竞赛与高等数学的区别.
- 高等数学向数学竞赛的渗透.
- 对数学竞赛训练的一些探讨.

数学竞赛活动简介

中学生的数学竞赛活动，是发现和培养数学人才的重要途径.

- 在国际上，最有影响力的是国际数学奥林匹克 (IMO)，已经举办了 62 届.
- 国内最重要的数学竞赛活动是全国高中数学联合竞赛与中国数学奥林匹克，中国数学奥林匹克已经举办了 36 届.

在这些活动中，发现了很多有数学天赋的学生，很多都成长为优秀的数学工作者.

数学竞赛简介

这些竞赛活动的形式是在规定的时间内解答给定的数学问题. 这些问题涉及到的知识可以分成四个部分:

- 代数, 主要包括方程, 数列, 不等式, 多项式等内容.
- 几何, 主要包括平面几何与解析几何.
- 数论, 主要包括整除和同余理论, 以及不定方程等内容.
- 组合, 主要包括组合计数, 组合极值, 图论等内容.

这些知识, 很多都超出了中学数学的教学内容, 处于中学数学和大学数学的衔接地带.

数学竞赛对思维能力的培养

除了强调对知识的理解与应用，数学竞赛还注重思维能力的培养．具体的说，培养学生如下这些能力：

- 面对新问题，进行各种尝试和探索，并获得进展．
- 从简单情形出发，找到解决一般情形的思路和方法．
- 将困难的问题分解成若干个相对简单的小问题，逐一解决．
- 掌握“研究极端情况”,“算两次”,“局部到整体”等方法．
- ……

这些能力，在今后学习和工作的各个方面，都非常有用．

数学竞赛优秀学生的特点

我们观察到, 数学竞赛优秀学生普遍有如下特点:

- 对数学与数学研究有浓厚的兴趣.
- 有独立解决问题的能力.
- 有很强的自学能力.
- 有很好的数学表达能力.

对学习高等数学的促进作用

总结一下，通过参加数学竞赛活动，学生们获得了如下几方面的提高：

- 储备了丰富的数学基础知识.
- 了解并在一定程度上实践了研究问题的方法.
- 学会了如何表述复杂的数学对象和结构.
- ……

这些为以后进一步学习高等数学或从事数学研究，打下了很好的基础.

数学竞赛与高等数学的区别

人们注意到, 数学竞赛与高等数学或数学研究有如下这些不同之处.

- 数学竞赛中主要是解答别人设计好的问题; 高等数学或数学研究中强调提出并解决问题.
- 数学竞赛中关心单个的独立的问题; 高等数学或数学研究中重视理论的整体框架与结构.
- 数学竞赛中重视解题的方法和技巧; 高等数学或数学研究中强调培养整体的眼光与数学品味.
- 数学竞赛中主要靠自己学习与做题; 高等数学或数学研究中需要广泛的交流合作.
- 数学竞赛强调快速解题; 高等数学或数学研究中需要细嚼慢咽, 通盘的思考数学问题.

区别一: 解题技巧与整体框架

Goro Shimura 与 William Thurston 都曾经指出:"数学竞赛中有些问题人为编造的味道太浓, 不是实际数学研究中会碰到的问题; 解决这些问题需要一些特别的技巧, 而不是系统的普遍适用的方法."

为了克服上述不足, 应当尽可能的直接从高等数学或数学研究中选取合适的数学现象, 改编成数学竞赛问题. 数学研究中出现的问题更加自然, 数学内涵也更加丰富. 学生们通过思考这样的问题, 能见识到现代数学与数学研究的原貌, 吸引他们进一步学习现代数学知识.

区别二: 提出问题的能力

丘成桐先生曾说过:“...... 获得奥数金奖只能证明考试的能力, 而不代表研究的能力, 研究的根本是找问题. 奥数只训练别人的题目, 而不知道去做自己的题目.”

那么, 应该如何培养自己提出问题的能力呢?

培养提问题的能力

恽之玮 (MIT 教授, 2000 年 IMO 金牌) 在一次访谈中谈到:
(https://blog.zilin.one/2010/07/12/数学之路-对话恽之玮学长/)

“…… 比如黑板上就抄着一个定理，也不用管它的证明，那能不能就这个定理问一些问题？这个定理一定要去欣赏，很多时候写了一个定理，然后开始证明，证明完了，课也结束了。其实证明是其次的，如果真正感兴趣了，再去看证明，但首先需要欣赏，这个定理漂亮在哪里？有用在哪里？要花甚至比看证明更多的时间来想这个问题。当然，我现在是这么说，但我学的时候也不是这样，自学的时候也是看看定理的叙述，有时候自己再想一想，有时候想不出来就看看人家怎么做的。其实这些都是中学的学习方法，是不对的，真正学数学不应该这么学。”

高等数学向数学竞赛的渗透

数学竞赛中的一部分问题有高等数学的背景，有些问题甚至是直接来自于当前活跃的数学研究．高等数学向数学竞赛的渗透，是数学竞赛避免僵化，避免过度技巧化，维持活力的重要因素．

我们收集了如下几个例子，和大家一起欣赏体会．

- 强调映射的观点;
- 范畴论的观点;
- Brouwer 不动点定理与 Sperner 引理;
- Borsuk-Ulam 定理与 Tucker 引理;
- Katz-Tao 不等式及应用.

用映射观点看抽屉原理

在数学竞赛中，抽屉原理是重要的方法.

命题

把多于 n 个苹果放入 n 个抽屉，则有一个抽屉中至少有两个苹果.

设苹果和抽屉的集合分别为 E 和 B，放置苹果的方式等价于一个映射 $p: E \to B$. 对 $b \in B$，称它在 p 下的原像集 $p^{-1}(b) = \{e \in E | p(e) = b\}$ 为 b 处的纤维. 抽屉原理可以叙述成如下形式:

命题

如果 $|E| > |B|$，则存在纤维 $p^{-1}(b)$ 使得 $|p^{-1}(b)| > 1$.

Fubini 定理

这样, 可以把抽屉原理看成如下更一般现象的特例.

定理 (Fubini 定理)

设 $p : E \to B$ 是映射, 则 $E = \bigcup_{b\in B} p^{-1}(b)$. 特别的, 对任何映射 $f : E \to \mathbf{R}$, 有 $\sum_{e\in E} f(e) = \sum_{b\in B} \sum_{e\in p^{-1}(b)} f(e)$.

上述定理强调: 要了解整体 E 的信息, 只需要了解所有纤维 $\{p^{-1}(b)\}_{b\in B}$ 的信息 (以及纤维们是如何拼起来的). 这是拓扑学中的重要观念.

另外, 上述定理中的等式就是组合学中经常用到的算两次方法. 在微积分中有积分版本的 Fubini 定理.

用映射观点看抽屉原理

这么形式化的叙述抽屉原理有什么好处?

- 如果我们选用"苹果与抽屉"的字眼进行思考, 则可能的放置方式太多了, 会让我们不知道该选哪一个.
- 如果我们采用映射的语言思考, 由于问题中自然存在的映射一般是很少的, 反而让我们更容易找到正确的构造.

例 (2014 年 CMO 试题)

对于有限的实数集合 X, Y, 定义 $X+Y=\{x+y|x\in X, y\in Y\}$, $2X=\{2x|x\in X\}$. 给定正整数 n. 设 A, B 是 $\{1,2,...,n\}$ 的非空子集. 证明: 存在 $D\subset(A+B)$, 使得 $(D+D)\subset 2(A+B)$, 且 $|D|\geq\frac{|A|\cdot|B|}{2n}$.

要构造 $D=\{a_i+b_i|a_i\in A, b_i\in B\}$, 很难找到 $|D|$ 与 $|A|\cdot|B|=|A\times B|$ 的联系. 这启发我们去构造 $R=\{(a_i,b_i)\}\in A\times B$, 然后通过映射 $p: A\times B\to A+B, p(a,b)=a+b$ 将 R 送到 $A+B$ 中, 即令 $D=p(R)$. 如何构造 $A\times B$ 的较大子集 R 呢? 若希望用抽屉原理的话, 需要找一个分类映射 $q: A\times B\to X$, 有哪些自然的映射? 注意到之前有映射 p, 它是对两个分量求和, 由此自然想到对两分量求差的映射 $q: A\times B\to[1-n, n-1]$, $q(a,b)=a-b$. 取 R 为 q 的最大纤维, 再令 $D=p(R)$, 就完成了解答.

范畴论的观点

- 以前，人们为了研究一个对象 X，采用的办法是：研究 X 是由哪些元素构成，它的元素是如何组合在一起的，它们之间有些什么结构，......人们称这种观点为集合论观点，把 X 视为附加某种具体结构的集合.
- 后来，人们可用另一种方法研究 X：考虑由与 X 具有同类结构的所有对象 $Y, Z, W, \cdots$ 所构成的"世界"，通过研究 X 与其他所有对象 $Y, Z, W, \cdots$ 之间的关系，获得 X 的完整信息. 人们称这种观点为范畴论观点，它通过描述 X 与其他对象之间的关系来刻画 (或确定)X.

整体观点的例子

例

设 n 是正整数. 称由 n 个字母 a, n 个字母 b, n 个字母 c 组成的长为 $3n$ 的单词为一个 “变色龙”. 允许对相邻两个字母进行对换. 证明: 对任何变色龙 X, 存在一个变色龙 Y, 使得无法经过少于 $\frac{3n^2}{2}$ 次对换将 X 变成 Y.

如果只把目光盯着 X, 想直接构造 Y, 并不容易. 如果注意到, 本问题关心所有的 “变色龙” 以及 “变色龙” 之间的对换关系所构成的 “世界”, 则问题迎刃而解. 具体的说, 在两个 “变色龙” 之间连一条边, 当且仅当它们可以通过一次对换变成对方. 这就得到一个图 G,“变色龙”X 变到 Y 所需要的最少对换次数等于 G 中 X 到 Y 的距离 $d(X, Y)$. 距离是满足三角不等式的: $d(A, X) + d(X, B) \geq d(A, B)$, 从而有 $\max\{d(A, X), d(X, B)\} \geq \frac{1}{2}d(A, B)$. 再构造一对 “变色龙”$A, B$ 使得 $d(A, B) = 3n^2$ 即可.

1912 年, Brouwer 证明了如下的

定理 (Brouwer 不动点定理)

圆盘 $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ 到自身的任何连续映射 $f : D \to D$ 都有不动点, 即存在 $z \in D$ 使得 $f(z) = z$.

之后, 人们考虑对一般的几何空间 M, 连续映射 $f : M \to M$ 是否一定有不动点, 并希望数出 f 的不动点的个数. 这些研究发展成为拓扑学中的重要分支, 称之为不动点理论.

可以将 Brouwer 不动点定理叙述成如下有趣的形式: 某人去某个城市旅游 (假设此城市形状像一个圆盘), 此人不小心把城市地图掉到地上, 他非但没有懊恼, 反而开心的断言: 地图上必有一点, 它所在的 (地面) 位置与它所代表的位置重合!

Sperner 引理

1928 年, 23 岁的数学家 E.Sperner 为了理解 Brouwer 不动点定理, 给出了如下等价的组合版本.

定理 (Sperner 引理)

假设已将三角形 $V_1V_2V_3$ 剖分成一些小三角形之并. 将所有小三角形的顶点用三种颜色 $1,2,3$ 之一染色, 要求: 顶点 V_i 染为颜色 i, 边 V_jV_k 上的点只能染为颜色 j 或 k. 不论如何染色, 总存在一个小三角形, 它的三个顶点的颜色互不相同.

Sperner 引理的证明概要

用反证法, 假设没有三色三角形.

(1) 提取局部特征. 每个小三角形只能是单色的或双色的. 单色三角形含有 0 条异色边, 双色三角形含有 2 条异色边.

(2) 从局部到整体. 对局部特征求和, 令 S 等于所有小三角形的异色边数目的总和, 则由 (1) 知 S 是偶数.

(3) 过渡到边界上. 注意到每条内部异色边在 S 中被算了两次, 边界异色边在 S 中被算了一次, 故 S 与边界异色边的数目 T 具有相同的奇偶性.

但每条边 V_iV_j 上异色边的数目为奇数, 因而 T 也是奇数, 矛盾!

设 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 为二维球面，称 (x, y, z) 与 $(-x, -y, -z)$ 互为对径点. 1933 年 Borsuk 证明了如下的

定理 (Borsuk-Ulam 定理)

设 $f: S^2 \to \mathbf{R}^2$ 是连续映射，则存在一对对径点处的 f 值相等，即存在 (x, y, z) 使得 $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$.

Borsuk-Ulam 定理有一个通俗的叙述：考虑地球表面上每个点的温度和气压，则存在一对对径点，它们的温度相同，气压也相同.

Borsuk-Ulam 定理也有一个组合版本.

定理 (Tucker 引理)

假设已将多边形 $A_1A_2\ldots A_{2020}$ 剖分成一些小三角形之并. 将所有小三角形的顶点标上 $\pm1,\pm2$ 这四个数之一, 要求边界上的标记是反对称的, 即点 A_i 与 A_{i+1010} 处标记的数是相反数. 不论如何做标记, 总存在剖分的一条边, 它两个端点的标记为相反数.

Tucker 引理的证明概要

用反证法，假设没有标号相反的边，则标号一负一正的边只有两种:$(-1) \leftrightarrow 2$ 边，或 $(-2) \leftrightarrow 1$ 边.

(1) 提取局部特征. 每个小三角形的顶点只能用 ± 1 至多一种，用 ± 2 至多一种，由此可得它的 $(-1) \leftrightarrow 2$ 边的条数为 0 或 2.

(2) 从局部到整体. 对局部特征求和，令 S 等于所有小三角形的 $(-1) \leftrightarrow 2$ 边数目的总和，则由 (1) 知 S 是偶数.

(3) 过渡到边界上. 注意到每条内部 $(-1) \leftrightarrow 2$ 边在 S 中被算了两次，边界 $(-1) \leftrightarrow 2$ 边在 S 中被算了一次，故 S 与边界上 $(-1) \leftrightarrow 2$ 边的数目 T 具有相同的奇偶性.

Tucker 引理的证明概要

最后来计算边界上 $(-1) \leftrightarrow 2$ 边的数目 T.

将边界分成上半边界 $L_0 = A_1 A_2 \dots A_{1010}$ 与下半边界 $L_1 = A_{1011} A_{1012} \dots A_{2020}$. 设 L_0 上有 x 条 $(-1) \leftrightarrow 2$ 边, y 条 $(-2) \leftrightarrow 1$ 边. 由边界上的标号是反对称的, 可知 L_1 有 x 条 $(-2) \leftrightarrow 1$ 边, y 条 $(-1) \leftrightarrow 2$ 边.

由此可得 $T = x + y$, 即 T 等于 L_0 上两端一负一正的边的总数, 易知后者是奇数. 这与前述 T 与偶数 S 奇偶性相同矛盾!

在 Sperner 引理与 Tucker 引理的证明中，我们看到了相同的模式．用 D 表示整个剖分构成的几何区域 (三角形 $V_1V_2V_3$ 或多边形 $A_1A_2\dots A_{2020}$)，用 ∂D 表示其边界．

- 对每个小三角形 Δ 提取一个局部特征 $c(\Delta)$，计算 $\sum_{\Delta\in D} c(\Delta)$．
- 过渡到边界上．$\sum_{\Delta\in D} c(\Delta) = \sum_{e\in\partial D} \chi(e)$，这里 $\chi(e)$ 是边 e 的某种特征函数，比如在 Tucker 引理的证明中 $\chi(e)=1$ 当且仅当 e 是 $(-1)\leftrightarrow 2$ 边，否则 $\chi(e)=0$．
- 利用边界条件计算 $\sum_{e\in\partial D} \chi(e)$．

组合版本 Stokes 定理

1952 年, 华人数学家樊畿 (Ky Fan) 注意到上述第二步为

$$\sum_{\Delta\in D} c(\Delta) = \sum_{e\in\partial D} \chi(e),$$

将 D 内部的求和转化成 D 边界上的某种求和, 这与微积分中的 Stokes 定理非常相似. Stokes 定理为

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega,$$

将 D 内部的积分与 D 边界上的积分联系起来, 这是数学中最重要的定理之一.

Katz-Tao 不等式

1999 年, Katz 和陶哲轩建立了如下不等式, 并用它证明了 additive combinatorics 中的结果.

定理 (Katz-Tao 不等式)

给定 $n+1$ 个有限集合 $X, A_1, ..., A_n$, 以及 n 个映射 $f_i : X \to A_i (1 \le i \le n)$. 令

$$F = \{(x_1, ..., x_{n+1}) | x_1, ..., x_{n+1} \in X \text{ 且} f_i(x_i) = f_i(x_{i+1}), \forall 1 \le i \le n\},$$

则有如下不等式成立:

$$|F| \ge \frac{|X|^{n+1}}{|A_1| \cdot ... \cdot |A_n|}.$$

Katz-Tao 不等式的证明

Katz-Tao 原始的证明并不直接，他们先证明了一个较弱的版本，再用所谓的 tensor power trick 改进. 除此之外，人们对 Katz-Tao 不等式并没有找到完全初等的证明.

先考虑 $n = 1$ 的情形. 此时给定了 $f\colon X \to A$，要估计 $F = \{(x_1, x_2) | f(x_1) = f(x_2)\}$ 的元素个数. 令 $N(a) = \#\{x \in X | f(x) = a\}$，则 $|F| = \sum_{a\in A} N(a)^2$，$|X| = \sum_{a\in A} N(a)$. Katz-Tao 不等式为

$$\sum_{a\in A} N(a)^2 \geq \frac{\left(\sum_{a\in A} N(a)\right)^2}{|A|},$$

这恰好是 Cauchy-Schwartz 不等式.

Katz-Tao 不等式的证明

再看 $n=2$ 的情形. 对 $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$, 令

$$N(a_1) = \#\{x \in X | f_1(x) = a_1\}, \quad N(a_2) = \#\{x \in X | f_2(x) = a_2\},$$
$$N(a_1, a_2) = \#\{x \in X | f_1(x) = a_1, f_2(x) = a_2\},$$

则有

$$|F| = \sum_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} N(a_1) N(a_1, a_2) N(a_2),$$
$$|X| = \sum_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} N(a_1, a_2).$$

$n=1$ 版本的 Katz-Tao 不等式来自于 Cauchy 不等式，我们期望一般版本的 Katz-Tao 不等式可由推广的 Cauchy 不等式证明. Hölder 不等式恰是 Cauchy 不等式的推广:

$$\sum_i \alpha_i^{1/3}\beta_i^{1/3}\gamma_i^{1/3} \le \left(\sum_i \alpha_i\right)^{1/3}\left(\sum_i \beta_i\right)^{1/3}\left(\sum_i \gamma_i\right)^{1/3},$$

或者写成

$$\left(\sum_i \alpha_i\right)\left(\sum_i \beta_i\right)\left(\sum_i \gamma_i\right) \ge \left(\sum_i \alpha_i^{1/3}\beta_i^{1/3}\gamma_i^{1/3}\right)^3.$$

Katz-Tao 不等式的证明

这样，为了证明 $|F|\cdot|A_1|\cdot|A_2|\geq|X|^3$，只需把 $|F|,|A_1|,|A_2|,|X|$ 表示成 Hölder 不等式中所述的求和形式:

$$|F|=\sum_{a_1\in A_1,a_2\in A_2} N(a_1)N(a_1,a_2)N(a_2)\longleftrightarrow\sum_i\alpha_i$$

$$|A_1|=\sum_{a_1\in A_1,a_2\in A_2} ?\longleftrightarrow\sum_i\beta_i$$

$$|A_2|=\sum_{a_1\in A_1,a_2\in A_2} ?\longleftrightarrow\sum_i\gamma_i$$

$$|X|=\sum_{a_1\in A_1,a_2\in A_2} N(a_1,a_2)\longleftrightarrow\sum_i\alpha_i^{1/3}\beta_i^{1/3}\gamma_i^{1/3}$$

Katz-Tao 不等式的证明

在此期望下，不难试出如下表示，

$$|F| = \sum_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} N(a_1) N(a_1, a_2) N(a_2) \longleftrightarrow \sum_i \alpha_i$$

$$|A_1| = \sum_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} \frac{1}{N(a_1)} N(a_1, a_2) \longleftrightarrow \sum_i \beta_i$$

$$|A_2| = \sum_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} N(a_1, a_2) \frac{1}{N(a_2)} \longleftrightarrow \sum_i \gamma_i$$

$$|X| = \sum_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} N(a_1, a_2) \longleftrightarrow \sum_i \alpha_i^{1/3} \beta_i^{1/3} \gamma_i^{1/3}$$

验证这些等式是直接的. 这就证明了 $n = 2$ 版本的 Katz-Tao 不等式.

一般情形的 Katz-Tao 不等式也可类似的证明，留给大家思考.

Katz-Tao 不等式有如下的应用.

问题

设 $G = U \cup V$ 是二部分图，用 P 表示图 G 中长为 3 的道路的数目，要求道路的起点在 U 中. 求 P 的下界.

令 E 为边集，则有两个自然的映射 $l : E \to U, r : E \to V$，分别表示取一条边的左端点和右端点. 从 U 出发的长为 3 的道路可以描述为三元组 $(e_1, e_2, e_3) \in E^3$，要求满足 $r(e_1) = r(e_2)$，$l(e_2) = l(e_3)$. 这恰为 Katz-Tao 不等式中 F 的元素，由此可得

$$P = |F| \geq \frac{|E|^3}{|U| \cdot |V|}.$$

如果把二部分图 G 视为描述元素 $1, 2, \ldots, n$ 与集合 $A_1, \ldots, A_m$ 的归属关系图：i 与 A_j 在 G 中连边当且仅当 $i \in A_j$，则前述结果可叙述为如下问题.

例 (2018 年国家集训队试题)

给定正整数 m, n. 设 $A_1, ..., A_m$ 是 $\{1, 2, ..., n\}$ 的子集. 证明:

$$\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le j\le m}(|A_i|\cdot|A_i\cap A_j|)\ge\frac{(|A_1|+...+|A_m|)^3}{mn}.$$

对竞赛训练的探讨

最后，结合前面的讨论，我们谈谈对竞赛训练的一些设想. 这些设想不一定合理，作抛砖引玉之用.

- 对数学竞赛中学到的一些重要定理，要思考对这些定理还能问什么新的问题.
- 组织讨论活动，要求学生用简短的言语解释解法的关键想法. 过去几年在面试中，我们发现有些同学虽然会解题，但是不能用准确简洁的语言表达.
- 鼓励学生们交流讨论对问题的解法与对数学的认识，这样他们能很早见识到不同的思维方式.
- 鼓励学生学一点微积分. 数学竞赛里离散数学的内容过多，连续数学的内容很少，需要稍微中和一下. 另外也能让学生领略到理论框架的威力.
- 在完成数学竞赛的学习后，鼓励学生尽快接触和学习抽象代数的语言，培养整体的数学眼光.

致谢

谢谢大家!