数学竞赛命题漫谈

冷岗松[1] 熊斌[2]

(1. 上海大学, 200444; 2. 华东师范大学, 200241)

命题是数学竞赛活动中的关键.

命出一套高质量的试题, 是所有命题者的追求.

我们多年参加全国各类数学竞赛的命题活动, 深感命题是一项极富挑战性且极为艰巨的任务. 每次参加命题活动, 都有一种如履薄冰的感觉. 命题结束之后, 试题通过学生的检验, 总能发现一些瑕疵或不足, 成为"遗憾"的艺术, 留给后来者思考.

本文介绍我们参加数学竞赛命题活动的一些体会.

1. 什么是好的数学竞赛问题

数学的评判标准是: 它应当是自然的、合理的数学问题; 或许, 它应当还是优雅的数学问题 (结构对称, 表述简洁); 或许, 它应该具有一定的奇异性 (视角独特, 结果令人惊讶).

教育的评价标准是: 它首先必须是一个考试时间里可能被学生解决的问题; 它应当是难度适中、入口较宽、起点不太高 (要求的背景知识不能太多)、解答不太繁复的轻巧的数学问题.

我们不妨看一些例子.

题 1 (2017 年中国西部数学邀请赛, 张端阳供题) 设整数 $n \geq 2$, 证明: 对任意正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 都有

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{a_1, a_2, \cdots, a_i\} \cdot \min\{a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n\} \leq \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

此问题中 min 与 max 形成强烈对比, 富有美感, 且结果中系数是最优的.

题 2 (2019 年中国女子数学奥林匹克, 冷福生供题) 给定坐标平面上的平

修订日期: 2019-11-09.

行四边形 $OABC$, 设 O 是原点, A,B,C 都是整点(坐标都是整数). 证明: 对于$\triangle ABC$ 内部及边界上的任意整点 P, 存在$\triangle OAC$ 内部及边界上的整点 Q,R (可以相同), 使得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$.

该问题源于供题者科研中的副产品, 极富新意, 结果令人惊讶.

题 3 (2018 年春季 NSMO, 饶家鼎供题) 设 $n\in\mathbb{N}^*$ 不为 2 的幂. 证明: n^n 可以表示为

$$n^n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,$$

其中 a_i 为正整数, 且 $n\nmid a_i, i=1,2,\cdots,n$.

此问题形式优美, 简洁. 眼光"毒辣"、素以要求严格著称的余红兵教授认为这是一个 top 级的数论好题.

2. 什么是一套好的数学竞赛试卷

好的数学竞赛问题的堆砌, 未必是一套的好的数学竞赛试卷.

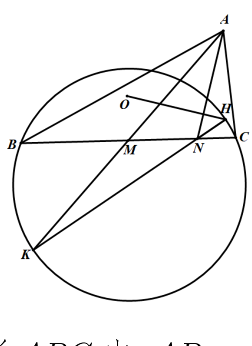
一套好的数学试卷, 必须有容易题、中等难度的题和难题, 内容上也需涵盖四大板块 (几何、代数、数论和组合). 又因为参赛的中学生水平参差不齐, 试卷除了选拔功能之外, 还必须照顾其中基础较弱的学生, 使他们的得分不能太低, 以免伤害他们学习数学的自信心. 这样, 试题的"搭配"和"组装"是一个复杂的系统工程. 时常只能"忍痛割爱", 去掉一些本身是很好的数学问题. 命题者必须有整体的眼光和大度.

下面我们点评一下 2019 年中国西部数学邀请赛试题.

2019 年中国西部数学邀请赛试题

1. 求所有的正整数 n, 使得 3^n+n^2+2019 是一个完全平方数.

(邹瑾 供题)



2. 如上图, 在锐角三角形 ABC 中, $AB>AC$, 点 O、H 分别为其外心和垂心, 点 M 为边 BC 的中点. 设 AM 的延长线与 $\triangle BHC$ 的外接圆交于点 K,

直线 HK 与 BC 交于点 N. 证明: 若 $\angle BAM=\angle CAN$, 则 $AN\perp OH$.

(张甲 供题)

3. 设 $S=\{(i,j)\mid i,j=1,2,\cdots,100\}$ 是直角坐标平面上的 100×100 个整点构成的集合. 将 S 中的每个点染为给定的四种颜色之一. 求以 S 中四个颜色互不相同的点为顶点, 且边平行于坐标轴的矩形个数的最大可能值.

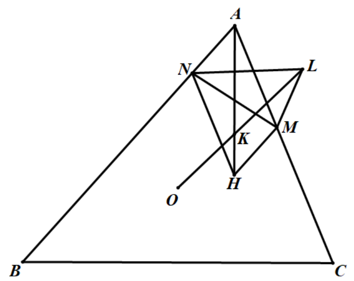
(瞿振华 供题)

4. 设 $n(n\geq 2)$ 是给定的整数. 求最小的实数 λ, 使得对任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$, 存在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\in\{0,1\}$, 满足: 对任意 $1\leq i\leq j\leq n$ 都有

$$\left|\sum_{k=i}^{j}(\varepsilon_k-x_k)\right|\leq\lambda.$$

(张端阳 供题)

5. 在锐角三角形 ABC 中, $AB>AC$, 点 O、H 分别为其外心和垂心. 过点 H 作 AB 的平行线交 AC 于点 M, 过点 H 作 AC 的平行线交 AB 于点 N. 设 L 为 H 关于 MN 的对称点, 直线 OL 与 AH 交于点 K. 证明: K、M、L、N 四点共圆.



(石泽晖 供题)

6. 设 $n(n\geq 2)$ 个正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$. 证明:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i+a_j)^2\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{j^2}\right)\geq 4(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{i^2}.$$

(王广廷 供题)

7. 证明: 对任意正整数 k, 至多存在有限个集合 T, 满足下列条件:

(1) T 由有限个素数组成;

(2) $\prod\limits_{p\in T}p\,\Big|\,\prod\limits_{p\in T}(p+k)$.

(羊明亮 供题)

8. 称形如 $\{x, 2x, 3x\}$ 的集合为“好的”. 对给定的整数 $n(n \geq 3)$, 问: 由 n 个正整数构成的集合最多能有多少个“好的”子集?

(羊明亮 供题)

这套试卷中的每个问题均不是陈题, 似乎也没有准陈题, 都是非常精致新颖的数学问题, 均经过供题者和命题者所有人员的反复讨论, 模块搭配合理. 总体来说, 这是一套很好的数学竞赛试卷. 但是这套试卷对于西部的学生来讲, 还是难度过大, 似乎更像一套 CMO 的试题.

上面的第六题是王广廷建立的 Bessel 积分不等式的离散版本. 其实, 他给出了难、中、易三种版本. 我们选择的是中等难度的版本, 从考试的结果来看, 得分率仅有 20.7%, 放在第六题的位置, 难度大了一些. 如果用下面容易的版本, 对于考试的效果可能是更好的:

设 $n(n \geq 2)$ 个正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. 求最大的实数 $\lambda(n)$ 使得:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j)\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right) \geq \lambda(n) \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}.$$

另外, 上面的第三题结果很难猜测, 是一道颇有难度的组合极值问题, 或许它和第四题换一下位置可能使第四题的得分率高一些, 这样难度设计更合理.

3. 陈题与准陈题

命题的大忌是出陈题和准陈题.

数学竞赛试题并不要求都是命题者原创. 恰恰相反, 把一些数学家前沿成果的初等衍生品作为竞赛试题, 可使现代数学的一些思想和方法通过数学竞赛这种方式传播, 这是很有意义的.

这里的所谓陈题, 就是国内外已往的数学竞赛试题中或中学数学竞赛资料出现过的问题. 它的一个衡量标准是有参赛的部分学生熟悉这个问题. 陈题通常也是好问题, 这也是它被反复发现和关注的原因. 但陈题最大的坏处有损公平性, 使得考试成绩客观上有“水分”, 从而影响数学竞赛的选拔功能和激励效果.

准陈题是指形式上稍有改变, 但本质上是陈题. 准陈题的副作用和陈题是一样的. 在命题过程中, 需要所有参加命题人员反复讨论, 以识别准陈题.

2014 年 USAMO 有这样一道题:

题 4 证明: 存在无穷点集 $\cdots, P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, \cdots$ 使得具有下面性质: 对任意三个不同的整数 a, b, c, P_a, P_b, P_c 共线当且仅当 $a + b + c = 2014$.

这个题实际上是一个准陈题, 它本质上和 2008 年 MMO (地中海数学奥林匹克) 中的下面试题相同:

题 5 是否存在平面上两个无穷点列 $A_1, A_2, \cdots$ 和 $B_1, B_2, \cdots$, 使得对任意 i, j, k, $1 \le i < j < k$,

(1) B_k 在直线 A_iA_j 上当且仅当 $k = i + j$;

(2) A_k 在直线 B_iB_j 上当且仅当 $k = i + j$.

这个问题还可以另外的稍微一般的形式写出, 它也是一个准陈题:

题 6 求所有的实系数多项式 P, 使得对任意满足和为 0 的实数 x, y, z, 有 $(x, P(x)), (y, P(y))$ 和 $(z, P(z))$ 三点共线.

当然, 在训练同学的时候, 把这三个问题放在一起, 让学生提炼出结论: 在次数大于 1 的多项式中仅有三次多项式有三点共线结构, 也是有趣的讨论话题.

4. 难度评估

命题活动中一个很有技术含量的重要工作就是难度评估.

取舍问题并形成一套试卷时, 难度的考量是一个重要因数. IMO的难度控制一般来说是成功的, 这取决于它的选题流程: 首先组委会根据各国领队的打分评估, 把代数、组合、几何与数论四类预选题的每一类分为简单、中等、难题三档, 然后全体领队投票现选出两个简单问题, 再投票选出两个难题, 最后投票产生两个中等题.

难度评估必须注意下面的一些要点:

1) 换位分析难度; 命题者必须站在学生的角度, 从学生拥有的知识结构和解题手段出发, 分析问题中的难点.

2) 新颖度和复杂度是决定难度的两大要素; 如果问题的解题方法不是常规手段, 要求有创新的话, 这样的题往往是难题. 复杂的计算和步骤往往也会增大难度, 使学生望而止步.

3) 方法的单一和多样是影响难度的要素; 一般来说, "华山一条路", 方法单一的题, 难度较大. 方法多样的题往往容易一些. 因此命题者寻求试题的多种解法, 对评估难度是很有作用的.

4) "棘手"的难度排序; 一套试卷按照难度递增排序是十分必要的, 这样可以大大提高学生的解题效率. 但这是一项困难的工作, 我们必须把每个题的难点进行分拆比较. 大多数考试结束之后, 命题组的难度评估和学生考试结果所反映的, 往往有一定的差距. 为使这种误差尽量小, 细致的分析和讨论十分必要!

5. 命题队伍建设

命题还是一项系统工程. 一些固定的大型比赛, 要一年一年命出高质量的试题, 必须有一支相对固定的高水平的命题队伍. 命题成员不但应是某个领域 (代数, 平面几何, 组合与数论) 的专家, 还应是数学竞赛活动的热爱者, 有心人, 平时注重问题的积累, 并怀谦卑之心主动接触和了解中学数学教学现状, 了解自己的服务对象——中学生.

大多数初次参加数学竞赛命题的年轻人, 即使他有很好的数学研究素养, 对命题工作还是生疏的, 甚至认为从经典的大学数学教材中照搬一些初等漂亮结论便可作为试题, 但事实上, 这些结论早已被作为数学竞赛试题使用过. 因此, 命题工作者也需要一个培养和锻炼的过程.

裘宗沪先生很早就重视命题队伍的建设. 从 2001 年开始, 他创建西部数学竞赛时, 就定位西部竞赛的两大功能: 一是给西部的数学资优生提供一个交流平台, 二是锻炼年轻的命题队伍. 因此, 前几届他请来了著名数学家潘承彪先生担任命题主试委员会主任. 正是在裘先生和潘先生的鼓励和指导下, 当年参加命题的一些年轻人从眼光、素养、技术上都获得了长足的进步.

提高在命题工作中学教师的参与度, 这是十分重要的. 西部竞赛一直邀请优秀的中学教师参加命题工作, 现在他们逐渐成为命题工作的主体. 事实证明, 他们命出的试题质量特别高, 因为倾注了大量的时间和精力, 这些问题都是他们"打磨"出来的精品. 特别值得一提的是, 华东师范大学国际数学奥林匹克中心连续十年举办命题研讨会, 被称为数学奥林匹克中的"武林大会", 广泛邀请一线的中学老师参与交流, 大大提升了中学老师命题的兴趣和水平, 产生了一大批高质量的问题.

6. 命题活动的定量分析

数学竞赛命题活动需要不断总结经验, 发现不足. 或许, 建立一个长期定量分析机制是十分必要的.

邹瑾对西部数学邀请赛的难度和质量做过多年的研究, 其中有不少定量的分析. 但是其他的国内数学竞赛未有这方面的工作, 今后值得尝试和探索.

7. 两种命题方法

常见的两种命题方法是:

1) **引用型命题法**

顾名思义, 引用型命题就是从一些数学家的前沿数学研究论文和专著中选

取其中的初等结论(某个引理和定理), 将其叙述初等化和趣味化, 有时还需稍加改造. 这种命题方法的好处是: 首先产生的问题一般不是陈题, 即新颖性有保证; 其次可普及一些现代数学的知识和方法, 对开阔学生视野大有裨益; 第三个好处是省事、省力, 命题者可享受“拿来”的快乐.

下面我举一个例子:

题 7 (2018 年国家队选拔考试) 设实数 $\lambda \in (0,1)$, n 是正整数. 证明: 多项式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k(n-k)}x^{k}$$

的每个根的模都为 1.

这是著名物理学家杨振宁－李政道上世纪 40 年代一文中结果的简化版本, 由姚一隽教授提供、瞿振华教授修改而成.

遗憾的是, 引用型命题时常派不上用场, 因为前沿研究论文中可用作考试题的独立的初等结果是可遇而不可求的. 我们有时在美国数学会的数据库中折腾多日, 最后还是两手空空. 这时只能用小科研制作方法命题了.

2) **科研型命题方法**

科研型命题方法通常是选择一个有意义的问题 (通常要求有好的研究背景), 像做科研一样, 通过研究其新的解法, 通过改变观察角度, 通过反向思维等不断演化出新问题.

如果我们选择的源问题是已有的数学竞赛试题, 我们研究的步伐必须走的足够的“远”, 最好是从题面到方法都完全有别于原来的问题.

下面我举一个例子说明.

2011 年, Rom Dis 考试中有下面的:

题 8 设 z_1,z_2,z_3,z_4 是 4 个模为 1 的复数, 且满足 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$. 证明: z_1,z_2,z_3,z_4 中必有两个的和为零.

我们把和为零的 n 个复数, 叫做一个 n 元规范组; 这个结果说明单位圆上的任何 4 元规范组, 一定存在两个对径元. 我们进行了如下的思考:

思考 1: 单位圆上的 n 元规范组一定有对径元吗?

当 $n>4$ 时, 我们可以构造没有两个对径元的 n 元规范组. 这就产生了下面的问题.

题 9 求最大的正整数 $n\,(n\geq 3)$ 使得单位圆上的任意满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i=0$ 的复数

$z_1, \cdots, z_n$ 中存在 $z_i, z_j\ (1 \leq i < j \leq n)$ 使得 $z_i + z_j = 0$.

思考 2: 一般中心对称的平面曲线上的规范四点组一定有对径元吗?

首先考察 p 圆 $A_p = \{(x, y) \mid |x|^p + |y|^p = 1\}$, 特别地, $p = 2$ 即为通常的单位圆; $p = +\infty$ 为正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

尝试后, 我们发现正方形上的规范四点组不一定有对径点. 但是对于一般 p 圆 A_p, 又构造不出反例. 对比单位圆和正方形的差异: 前者严格凸, 后者非严格凸. 这促使我们直接考虑一般的严格凸的封闭的对称曲线. 最终产生了

题 10 设 K 是一个关于原点中心对称的严格凸的平面封闭曲线, $z_1, z_2, z_3, z_4 \in K$ 满足 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, 证明存在 $z_i, z_j\ (1 \leq i < j \leq 4)$, 使得 $z_i + z_j = 0$.

这个问题已经是一个十分新颖的高难度的数学竞赛问题了.