

数学新星问题征解

第四十一期 (2021.07)

主持: 张端阳

第一题. 求所有的奇素数 p , 使得存在大于 1 的整数 a, b , 满足

$$2^a + 2 = p^b + p.$$

(浙江省慈溪中学学生 孙中伟 供题)

第二题. 已知四边形 $ABDC$ 外切于圆 Γ , Γ_1, Γ_2 是过 B, C 的两个圆, 且均与 Γ 内切, 切点分别为 E, F . 求证: 直线 AF, DE, BC 交于一点.

(温州育英国际实验学校学生 林逸沿 供题)

第三题. 求所有的集合对 (A, B) , 满足 $A, B \subseteq \mathbb{N}$, 且对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在唯一的 $a \in A, b \in B$, 使得 $n = a + b$.

(深圳中学学生 彭也博 供题)

第四题. 设非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = n$. 记

$$\sum_{i=1}^n \frac{\max\{a_i, a_{i+1}\}}{1 + \min\{a_i, a_{i+1}\}}$$

的最小可能值为 $f(n)$, 其中 $a_{n+1} = a_1$. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\ln n}$.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)