第三十九期问题征解解答与点评

张端阳

第一题 求所有的正整数 n, 使得对任意 n 次首一实系数多项式 P, 只要 $P^{(2)}$ 有 n^2 个不同的非正实根, 就有对每个正整数 m, $P^{(m)}$ 有 n^m 个不同的实根. 这里 $P^{(m)}$ 表示 P 的 m 次迭代.

(北京大学学生 杨泓暕 供题)

解 (根据供题者的解答整理):

所求为 1 及全体正偶数.

先证明对这些 n 结论成立.

$n=1$ 时显然, 下设 n 为正偶数.

因为 $P^{(2)}$ 有 n^2 个不同的实根, 故 P 有 n 个不同的实根 $x_1<x_2<\cdots<x_n$, 且 $P(x)=x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 各有 n 个不同的实根. 由 P 首一知 P 在 $(x_n,+\infty)$ 上单调递增, 且 $P(x)\to+\infty(x\to+\infty)$.

若 $x_n>0$, 由介值定理, $P(x)=x_n$ 在 $(x_n,+\infty)$ 上有一实根, 与 $P^{(2)}$ 的实根皆非正矛盾. 因此 $x_n\le 0$, 进而 P 的实根皆非正.

设 P 在区间 $I_k=[x_{2k-1},x_{2k}]$ 上的最小值为 $m_k<0(k=1,2,\cdots,\frac{n}{2})$, 记 $M=\max\{m_1,m_2,\cdots,m_{\frac{n}{2}}\}$. 对 $y_0\in(M,0]$, 由介值定理及函数单调性, 知 $P(x)=y_0$ 在每个 I_k 上恰有两个不同的实根, 从而共有 n 个不同的实根. 另一方面, 若 $P(x)=y_0$ 有 n 个不同的实根, 则 $y_0>M$. 取 $y_0=x_k(k=1,2,\cdots,n)$, 知 P 的实根皆在 $(M,0]$ 中.

下面对 m 归纳证明 $P^{(m)}$ 在 $(M,0]$ 中有 n^m 个不同的实根.

当 $m=1$ 时, 上面已证. 假设 m 时成立, 来看 $m+1$ 时的情形.

由归纳假设, $P^{(m)}(x)=0$ 有 n^m 个实根 $M<y_1<y_2<\cdots<y_{n^m}\le 0$. 由上述分析知 $P(x)=y_k(k=1,2,\cdots,n^m)$ 各有 n 个不同的实根, 且这些根皆在 $(x_1,0]\subseteq(M,0]$ 中. 而对不同的 k, 这些实根显然互不相同, 故合并起来便给出 $(M,0]$ 中 n^{m+1} 个不同的实根.

归纳证毕.

下设 $n>1$ 为奇数, 来构造反例.

设 $P(x)=(x+t)(x+2t)\cdots(x+nt)$, 我们说明可以选取 $t>0$ 符合要求.

设 P 在区间 $[-2kt,-(2k-1)t]$ 上的最小值为 $m_k(t)<0(k=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2})$, 记 $M(t)=\max\{m_1,m_2,\cdots,m_{\frac{n-1}{2}}\}$.

设 $g(t)=M(t)+nt$, 则由诸 m_k 连续知 g 亦连续.

因为对任意 $-1\le x\le 0$, $(x+\frac{1}{n})(x+\frac{2}{n})\cdots(x+1)>-1$, 所以 $g(\frac{1}{n})>0$.

另一方面, 对 $k=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}$, $P(-(2k-\frac{1}{2})t)$ 是关于 t 的 $n>1$ 次多项式, 且由 n 是奇数知最高次项系数为负. 于是在 t 充分大时, 对每个 k,

$$m_k(t)+nt\le P\left(-(2k-\frac{1}{2})t\right)+nt<0,$$

故在 t 充分大时 $g(t)<0$.

由介值定理, g 存在正的零点. 我们可以取 g 的零点中的最大者（这是因为闭集 $\{0\}$ 的原像仍闭, 且 g 的零点有上界）, 记为 t_0, 那么当 $t>t_0$ 时便有 $g(t)<0$.

设 $Q(x)=P(x)-x$, 由于 $n>1$ 且 n 是奇数, Q 在 $(-\infty,-nt)$ 上恰有一个实根, 记为 $x_0=x_0(t)$. 设 $h(t)=M(t)-x_0(t)$, 则 h 连续, 且

$$h(t_0)=M(t_0)-x_0(t_0)=-nt_0-P(t_0)>0.$$

故存在 $t_1>t_0$ 使得 $h(t_1)>0$, 我们证明取 $t=t_1$ 即满足要求.

由函数的单调性及 $M(t_1)<-nt_1$, 模仿证明部分的分析知 $P(x)=-kt_1$ 有 n 个不同的非正实根 $(k=1,2,\cdots,n)$, 故 $P^{(2)}$ 的确有 n^2 个不同的非正实根.

另一方面, 我们归纳定义数列 $\{a_m\}$ 如下：$a_1=-nt_1$, 对 $m>1$, a_m 定义为 $P(x)=a_{m-1}$ 的最小实根（特别地, a_m 为 $P^{(m)}$ 的实根）. 由 n 是奇数知定义良好.

通过归纳法不难证明 $a_{m-1}>a_m>x_0(t_1)$, 因此 $\{a_m\}$ 为单调递减的有界数列, 故其极限存在, 设为 L. 在 $P(a_m)=a_{m-1}$ 两边同时取极限知 $P(L)=L$, 结合 $L<a_1=-nt_1$ 及 x_0 的取法可知 $L=x_0(t_1)$. 由 t_1 的取法知 $x_0(t_1)<M(t_1)<-nt_1$, 故存在正整数 N, 使得 $a_N<M(t_1)$. 再次模仿证明部分的分析知 $P(x)=a_N$ 没有 n 个不同的实根, 因此 P 的确是我们需要的反例. □

评注 (1). 本题的过程很长, 但核心思想是简单的: 条件决定了 P 的零点分布和单调性, 因而迭代中的根是否齐全只与根的分布范围相关, 由此不难猜到答案并给出证明. 另一方面, 构造部分有一定难度, 除构造的感觉外, 还要求较

高的定性分析功底.

(2). 人大附中郑云兮同学指出, 当 n 是奇数时, 可以选取恰当的实数 s,t, 使得对于

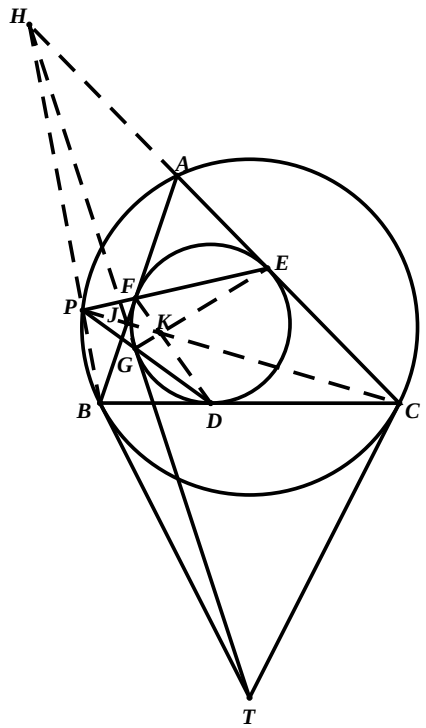
$$P(x)=(x+s+t)(x+s+2t)\cdots(x+s+nt),$$

$P^{(2)}$ 有 n^2 个不同的非正实根, 而 $P^{(3)}$ 的不同实根少于 n^3 个.

第二题 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Ω, 内切圆为 ω, ω 与 BC,CA,AB 分别切于点 D,E,F. 延长 EF 交 Ω 于点 P, 直线 PD 分别与 ω,Ω 交于点 G,Q. 设 Ω 在 B,C 处的切线交于点 T. 证明: (1) TG 是 ω 的切线; (2) $\frac{PQ}{DG}=\frac{R+r}{r}$, 其中 R,r 分别是 Ω,ω 的半径.

(法国再保险公司北京分公司 陈舜 华东师范大学 罗振华 供题)

证明 (根据南昌市第二中学李嘉睿、于沣林同学的解答整理):



(1) 设 ω 在 G 处的切线与直线 AB,AC 分别交于点 J,H.

设 K 是 DF 与 EG 的交点, 则 H,P,B 都在 K 关于 ω 的极线上, 因此它们共线.

同理, J,P,C 共线.

对圆内接六边形 $BBPCCA$ 用帕斯卡定理得, H,J,T 共线, 从而 TG 是 ω 的切线.

(2) 记 $\angle PDB=\theta$, 则

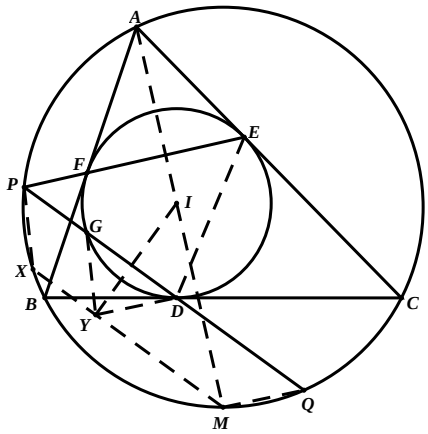
$$\angle DPE=\angle PDB+\angle FBD-\angle BFP=\theta+B-(90^\circ-\frac{A}{2})=\theta+\frac{B-C}{2}.$$

在 $\triangle PDE$ 中,

$$PD=DE\cdot\frac{\sin\angle PED}{\sin\angle DPE}=2r\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin(90^\circ-\frac{B}{2})}{\sin(\theta+\frac{B-C}{2})}=\frac{2r\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin(\theta+\frac{B-C}{2})}.$$

于是

$$\begin{aligned}DQ=&\frac{BD\cdot DC}{PD}=\frac{r\cot\frac{B}{2}\cdot r\cot\frac{C}{2}}{\frac{2r\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin(\theta+\frac{B-C}{2})}}=\frac{r\sin(\theta+\frac{B-C}{2})}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\\=&2R\sin\frac{A}{2}\sin\left(\theta+\frac{B-C}{2}\right).\end{aligned}$$



设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, 延长 AI 交 Ω 于点 M, 过 M 作 PQ 的平行线交 Ω 于点 X, 作 $IY\perp XM$ 于 Y.

因为

$$\begin{aligned}YM=IM\cos\angle AMX&=2R\sin\frac{A}{2}\cos\left(C+\frac{A}{2}-\theta\right)\\&=2R\sin\frac{A}{2}\sin\left(\theta+\frac{B-C}{2}\right)=DQ,\end{aligned}$$

所以四边形 $DYMQ$ 是平行四边形, 于是 $DY=QM$. 又 $PX=QM$, 且由 IY 垂直平分线段 GD, 知 $GY=DY$, 所以 $PX=GY$. 于是四边形 $PXYG$ 是平行四边形, 从而 $PG=XY$.

这样,

$$PG+DQ=XY+YM=XM=2R\sin\theta.$$

又 $DG=2r\sin\theta$, 所以

$$\frac{PQ}{DG}=\frac{PG+DG+DQ}{DG}=\frac{2R\sin\theta+2r\sin\theta}{2r\sin\theta}=\frac{R+r}{r}.\qquad\square$$

评注 (1). 北京师范大学附属实验中学张晟宁等同学也给出了本题的正确解答.

(2). 点 P 的其他性质在第八期征解第三题和第 60 届 IMO 预选题 G6 中有所涉及.

第三题 求最大的实数 λ, 使得对任意正整数 n 和正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 都有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max\{i,j\} x_i x_j\right) \geq \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4.$$

(人大附中学生 邹明轩 供题)

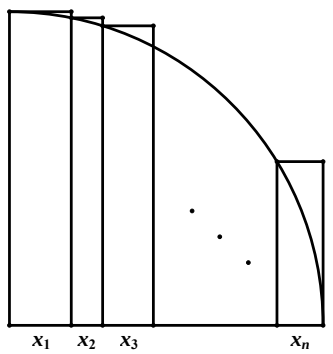
证明 (根据供题者的解答整理):

由齐次性, 不妨设 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max\{i,j\} x_i x_j &= \sum_{i=1}^{n} i x_i^2 + 2\sum_{1\leq j<i\leq n} i x_i x_j \\ &= n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(1-(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1})^2\right).\end{aligned}$$

于是由柯西不等式,

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max\{i,j\} x_i x_j\right) \\ =&\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(1-(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1})^2\right)\right) \\ \geq&\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{1-(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1})^2}\right)^2.\end{aligned}$$



如图, 构造半径为 1 的四分之一圆以及 n 个矩形. 其中对 $1 \le i \le n$, 第 i 个矩形的宽为 x_i, 高为 $\sqrt{1-(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1})^2}$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sqrt{1-(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1})^2}$$

即为 n 个矩形的面积之和. 由图知, n 个矩形的面积之和不小于四分之一圆的面积 $\frac{\pi}{4}$, 故

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max\{i,j\} x_i x_j\right) \ge \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16},$$

即当 $\lambda = \frac{\pi^2}{16}$ 时不等式成立.

另一方面, 对 $1 \le i \le n$, 取 $x_i = \cos\frac{i\pi}{2n}$.（可将 x_n 加上一个充分小的正实数以使之为正实数, 为了叙述方便, 统一写成余弦的形式, 不影响结果）

当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos\frac{i\pi}{2n} \to \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}, \\
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos^2\frac{i\pi}{2n} = \frac{1}{2n}\left(n + \sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{n}\right) \\
&\to \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

又

$$\sum_{j=1}^{i-1} x_j = \sum_{j=1}^{i-1} \cos\frac{j\pi}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{(2i-1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} - 1\right),$$

所以

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4n}}\sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{(2i-1)\pi}{4n} - \frac{2}{\sin\frac{\pi}{4n}}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{(2i-1)\pi}{4n} + n\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{n}{2\sin^2\frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4n}} + n\right).
\end{aligned}$$

于是当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max\{i,j\} x_i x_j \\
&= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right)^2 \\
&\to \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2(\frac{\pi}{4})^2} = \frac{2}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

故在

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max\{i,j\}x_ix_j\right)\geq\lambda\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^4$$

两边同时令 $n\to\infty$ 得,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi^2}\geq\lambda\left(\frac{2}{\pi}\right)^4,$$

解得 $\lambda\leq\frac{\pi^2}{16}$.

综上, 所求最大值为 $\frac{\pi^2}{16}$. □

评注 杭州学军中学周箴言、北京师范大学附属实验中学张晟宁等同学给出了本题正确的证明, 但构造不正确.

第四题 对正整数集的非空有限子集 I, 用 $l(I)$ 表示 I 中所有元素的最小公倍数. 设 n 是大于 1 的整数, k 是不超过 n 的素数的个数. 设 A 是 $\{2,3,\cdots,n\}$ 的非空子集, 记 $B=\{l(I)\mid I\subseteq A,I\neq\emptyset,l(I)\leq n^2\}$. 求证: 存在 $C\subseteq B$, 使得 $|C|\geq\frac{2}{k+1}|B|$, 且 C 中元素两两不互素.

(华东师范大学第二附属中学学生 王一川 供题)

证明 (根据人大附中陈锐韬同学的解答整理):

设不超过 n 的 k 个素数为 $p_1,p_2,\cdots,p_k$.

对 $1\leq i\leq k$, 定义集合

$$C_i=\{b\in B\mid p_i\mid b\},\quad D_i=\{b\in B\mid b\text{ 是 }p_i\text{ 的幂}\}.$$

显然 C_i 中元素两两不互素, 记 $|D_i|=d_i$.

一方面, 证明 $\max\limits_{1\leq i\leq k}|C_i|\geq d_1+d_2+\cdots+d_k$.

若 $d_1=d_2=\cdots=d_k=0$, 结论显然成立.

若存在 i 使 $d_i\neq0$, 不妨 $d_1\neq0$, 我们证明 $|C_1|\geq d_1+d_2+\cdots+d_k$.

事实上, 此时 A 中存在 p_1 的幂, 设为 p_1^α.

对任意 $d\in D_i,i>1$, 设 $l(I)=d$, 则 $d\in I$, 进而 $d\in A$, 特别地 $d\leq n$. 因为

$$l(\{d,p_1^\alpha\})=p_1^\alpha d\leq n^2,$$

所以 $p_1^\alpha d\in C_1$, 故

$$\{p_1^\alpha d\mid d\in D_i,i>1\}\subseteq C_1.$$

又显然 $D_1\subseteq C_1$, 所以 $|C_1|\geq d_1+d_2+\cdots+d_k$.

另一方面, 考虑 $|C_1|+|C_2|+\cdots+|C_k|$.

计算每个 $b\in B$ 的贡献, 即 b 属于多少个 C_i, 这恰为 b 的素因子个数. 因此当 $b\in D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_k$ 时贡献为 1, 否则贡献至少为 2. 故

$$k\max_{1\le i\le k}|C_i|\ge|C_1|+|C_2|+\cdots+|C_k|\ge 2|B|-(d_1+d_2+\cdots+d_k).$$

综合两方面, $\max\limits_{1\le i\le k}|C_i|\ge\dfrac{2}{k+1}|B|$, 命题得证. $\square$