一个双二次型不等式问题的充要条件

黄嘉俊

(北京大学, 100187)

文 [1] 证明了如下定理:

定理 1 设 $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ 为正实数, $n \geq 3$ 为整数. 则不等式

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j a_i a_j \leq \frac{1}{4} b_{n-1} b_n$$

对任意满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ 的非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 成立的充要条件是

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{b_j} \leq \frac{n-k}{b_k} \tag{1}$$

对任意的 $k \in \{1, 2, \cdots, n-2\}$ 成立.

本文给出了上述定理的一个改进. 下面定理中的 (3) 式与 (1) 式中 $k = n-2$ 时的条件等价.

定理 2 设 $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ 为正实数, $n \geq 3$ 为整数. 则不等式

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j a_i a_j \leq \frac{1}{4} b_{n-1} b_n \tag{2}$$

对任意满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ 的非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 成立的充要条件是

$$b_{n-2} \leq \frac{b_{n-1} b_n}{b_{n-1} + b_n}. \tag{3}$$

证明 首先证明必要性.

取

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-3} = 0,\ a_{n-2} = 2t,\ a_{n-1} = a_n = \frac{1}{2} - t, 0 < t < \frac{1}{2}.$$

此时 (1) 式即为

$$2t\left(\frac{1}{2} - t\right) b_{n-2} b_{n-1} + 2t\left(\frac{1}{2} - t\right) b_{n-2} b_n + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 b_{n-1} b_n \leq \frac{1}{4} b_{n-1} b_n,$$

修订日期: **2020-06-15.**

合并同类项两端再同除以 t 得

$$2\left(\frac{1}{2}-t\right)b_{n-2}b_{n-1}+2\left(\frac{1}{2}-t\right)b_{n-2}b_{n-1}\le\frac{4-t}{4}b_{n-1}b_n,$$

令 $t\to 0^+$ 得, $b_{n-2}(b_{n-1}+b_n)\le b_{n-1}b_n$, 必要性得证.

下证充分性. 记

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_{n-2},T=a_{n-1},U=a_n,$$

则 $S+T+U=1$. 易知

$$\sum_{1\le i<j\le n-2}a_ia_j\le\frac{(n-3)S^2}{2(n-2)}.\tag{4}$$

由 b_i 的单调性和 (3) 式知

$$b_i\le\frac{b_{n-1}b_n}{b_{n-1}+b_n},\ \forall 1\le i\le n-2.$$

结合 (4) 式, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n-2}b_ib_ja_ia_j&\le\left(\frac{b_{n-1}b_n}{b_{n-1}+b_n}\right)^2\sum_{1\le i<j\le n-2}a_ia_j\\&\le\left(\frac{b_{n-1}b_n}{b_{n-1}+b_n}\right)^2\frac{(n-3)S^2}{2(n-2)}\\&\le\left(\frac{b_{n-1}b_n}{b_{n-1}+b_n}\right)^2S^2.\end{aligned}$$

其中最后一个式子利用了 $\frac{n-3}{2(n-2)}\le 1,\forall n\ge 3$. 又注意到,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-2}b_ia_{n-1}b_{n-1}a_i+\sum_{i=1}^{n-2}b_ia_ib_na_n&\le\left(\sum_{i=1}^{n-2}\frac{b_{n-1}b_n}{b_{n-1}+b_n}a_i\right)(b_{n-1}T+b_nU)\\&=S\cdot\frac{b_{n-1}b_n}{b_{n-1}+b_n}(b_{n-1}T+b_nU)\\&=b_{n-1}b_n\frac{b_{n-1}ST+b_nSU}{b_{n-1}+b_n}.\end{aligned}$$

故要证明 (2) 式只需证:

$$\frac{b_{n-1}b_n}{(b_{n-1}+b_n)^2}S^2+\frac{b_{n-1}ST+b_nSU}{b_{n-1}+b_n}+TU\le\frac{1}{4}$$

事实上,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(S+T+U)^2-\frac{b_{n-1}b_n}{(b_{n-1}+b_n)^2}S^2-\frac{b_{n-1}ST+b_nSU}{b_{n-1}+b_n}-TU\\=&\frac{(b_{n-1}-b_n)^2}{4(b_{n-1}+b_n)^2}S^2+\frac{b_n-b_{n-1}}{2(b_{n-1}+b_n)}ST+\frac{b_{n-1}-b_n}{2(b_{n-1}+b_n)}SU+\frac{1}{4}(T-U)^2\\=&\frac{(b_{n-1}-b_n)^2}{4(b_{n-1}+b_n)^2}S^2+\frac{(b_n-b_{n-1})(T-U)}{2(b_{n-1}+b_n)}S+\frac{1}{4}(T-U)^2\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{b_n - b_{n-1}}{2(b_{n-1} + b_n)} S + \frac{1}{2}(T - U) \right)^2 \geq 0.$$

充分性得证. □

参考文献

[1] 林逸沿, 刘胤辰. 一个双二次型不等式问题 [J], 数学新星网 · 学生专栏, 2021-06-15 期.