眼光与尺度

——数学竞赛命题漫谈

冷岗松

上海大学数学系

2021 年 6 月 · 江西吉安

1) 美国社会对数学竞赛的主流看法

- 选拔数学英才 (教育通道);
- 普及和宣传数学;
- 数学文化建设的一部分;

2) 美国数学竞赛活动一览

- 全国性的比赛 (MAA 主办): AMC, AIME, USAMO, USAJMO, Putnam Competition, Mathcounts (全国初中数学竞赛).
- 大学举办的竞赛: HMMT (哈佛–麻省数学竞赛), PUMaC (普林斯顿大学数学竞赛), BMT (伯克利数学竞赛) 等.
- 地区数学竞赛: 纽约数学竞赛, 湾区数学竞赛等.
- 学术团体举办的主办的竞赛: BLMO, USAEMO.

- 美国有影响的数学竞赛应该不少于 50 个, 其中 AoPS 上列出了三十多个.
- 美国每年约 20 万人参加 AMC; 中国每年约 5 万人参加全国联赛.

3) 中美每年初等数学新题的数量比较

- 数学竞赛活动产生的新题, 中美数量之比约为 1 : 5.
- 数学期刊产生的新题:
  - Amer. Math. Monthly (美国数学月刊)
  - Math. Mag. (数学杂志)
  - College Math. J. (大学数学杂志)
  - Math Horizons (数学视野)
  - Math Relf. (数学映象)

  中美每年期刊产生的新题数量之比为 1 : 20.

综合, 中美每年产生的新题数量比约为 1 : 10 (乐观估计).

4) 美国的数学写作奖

美国数学会 (MAA) 每年奖励阐述性、普及性的数学写作:

- Chauvenet 奖, 奖励一篇杰出的文章.
- Halmos-Ford 奖, 美国数学月刊或数学杂志.
- Carl B. Allendoerfer 奖, 数学杂志.
- George Pólya 奖, 大学数学杂志.
- Trevor Evans 奖, 数学视野.
- Merten M. Hesse 青年作者奖, 任一 MAA 期刊.
- 欧拉图书奖, 可能提高公众视野的数学书籍.

5) 两道美国数学竞赛问题欣赏

题 1 (2020 USAMO)

设 $n \geq 2$, $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$, 使得

$$0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

且

$$1 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2.$$

证明:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - x_i y_{n+1-i}) \geq \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

- David Speyer 和 Kedlaya 供题, 后者是我们熟知的著名数学家.
- 这是排序不等式的加强版本.

题 2 (2020 美国湾区数学竞赛)

设 a, b 为非负整数, S 为球面 Ω 上 $a+b+3$ 个点的集合, 其中任意四点不共面. 求有多少个平面经过 S 中三点, 使得其将 S 中剩余的点分为一侧 a 个点, 一侧 b 个点?

- 这是一个优美的组合几何问题.
- 尹顺, 王琇证明了它等价于如下的平面问题:

  设 T 为平面上 $a+b+3$ 个点的集合, 其中任意四点不共面, 任意四点不共圆. 称 T 的一个三元子集是好的, 如果经过这三点的圆的内部恰有 T 中 a 个点或 b 个点. 求好的三元子集数目.

- 原题难度很大, 估计考场上没有人能做出来, 或许用上述平面版本作为考试试题更合适.

1) 数学家的眼光, 教育家的尺度

这既是评价标准, 也是我们命题过程中应当遵循的原则.

- **数学家的眼光包括:**

  (1) 是否是自然的数学问题;

  (2) 是否是新颖的数学问题;

  (3) 是否是简洁的数学问题;

  (4) 是否是有背景的数学问题;

  (5) 是否是有独特视野的数学问题.

- **教育家的尺度指:**

  (1) 是否是适合中学生的数学问题;

  (2) 是否是难度合适的数学问题.

- **值得注意还有:**

  (1) 了解中学生的知识结构和能力;

  (2) 命题过程中需要常做换位思考;

  (3) 尺度实际上是数学和教育相结合的综合评价.

- **实例**

题 3 (2016 以色列 TST)

设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, P 是定义九点圆的九个点的凸包, 求

$$F = \frac{S_P}{S_{\triangle ABC}}$$

的最优上下界.

- 用组合的观点来观察九点圆, 视野独特, 令人惊艳!
- 整个问题几何是内核, 同时包含组合和分析的想法.
- 难度相当于全国联赛二试中较难的平面几何题.
- 提供了一种组合和几何相结合的提问模式.

2) 陈题与准陈题

数学竞赛试题并不要求都是命题者原创的, 但要努力避免陈题和准陈题.

- 陈题是指国内外数学竞赛或竞赛常用资料中出现过的问题.
- 准陈题是指形式上稍有改变, 但本质上还是陈题.
- 陈题与准陈题具有教育功能:

  (1) 陈题往往是好题 (被反复选用);

  (2) 编制准陈题可以深化对问题的认识.

- **实例**

题 4 (2014 USAMO)

证明: 存在无穷点集 $\cdots$, P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, $\cdots$ 使得具有下面性质: 对任意三个不同的整数 a, b, c, P_a, P_b, P_c 共线当且仅当 $a+b+c=2014$.

该问题本质上和 2008 年 MMO (地中海数学奥林匹克)中的下面试题相同, 是一个准陈题.

题 5 (2008 MMO)

是否存在平面上两个无穷点列 A_1, A_2, $\cdots$ 和 B_1, B_2, $\cdots$ 使得对任意 i, j, k, $1\leq i<j<k$, 满足
(1) B_k 在直线 A_iA_j 上当且仅当 $k=i+j$.
(2) A_k 在直线 B_iB_j 上当且仅当 $k=i+j$.

这个问题还可以用另外稍微一般的形式写出, 它也是一个准陈题:

题 6 (2012 蒙古 TST)

求所有的实系数多项式 P, 使得对任意满足和为 0 的实数 x, y, z, 有 $(x, P(x))$, $(y, P(y))$ 和 $(z, P(z))$ 三点共线.

在训练学生时, 往往把上述三个问题(题 4, 5, 6)放在一起, 让学生提炼出结论:

> 在次数大于 1 的多项式中仅有三次多项式有三点共线结构.

进一步可以提出如下三次曲线上的正方形问题 (前苏联赛题) 与学生讨论:

> 设 a, b, c 为实数, 已知恰有一个正方形的所有顶点都在三次曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 之上. 求该正方形的边长.

3) 至关重要的第一题

裘宗沪先生说:“在一套试卷中, 第一题是至关重要的”.

- **为什么第一题这么重要?**

  (1) 是大多数学生能做的, 是部分学生仅能做的;

  (2) 最影响考试心理;

  (3) 漂亮的第一题常常是教学中的热点, 对非竞赛的学生也有启发性.

- **什么是好的第一题?**

  (1) 容易而不俗 (新颖且有趣);

  (2) 得分率高但不送分;

  (3) 入口较宽.

- **漂亮的第一题举例** (仅限于新星测试题):

题 7

设 z_1, z_2, z_3, z_4 是 4 个模为 1 的复数, 且满足 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. 证明: z_1, z_2, z_3, z_4 中必有两个的和为零.

余红兵 供题

80% 的同学做对此题.

该问题有四种不同证法.

结论可以推广到中心对称的严格凸的平面封闭曲线上.

题 8

设整数 $n \geq 2$. 求最大的实数 $\lambda = \lambda(n)$ 使得

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j)\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right) \geq \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}$$

对任意满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 的正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 成立.

王广廷 供题

85% 的同学做对此题.

该问题以著名积分不等式作为背景.

方法多样且都是学生必须掌握的代数技巧.

题 9

给定正整数 $n \geq 2$. 对 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $1 \leq i \leq n$, 用 x_i 表示以 a_i 为首项的递增子列的长度的最大值, 用 y_i 表示以 a_i 为首项的递减子列的长度的最大值. 求 $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ 的最小可能值.

张端阳 供题

45% 的同学做对此题.

该问题源于对 Erdös-Szekeres 定理的思考.

这是一个组合型代数问题, 方法多样.

题 10

设 x, y, z 是非零复数, 求

$$F = \min\left\{\frac{|x-y|}{|z|}, \frac{|y-z|}{|x|}, \frac{|z-x|}{|y|}\right\}$$

的最大值.

43% 的同学做对此题.

该问题有物理背景.

可以用几何或复数方法求解.

- **如何选择第一题?**

下面以 2021 五一 NSMO 第一题产生的过程举例说明. 首先, 有如下四个预选问题:

(1) $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, 是平面上任意两个单位向量, 求

$$\sup_{|\vec{v}|=1}\left\{\left|\vec{v}\cdot\vec{v_1}\right|\cdot\left|\vec{v}\cdot\vec{v_2}\right|\right\}.$$

(2) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为实数满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1.$$

证明:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} c_i c_j \geq \frac{1}{4},$$

其中, $c_i = a_i b_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

(3) 在有限集的集族 $\mathcal{F}$ 中, 定义

$$d(A,\ B) = |A \Delta B|, \quad A,\ B \in \mathcal{F}.$$

证明:

$$d(A,\ B) \leq d(A,\ C) + d(C,\ B),$$

其中$A,\ B,\ C \in \mathcal{F}$.

(4) 设

$$f(n) = \frac{1}{n+1}(n!)^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

证明: $f(n)$ 是一个减函数.

讨论实录:

i) 首先去掉第三题.

第三题说明了对称差是一个度量, 是经典且有意义的结论. 但有人指出, 在近期的试题中有一个关于对称差的问题用到过这个结论, 故该题是一个准陈题, 首先被淘汰.

ii) 其次去掉第四题.

先看第四题的证明.

证明. 记 $a_n = n(\log(n+1) - \log(n))$, 则

$$a_n = \log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

递增, 故

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

也递增.

但

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} r(\log(r+1)-\log r) \\
&= \log(n+1) - \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\log r \\
&= \log\frac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}.
\end{aligned}
$$

故 $f(n)$ 是一个减函数. □

评析. 该问题是新颖的且叙述简单.

$(n!)^{\frac{1}{n}}$ 的单调性是一个著名的问题, 故该问题有很好的背景.

有人质疑是否可直接比较 $f(n+1)$ 和 $f(n)$ 的大小, 经尝试后发现很难完成.

进一步, 我们评估上面证法的难度. 该问题用到两个常用结论:

(1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 是单调递增的.

(2) 若一个正数序列 $\{a_n\}$ 递增, 则 A_n 递增.

这两个结论对大多数中学生来说是有难度的, 而 a_n 的构造是最大的难点, 大多数中学生可能难以完成 (尽管构造有合理性).

综上, 该问题的难度远远超过第一题的难度, 因此淘汰该题.

iii) 再次去掉第二题.

第二题是由老题演变出的新面孔, 实质上的新意不够.

如果没有更好的选择是可以作为第一题的, 故这里被淘汰.

iv) 最后选用第一题.

问题新颖、简洁、优雅.

结论对任意的二维复内积空间都成立, 刻画了方向余弦的极值性质, 有很好的研究背景.

方法多样, 难度不大. 大多数学生能够完成, 但是学生认识的深浅决定了解题的耗时 (最终有 86% 的同学最对此题, 但在半个小时内仅有大约 20% 的同学完成该题).

综上, 大家一致认为第一题可以选用. 再修改题面, 最终产生:

题 11

求最大的实数 c, 使得对平面上任意两个单位向量 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, 均存在单位向量 $\vec{v}$, 满足

$$\left|\vec{v} \cdot \vec{v}_1\right| \cdot \left|\vec{v} \cdot \vec{v}_2\right| \geq c.$$

胡珏伟 供题

三. 从新证明到新发现

- 好的新的解法常常能诱导新发现、新结果.
- 2015 年阿贝尔奖得主尼伦伯格 (Nirenberg) 曾说过:

  如果这个问题令我印象深刻, 我就会开始思考是否能找到更好的证明. 我的想法或许能找到更好的证明, 甚至导出崭新的东西.

- 下面内容取材于 冷岗松, 熊斌, 吴尉迟 文章的预印本:

  从新证明到新发现

  —— 一个代数不等式的研讨实录

原始问题 (Mathematical Reflections, 2019.6)

设整数 $n \geq 2$, 实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 1$ 是正实数且满足 $a_1 a_2 \cdots a_n = 2^n$. 则

$$a_1 + \cdots + a_n - \frac{2}{a_1} - \cdots - \frac{2}{a_n} \geq n.$$

Marin Chirciu 供题

- 该征解题大约有十三位读者提交了解答. 编辑选发的解答是由 Danied Lasaosa 提供的, 利用 Lagrange 乘子法求解, 技巧性较强.

- 两个新证明

(1) **王一川的证法**如下(概要):

首先利用“切线法”证明引理:

对实数 $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, 有

$$2x - \frac{1}{x} - 1 \geq 3 \ln x.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \frac{2}{a_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\left(3 \cdot \ln \frac{a_i}{2} + 1\right) = n.$$

$\square$

(2) **韩新淼的证法**如下(概要):

首先利用代数变形证明引理:

设 $1 \le a < 2 < b$, 则

$$a + b - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} \ge 1 + \frac{ab}{2} - \frac{4}{ab}.$$

用归纳法证明原题.

不妨设 $1 \le a_{n-1} < 2 < a_n$. 令 $t = \frac{1}{2}a_{n-1}a_n$, 则 $t \in [1, \infty]$.

由归纳假设知,

$$a_1 + \cdots + a_{n-2} + t - \frac{2}{a_1} - \cdots - \frac{2}{a_{n-2}} - \frac{2}{t} \ge n - 1.$$

又由引理知,

$$a_{n-1} + a_n - \frac{2}{a_{n-1}} - \frac{2}{a_n} \ge 1 + t - \frac{2}{t}.$$

将上两式相加便得结果.

- **两个等价形式**

第一等价形式:

设正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ 满足 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, 则

$$a_1 + \cdots + a_n - n \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n\right).$$

第二等价形式:

设正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ 满足 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, 则

$$a_1 + \cdots + a_n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \frac{1}{2} n.$$

- **两个新结果**

定理 1 (解尧平)

$n \geq 2$. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正实数使得 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, 则

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n \geq \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n\right).$$

这是第一等价形式的加强版本.

证明使用截断技巧构造有界闭集, 再用调整法.

定理 2 (黄嘉俊)

设 $n \geq 2$ 为整数且实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$ 且 $a_i \geq c$, 其中 c 为小于 1 的正常数. 若不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} + (1 - \lambda) n$$

对任意正整数 n 和满足条件的 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均成立, 则 λ 的最大值为 $\frac{c - \ln c - 1}{c^{-1} + \ln c - 1}$.

这是第二等价形式的加强版本.

证明篇幅较长, 这里仅介绍如下关键的引理.

引理 (由黄嘉俊猜测, 蔡霞悻证明)

设 $c \in (0,1)$ 是常参数, 令

$$f(y) = \frac{cy + c^{-y} - y - 1}{c^{-1}y + c^{y} - y - 1},$$

则 f 在 $(0,\infty)$ 上单调递增.

- **推广研究范围**

由定理 1 的形式, 联想到著名的 **Gabriel-Calin** 不等式.

定理 3 (Gabriel-Calin 不等式)

设 $n \geq 2$ 为整数且实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 \cdots a_n = 1$. 则:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - n \geq \frac{2n}{n-1}\sqrt[n]{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n).$$

原证明的思路为归纳法加调整. 技巧性强, 篇幅较长.

证明概要:

不妨设 $a_n = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. 记左右两边之差为 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 令 $G_{n-1} = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$. 下面证明:

(1) $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geq f(G_{n-1}, \cdots, G_{n-1}, a_n)$.

(2) $f(G_{n-1}, \cdots, G_{n-1}, a_n) \geq 0$.

- **两个新证明**

(1) **颜川皓**的证明思路:

通过截断方法排除平凡的情形, 再利用条件将定义域限制在有界闭集上, 保证 f 存在极小值. 这样利用 Lagrange 乘数法便可以得到极值点的结构, 从而证明结论.

(2) **依嘉**的证明思路:

通过截断将 a_i 的定义域限制在有界闭集上, 保证存在最小值. 再固定 $a_i a_j$, 此时要证不等式左端与右端之差是 $a_i + a_j$ 二次函数, 利用其性质可以得到最小值点的特征.

- **系数的最优性讨论**

观察: Gabriel-Calin 不等式右边的系数 $\frac{2n}{n-1}\sqrt[n]{n-1}$ 不是最优的.

自然的问题: 问不等式右边最优的系数是什么?

这就产生了如下两个定理:

定理 4 (解尧平)

若整数 $n \geq 2$. 正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, 则

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - n \geq 2\left(1 + \frac{(n-1)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n-1}}\right)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n).$$

定理 4 是原问题的加强, 但系数仍不是最优的.

下面是 Gabriel-Calin 不等式的最优系数的版本.

定理 5 (解尧平)

设正整数 $n \geq 2$, $f_n(x) = x^{2n} - 2nx^{n+1} + 2nx^n + nx^2 - 2nx + n - 1$, 则

(1) 当 $n \geq 3$. 方程 $f_n(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内存在唯一解 t_n. 记 $\lambda_n = \frac{t_n^2+1}{t_n}$. 特别地, 约定 $\lambda_2 = 1$, 则 $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$.

(2) 若正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的积为 1. 则

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - n \geq 2\lambda_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n),$$

且常数 $2\lambda_n$ 是最优的. 取等条件为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (1, 1, \cdots, 1)$ 或 $(t_n^{-1}, \cdots, t_n^{-1}, t_n^{n-1})$ 及其轮换.

四. 参考文献

- [1] 熊斌, 丁玖, 天赋之才该如何培养? 中美两国数学资优教育之比较, 发表于 **返朴** , 2021. 1. 23.
- [2] 冷岗松, 熊斌, 数学竞赛漫谈, 将刊于 **数学竞赛60周年**.
- [3] 冷岗松, 熊斌, 吴尉迟, 从新证明到新发现 — 一个代数不等式的研讨实录, 待发表.
- [4] Gangsong Leng, Bin Xiong, The Art of Proposing Problems in Mathematics Competitions I, 将刊于 **Mathematics Competitions**.
- [5] Gangsong Leng, Bin Xiong, The Art of Proposing Problems in Mathematics Competitions II, 将刊于 **Mathematics Competitions**.

谢谢大家!