2021 年上海新星春季数学奥林匹克试题解析

吴尉迟　胡珏伟　冷岗松

2021 年上海新星春季数学奥林匹克于 2021 年 4 月 15 日 8 点到 12 点在上海举行. 下面介绍此次考试的试题和解答. 不当之处, 敬请读者批评指正.

题 1 给定整数 $n \geq 2$. 对 1, 2, $\cdots$, n 的一个排列 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 及 $1 \leq i \leq n$, 用 x_i 表示以 a_i 为首项的递增子列的长度的最大值, 用 y_i 表示以 a_i 为首项的递减子列的长度的最大值. 求 $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ 的最小可能值.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

解 先证明对 $1 \leq i \leq n-1$, $x_i = y_i$ 与 $x_{i+1} = y_{i+1}$ 不能同时成立.

事实上, 当 $a_i < a_{i+1}$ 时, $x_i > x_{i+1}, y_i \leq y_{i+1}$, 所以 $x_i - y_i > x_{i+1} - y_{i+1}$; 当 $a_i > a_{i+1}$ 时, $x_i \leq x_{i+1}, y_i > y_{i+1}$, 所以 $x_i - y_i < x_{i+1} - y_{i+1}$. 这样,

$$|x_i - y_i| + |x_{i+1} - y_{i+1}| \geq 1.$$

故

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

另一方面, 当 $n = 2k$ 时, 考虑 $1, 2, \cdots, 2k$ 的排列

$$k+1, k, k+2, k-1, k+3, k-2, \cdots, 2k, 1.$$

此时 $x_1 = k, y_1 = k+1, x_2 = y_2 = k, \cdots, x_{2k-1} = 1, y_{2k-1} = 2, x_{2k} = y_{2k} = 1$, 因此 $\sum\limits_{i=1}^{2k} |x_i - y_i| = k$.

当 $n = 2k+1$ 时, 考虑 $1, 2, \cdots, 2k+1$ 的排列

$$k+1, k, k+2, k-1, k+3, k-2, \cdots, 2k, 1, 2k+1.$$

此时 $x_1 = y_1 = k+1, x_2 = k+1, y_2 = k, \cdots, x_{2k} = 2, y_{2k} = 1, x_{2k+1} = y_{2k+1} = 1$, 因此 $\sum\limits_{i=1}^{2k+1} |x_i - y_i| = k$.

修订日期: 2020-05-13.

综上, 所求最小值为 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. □

评注 本题源于对下述 Erdös-Szekeres 定理的思考:

任意由 n^2+1 个不同实数构成的序列, 均存在长度至少为 $n+1$ 的单调子序列.

此题作为第一题不算容易, 考试中约45% 的同学做对. 此题可以对较小的 n 进行尝试, 容易猜出答案和构造. 在论证部分, 将相邻两项 $|x_i-y_i|, |x_{i+1}-y_{i+1}|$ 作为一组讨论, 证明其不能同时为 0.

题 2 设 T 是 n 个顶点的树. 证明: 可以用 1, 2, $\cdots$, n 将 T 的顶点编号, 使得任意一边的两个顶点编号之差的绝对值不超过 $\frac{n}{2}$.

(华东师范大学 吴尉迟 供题)

证明 对 n 归纳证明原命题.

$n=1$ 时显然.

$n \geq 2$ 时, 假设 $(n-1)$ 时结论成立.

任取 T 中度为 1 的点 u, 从 T 中去掉 u 得到树 T'. 设 $uv \in E(T)$, 由归纳假设, 可将 T' 的点标 $1, 2, \cdots, n-1$, 任一边两端差 $\leq \frac{n-1}{2} \leq \frac{n}{2}$.

若 v 标数 $\geq \frac{n}{2}$, 将 u 标 n 即可.

若 v 标数 $< \frac{n}{2}$, 将 u 标 0, 再将所有点标数均 $+1$ 即可.

由归纳法知原题得证! □

评注 此题是较为容易的图论题, 考试中约52% 的同学做对. 上述解法中, 归纳的关键点是选取度为 1 的点 v, 先对其补图编号, 再对 v 的邻点标号分类讨论, 利用平移不变性得到结论.

题 3 给定整数 $n \geq 4$. 求最大的实数 λ, 使得对任意满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ 的非负实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 均有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq \frac{1}{4} - \lambda m M,$$

其中 $a_{n+1}=a_1$, $m=\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $M=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

解 1 将原题齐次化可知, 原题等价于求最大的实数 λ, 使得对任意的非负

实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 均有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - \lambda m M.$$

对大于1 的实数 t, 取 $a_1 = a_2 = t, a_3 = \cdots = a_n = 1$. 此时 $m = 1, M = t$, 所以

$$t^2 + 2t + (n-3) + \lambda t \leq \frac{1}{4}(2t + (n-2))^2,$$

即

$$(2+\lambda)t + (n-3) \leq (n-2)t + \frac{1}{4}(n-2)^2.$$

令 $t \to +\infty$ 得, $2 + \lambda \leq n - 2$, 故 $\lambda \leq n - 4$.

下面证明, 对任意非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 均有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} + (n-4) m M \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

由轮换对称性, 不妨设 $M = a_n$. 再对 $1 \leq i \leq n$, 记 $b_i = a_i - m \geq 0$. 则只需证明

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i + m)(b_{i+1} + m) + (n-4) m M \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} (b_i + m)\right)^2,$$

即

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} b_i b_{i+1} + 2m \sum_{i=1}^{n} b_i + n m^2 + (n-4) m (m + b_n)\\ \leq &\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 + \frac{1}{2} n m \sum_{i=1}^{n} b_i + \frac{1}{4} n^2 m^2,\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{4}(n-4)^2 m^2 + \frac{1}{2}(n-4)\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i - b_n\right) m + \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i b_{i+1} \geq 0.$$

当 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i \geq b_n$ 时, 熟知

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} b_i b_{i+1},$$

所以上式成立.

当 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i < b_n$ 时, 我们证明 $\triangle \leq 0$, 即证

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i - b_n\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i + b_n\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} b_i b_{i+1},$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} b_i b_{i+1} \leq b_n \sum_{i=1}^{n-1} b_i,$$

这等价于

$$\sum_{i=1}^{n-2} b_i b_{i+1} \leq b_n \sum_{i=2}^{n-2} b_i,$$

即

$$\left(b_1+b_3\right) b_2+\sum_{i=3}^{n-2} b_i b_{i+1} \leq b_n b_2+b_n \sum_{i=3}^{n-2} b_i.$$

由 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i<b_n$ 即证. 综上, 所求最大值为 $n-4$. □

解 2 (根据杭州二中叶临风解答整理) $\lambda \leq n-4$ 的证明同解 1.

下面证明 $\lambda=n-4$ 时结论成立, 有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq \frac{1}{4}-(n-4) m M.$$

(1) $n=4$ 时, 由于$n-4=0$, 而

$$a_1 a_2+a_2 a_3+a_3 a_4+a_4 a_1=\left(a_1+a_3\right)\left(a_2+a_4\right) \leq (\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2})^2 \leq \frac{1}{4},$$

故不等式成立.

(2) $n \geq 5$ 时. 先看下面引理.

引理 记 $f(a, b, c, d, e)=a b+b c+c d+d e$, 则当 $a \leq e$ 时, 有

$$f(a, b, c, d, e) \leq f(a, m, c, b+d-m, e),$$

其中 $m \leq \min \{a, b, c, d, e\}$.

事实上, 这仅需 $(e-a)(b-m) \geq 0$, 显然成立.

回到原题. 由轮换对称性, 不妨设 $a_1=m$, 记一次调整 f 为一次操作, 则操作把连续五个数中较小一端的旁边一个数变成 m. 第一次对 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 操作, 由于 a_1 是最小的, 故 a_2 变为 m; 第二次对 a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 操作, 由于 a_2 已被调为 m, 是最小的, 故 a_3 变为 m, 如此进行下去, 直至对 $a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_1$ 操作 (此时 $a_{n-3}=a_1=m$), 把 a_{n-2} 调为 m. 操作结束 (也可能只操作一次).

考察操作的性质.

(i) 此时除了 a_{n-1}, a_n, 其余数均为 m, 且所有数的和仍为 1.

(ii) 记此时最大数为 M', 则 $M' \geq M$.

这时由于 $b+d-m \geq \max \{b, d\}$, 故操作后五个数的最大值不减. 回原题, 由操作的性质知 LHS 不减, RHS 不增. 记 $a_{n-1}=x, a_n=y$, 不妨设 $x \geq y$, 则只需证

$$x y+m(x+y)+(n-3) m^2 \leq \frac{1}{4}-(n-4) m x,$$

其中 $x+y+(n-2)m=1$, 代入 $y=1-(n-2)m-x$, 整理, 知原不等式等价于

$$x^2+2\left(m-\frac{1}{2}\right)x+\left(m-\frac{1}{2}\right)^2=\left[x+\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]^2\geq 0.$$

显然成立. $\square$

解 3 $\lambda\leq n-4$ 的证明同解 1.

下面证明 $\lambda=n-4$ 时结论成立.

不妨设 $a_1=M$, 再设 $a_k=\max\{a_3,\cdots,a_{n-1}\}$. 注意到

$$\begin{aligned}&a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{n-1}a_n\\=&(a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{k-1}a_k)+(a_ka_{k+1}+\cdots+a_{n-1}a_n)\\\leq& a_k(a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\cdots+a_n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a_1(a_2+a_n)\\=&a_1(a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\cdots+a_n)\\&-a_1(a_3+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\cdots+a_{n-1})\\\leq& a_1(a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\cdots+a_n)-(n-4)mM.\end{aligned}$$

所以由均值不等式,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}&=a_1(a_2+a_n)+(a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{n-1}a_n)\\&=(a_1+a_k)(a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\cdots+a_n)-(n-4)mM\\&\leq\frac{1}{4}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2-(n-4)mM\\&=\frac{1}{4}-(n-4)mM.\end{aligned}$$

综上, 命题得证. $\square$

解 4 $\lambda\leq n-4$ 的证明同解 1.

下面证明 $\lambda=n-4$ 时结论成立.

对 $1\leq i\leq n$, 记 $b_i=a_i-m\geq 0$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=1-nm$, 进而

$$\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}=\sum_{i=1}^{n}(b_i+m)(b_{i+1}+m)=\sum_{i=1}^{n}b_ib_{i+1}+2m(1-nm)+nm^2.$$

熟知存在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集 I, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}b_ib_{i+1}\leq\left(\sum_{i\in I}b_i\right)\left(\sum_{i\notin I}b_i\right).$$

不妨设 $M=a_n$ 且 $n\in I$, 并记 $S=\sum\limits_{i\in I}b_i$, 则 $M\leq S+m$.

这样,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1}+(n-4)mM\\
=&\sum_{i=1}^{m} b_i b_{i+1}+2m(1-nm)+nm^2+(n-4)mM\\
\le& S(1-nm-S)+2m(1-nm)+nm^2+(n-4)m(S+m)\\
=& S(1-4m-S)+2m-4m^2\\
\le& \left(\frac{1}{2}-2m\right)^2+2m-4m^2=\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

综上, 命题得证. □

解 5 (根据陈舜老师的解答整理) $\lambda \le n-4$ 的证明同解 1.

下面证明 $\lambda=n-4$ 时结论成立. 注意到这等价于证明

$$
\sum_{i=1}^{n}(M-a_i)(a_{i+1}-m)-(M+m)+4mM+\frac{1}{4}\ge 0.
$$

不妨设 $m=a_1, M=a_k$, 则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(M-a_i)(a_{i+1}-m)\ge \sum_{i=1}^{k-1}(M-a_i)(a_{i+1}-m)\\
=&(M-m)(a_2-m)+(M-a_{k-1})(M-m)+\sum_{i=2}^{k-2}(M-a_i)(a_{i+1}-m).
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
(M-a_i)(a_{i+1}-m)&=(M-a_{i+1})(a_i-m)+(a_{i+1}-a_i)(M-m)\\
&\ge (a_{i+1}-a_i)(M-m),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(M-a_i)(a_{i+1}-m)\\
\ge& (M-m)(a_2-m)+(M-a_{k-1})(M-m)+\sum_{i=2}^{k-2}(a_{i+1}-a_i)(M-m)\\
=& (M-m)^2.
\end{aligned}
$$

故只需证明

$$
(M-m)^2-(M+m)+4mM+\frac{1}{4}\ge 0,
$$

这等价于 $\left(M+m-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$, 成立! □

评注 此题是经典不等式

$$
\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \ge \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1}
$$

的强化版本, 是中等偏难的代数题, 考试中约 15% 的同学做对此题.

本题的难点之一是猜测 λ 的最大值, 可通过对常见的最优情形的分布进行尝试, 得到在两点分布时是最优的.

论证部分也有一定难度. 在论证部分, 解法 1, 将 m 看成主元, 将问题转化为一元二次函数恒大于 0 的问题; 解法 2 通过巧妙的调整, 将其中 $n-2$ 个变量调整至 m , 这样便可转化为单变元的情形; 解法 3 体现了最值 $n-4$ 的个数意义; 解法 4 借用了经典不等式的证明过程; 解法 5 将 a_i 都转化为 M,m, 放缩的过程十分巧妙.

题 4 在某个合成水果小游戏中, 水果有一系列品种 S_1, S_2, $\cdots$. 游戏的操作规则是: 对任意正整数 i, 可以将两个水果 S_i 合成一个水果 S_{i+1}, 也可以将三个水果 S_i 合成一个水果 S_{i+2}. 对正整数 n, 已知篮子 B_n 装有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个水果: n 个 S_1, $n-1$ 个 S_2, $\cdots$, 1 个 S_n. 证明: 可以通过适当操作, 将 B_n 中的所有水果最终合成一个水果.

(浙江大学 张洪申 华东师范大学 何忆捷 供题)

证明 1 定义水果 S_k 的价值为 $2^{k-1}, k=1,2,\cdots$. 对任意正整数 i, 记 f_i 是将两个 S_i 合成一个 S_{i+1} 的操作, g_i 是将三个 S_i 合成个 S_{i+2} 的操作.

易知, 一次操作 f_i 使水果的总价值增加 $2^i-2\cdot 2^{i-1}=0$, 一次操作 g_i 使水果的总价值增加 $2^{i+1}-3\cdot 2^{i-1}=2^{i-1}$. 设一开始篮子 B_n 中的水果的总价值为 W_n, 则

$$W_n=2^0\cdot n+2^1\cdot(n-1)+\cdots+2^{n-1}\cdot 1,$$
$$2W_n=2^1\cdot n+2^2\cdot(n-1)+\cdots+2^n\cdot 1,$$

所以

$$W_n=2W_n-W_n=-n+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-n-2.$$

为将 B_n 中的所有水果合成一个水果, 可通过以下两个步骤来实现目标:

(i) 对 B_n 中的水果适当操作, 使水果的总价值变为 2 的方幂;

(ii) 将总价值为 2^m (m 为非负整数) 的水果合成一个价值为 $2^{m'}$ 的水果.

对于步骤 (i), 由于 $W_1=1, W_2=4$, 故当 $n=1,2$ 时, 步骤 (i) 已完成.

当 $n=3$ 时, 水果 S_1,S_2,S_3 各有 3, 2, 1个, 可依次进行操作 g_1,f_2,g_3, 此时水果的总价值变为 2^4 (只有一个水果 S_5).

当 $n=4$ 时, 水果 S_1,S_2,S_3,S_4 各有 $4,3,2,1$ 个, 可依次进行操作 f_1,f_1,g_2,

f_2, g_3, f_4, f_5, 此时水果的总价值变为 2^5.

当 $n \geq 5$ 时, 注意到 $n+2 \leq 2^{n-2}-1 = 2^0+2^1+\cdots+2^{n-3}$, 可将 $n+2$ 表示为 $n+2 = a_1 \cdot 2^0 + a_2 \cdot 2^1 + \cdots + a_{n-2} \cdot 2^{n-3}$, $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2} \in \{0,1\}$. 由于一开始 B_n 中的水果 $S_1, S_2, \cdots, S_{n-2}$ 各有至少3 个, 故对 $i = 1, 2, \cdots, n-2$, 可分别进行 a_i 次操作 g_i, 在这些操作下, 水果的总价值变为

$$W_n + a_1 \cdot 2^0 + a_2 \cdot 2^1 + \cdots + a_{n-2} \cdot 2^{n-3} = W_n + (n+2) = 2^{n+1}.$$

以上给出了步骤 (i) 的完成方式.

再考虑步骤 (ii).

对总价值为 2^m 的水果, 尽可能地进行操作 $f_i (i = 1, 2, \cdots)$, 显然这样的操作只能做有限次, 且保持水果的总价值不变, 故存在某个时刻无法再进行任何操作 $f_i (i = 1, 2, \cdots)$, 这意味着此时各水果的品种两两不同.

设这些水果分别为 $S_{i_1}, S_{i_2}, \cdots, S_{i_r}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_r)$, 则有

$$2^{m''} = 2^{i_1-1} + 2^{i_2-1} + \cdots + 2^{i_r-1}.$$

由二进制表示的唯一性, 可知 $r = 1, m = i_1 - 1$, 从而这些水果被合成一个价值为 $2^{m'}$ 的水果 S_{m+1}, 步骤 (ii) 完成. 综上, 结论得证. □

证明 2 (根据历城二中欧瑜的解答整理)

先用归纳法证下面引理:

引理 设 $m \geq 2$, 可以将 2 个 S_1, 2 个 S_2, $\cdots$, 2 个 S_m 合成 S_{m+2}.

证明 当 $m = 2$ 时, 可做如下操作:

$$(S_2, S_2, S_1, S_1) \to (S_2, S_2, S_2) \to S_4.$$

假设 $m (m \geq 2)$ 时成立, 考虑 $m+1$ 时的情形. 由归纳假设, 可将 2 个 S_1, 2 个 S_2, $\cdots$, 2 个 S_m 合成 S_{m+2}, 此时再将 2 个 S_{m+1} 合成一个 S_{m+2}. 此时, 剩余两个 S_{m+2}, 将这两个合成 S_{m+3} 即可. 引理得证.

回到原题. 当 $n = 1$ 时, 只有一个水果, 结论成立.

当 $n = 2$ 时, 可做如下操作: $(S_2, S_1, S_1) \to (S_2, S_2) \to S_3$.

当 $n = 3$ 时, 可做如下操作:

$$(S_3, S_2, S_2, S_1, S_1, S_1) \to (S_3, S_2, S_2, S_3) \to (S_3, S_3, S_3) \to S_5.$$

下面证明: 若 $n (n \geq 3)$ 时结论成立, 则 $n+2$ 时结论也成立.

由归纳假设, 首先可将 B_{n+2} 中的 n 个 S_1, $n-1$ 个 S_1, $\cdots$, 1 个 S_n 合成 S_{n+2}.

此时, 篮子中剩 2 个 S_{n+2}, 2 个 $S_{n+1}, \cdots$, 2 个 S_1, 由引理知这些水果可以合成一个 S_{n+4}.

由归纳原理知命题得证! $\square$

评注 此题是中等难度的组合题, 考试中约 25% 的同学做对此题.

解法 1 采用赋值方法, 这里用 2 的幂次赋值, 其好处是可以保持 f_i 变换下赋值之和不变, 在 g_i 变换下赋值之和单增. 利用归纳法证明赋值之和可以最终变为 2 的幂, 这样由 2 进制表示的唯一性便得结果.

解法 2 是一个妙解. 考试中不少同学尝试用步长为 1 的归纳法证明, 但均未做出. 若改用步长为 2 的归纳法, 即跳跃归纳法, 问题便可以迎刃而解.

题 5 设 $\sigma(n)$ 表示正整数 n 的正约数之和, A_n 是 $\sigma(n)$ 的不同素因子构成的集合, B_n 是 n 的不同素因子构成的集合. 证明: 对任意正整数 k, 存在正整数 m, 使得 $|A_m \setminus B_m| = k$.

(温州知临中学 杨浩泽 供题)

证明 1 取 k 个互不相同的奇素数 $p_1, p_2, \cdots, p_k$, 则对任意正整数 $i, 1 \leq i \leq k$, 由 $(2, p_i) = 1$, 及 p_i 为素数, 结合 Fermat 小定理, 有

$$2^{p_i-1} \equiv 1 \pmod{p_i}, \ \ i = 1, 2, \cdots, k.$$

取 $t = \prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)$, 则由上式知 $2^t \equiv 1 \pmod{p_i}$, 即 $p_i \mid 2^t - 1 (i = 1, 2, \cdots, k)$.

取 $m_1 = 2^{t-1}$, 有

$$\sigma(m_1) = 1 + 2 + \cdots + 2^{t-1} = 2^t - 1.$$

所以

$$p_i \in A_{m_1} (i = 1, 2, \cdots, k), B_{m_1} = \{2\},$$

由 $p_1 \geq 3$, 知 $t - 1 > 0$. 故 $|A_{m_1} \setminus B_{m_1}| \geq k$.

我们定义如下操作构造数列 $\{m_j\}$: 第 j 次操作, 对 $\{m_j\}$:

若 $|A_{m_j} \setminus B_{m_j}| \geq 1$, 则取 $A_{m_j} \setminus B_{m_j}$ 的一个元素 q_j, 取 $m_{j+1} = m_j \cdot q_j$,

若 $|A_{m_j} \setminus B_{m_j}| = 0$, 则终止操作.

由 $q_j \in A_{m_j} \setminus B_{m_j}$, 知 $(q_j, m_j) = 1$, 所以

$$B_{m_{j+1}} = B_{m_j} \cup \{q_j\},$$

$$\sigma(m_{j+1}) = \sigma(m_j \cdot q_j) = \sigma(m_j) \cdot \sigma(q_j) = \sigma(m_j) \cdot (q_j + 1).$$

故 $A_{m_j} \subset A_{m_{j+1}}$, 知

$$|A_{m_{j+1}} \setminus B_{m_{j+1}}| \geq |A_{m_j} \setminus B_{m_{j+1}}| \geq |A_{m_j} \setminus B_{m_j}| - 1. \qquad (*)$$

又对任意奇素数 p, 若 $p \leq 2^t-1$, 有 $p+1$ 中的素因子 $\leq 2^t-1$ (因为 $2 \mid p+1$, 所以 $p+1$ 的素因子 $\leq \frac{p+1}{2} < p \leq 2^t-1$).

由此, 简单归纳可得对任意正整数 j, A_{m_j} 和 B_{m_j} 中的元素均 $\leq 2^t-1$. 又

$$|B_{j+1}| = |B_j \cup \{q_j\}| = |B_j| + 1,\ \ j \in \mathbb{N}^+$$

且不大于 2^t-1 的素数仅有有限个, 知存在正整数 s 使 $|A_{m_s} \setminus B_{m_s}| = 0$.

结合 $|A_{m_1} \setminus B_{m_1}| \geq k$, 及 $(*)$, 可得存在正整数 $l \leq s$, 使 $|A_{m_l} \setminus B_{m_l}| = k$.

故命题得证. □

证明 2 (根据杭州学军中学叶梓的解答整理)

设 $q_1, \cdots, q_k$ 为互不相同的奇素数. 令 $r = \varphi(q_1 \cdots q_k) - 1$, 则

$$q_1 \cdots q_k \mid 2^{r+1} - 1 = \sigma(2^r).$$

取 $m_1 = 2^r$, 于是

$$\{q_1, \cdots, q_k\} \subset A_{2^r},\ |B_{2^r}| = |\{2\}| = 1.$$

从而,$|A_{m_1} \setminus B_{m_1}| \geq k$.

不妨设 $|A_{m_1} \setminus B_{m_1}| > k$, 否则结论成立. 此时, $\sigma(m_1)$ 至少有 $k+1$ 个素因子, 故可设 $2^{r+1}-1$ 的所有素因子从小到大的排列为

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_{l+1} < \cdots < r_{l+k},$$

其中 l 为正整数. 设 $p_1, p_2, \cdots$ 为所有素数从小到大的排列. 设 $r_l = p_t,\ t \in \mathbb{N}^*$.

令 $m = 2^r p_1 p_2 \cdots p_t$, 那么

$$\sigma(m) = \sigma(2^r)\sigma(p_1)\cdots\sigma(p_t) = (2^{r+1}-1)(p_1+1)\cdots(p_t+1).$$

注意到 $p_i+1, 1 \leq i \leq t$ 的素因子不超过 $\frac{p_t+1}{2} < p_t$, 又 $r_{l+1}, \cdots, r_{l+k}$ 均是 $2^{r+1}-1$ 的素因子, 因此

$$A_m \subset \{p_1, \cdots, p_t, r_{l+1}, \cdots, r_{l+k}\},\ \text{且}\ r_{l+1}, \cdots, r_{l+k} \in A_m.$$

又 $B_m = \{2, p_1, \cdots, p_t\}$, 故

$$|A_m \setminus B_m| = |\{r_{l+1}, \cdots, r_{l+k}\}| = k,$$

命题得证. □

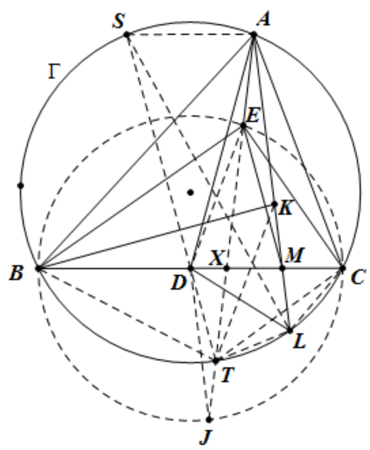
评注 此题是较难的数论题, 考试中约 6% 做对此题.

证明 1 采用了离散介值原理. 由费马小定理构造 2 的方幂 m_1, 使其对应的 $|A_{m_1}\setminus B_{m_1}|\geq k$, 每次操作将 m_j 乘以 $A_{m_j}\setminus B_{m_j}$ 的某个素因子, 再证明这种操作下, $|A\setminus B|$ 至多减少 1, 这样由介值原理知结论成立.

证明 2 是一个妙解. 通过将较 m 定义为 2^r 与 $2^{r+1}-1$ 较小的素因子的乘积, 从而保证 $2^{r+1}-1$ 较大的 k 个素因子恰是 $A_m\setminus B_m$ 的全部元素.

题 6 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ, D 为 BC 中点. E 在 $\triangle ABC$ 内, 满足 $\angle BAD=\angle CAE$, 且 $\angle BEC=90^\circ$. M 在 BC 上, 满足 $\angle EMD=\angle ADM$. 延长 AM 交 Γ 于 L, K 为线段 AL 上一点, 满足 $\angle ABK=\angle CDL$. 设 $AN\perp BC$ 交 BC 于 N, 证明: $KL=2DN$.

(温州育英国际实验学校 林逸沿 供题)



证明 (浙江省温州育英国际实验学校胡俊浦、凌晨)

设 AE 交 Γ 于 T, 由题意可知

$$\triangle ABK\backsim\triangle CDL\Rightarrow\frac{AB}{DC}=\frac{BK}{DL},$$

而又 $ABTC$ 为调和四边形可知 $\frac{AB}{DC}=\frac{AB}{BD}=\frac{BT}{DT}$,$\angle ABT=\angle CDT$, 于是有

$$\angle KBT=\angle LDT,\frac{DL}{DT}=\frac{BK}{BT}\Rightarrow\triangle BTK\backsim\triangle DTL$$

进而有

$$\triangle TLK\backsim\triangle TDB\backsim\triangle BDA\Rightarrow KL=\frac{TL\cdot AD}{DB}.$$

过 A 作 BC 的平行线交 Γ 于 S, 易知 $AS=2DN$, 要证明 $KL=2DN$, 只要证

$$\frac{TL\cdot AD}{DB}=AS\Leftrightarrow\sin\angle EAM\cdot AD=\sin\angle ATS\cdot DB$$

设 AE 交 BC 于 X, 交以 BC 为直径的圆于另一点 J, 则

$$AX \cdot XT = BX \cdot XC = EX \cdot XJ \Rightarrow \frac{AX}{XJ} = \frac{EX}{XT}.$$

又 $ABTC$ 为调和四边形, 故

$$\angle ADM = \angle TDM \Rightarrow EM \parallel DT \Rightarrow \frac{EX}{XT} = \frac{MX}{XD},$$

于是

$$\frac{AX}{XJ} = \frac{MX}{XD} \Rightarrow DJ \parallel AM,$$

故可知 $\angle DET = \angle DJX = \angle EAM$. 于是 $\sin\angle EAM = \sin\angle DET$, 而由又正弦定理知

$$\sin\angle DET = \frac{DT}{DE}\sin\angle ATD = \frac{DT}{DC}\sin\angle ATD$$

又易知 $\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DT}$, 故

$$\sin\angle DET = \frac{DC}{AD} \cdot \sin\angle ATD = \frac{DC \cdot \sin\angle ADC}{\sin\angle ACB \cdot AC} \cdot \sin\angle ATD,$$

故命题等价于 $AD \cdot \sin\angle ADC = AC \cdot \sin\angle ACB$, 这显然成立, 故命题得证. $\square$

评注 此题是难题, 考试中不到 3% 的人做对此题. 本题的难点是如何证明 $\angle DEX = \angle EAM$.

上述解法非常漂亮, 其思想在于将 KL 用相似来表示, 从而进行消点, 但这样的方法难以想到, 原因在于 $\triangle ABK \sim \triangle CDL$ 先入为主, 导致解题人多半会往这个方向想.