数学新星问题征解

第四十期 (2021.05)

主持: 张端阳

第一题. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, O 是外心, M 是高 AD 的中点, $\angle A$ 内的旁切圆 $\odot I_a$ 与 BC 切于点 E, 与 AB、AC 的延长线分别切于点 P、Q. 设 OI_a 与 ME 交于点 T, TP、TQ 分别与 $\odot I_a$ 交于另一点 X、Y. 证明: 直线 AT 是 $\triangle ABX$ 与 $\triangle ACY$ 的外接圆的根轴.

(长沙一中学生 胡冬础 供题)

第二题. 证明: 存在无穷多个正整数 n, 使得 n 不是幂, 且 $\sigma(\sigma(n))$ 与 $\tau(n)$ 互素, 其中 σ 与 τ 分别表示因数和与因数个数.

注: 在本题中, 幂指形如 a^b 的数, 其中 a, b 是大于 1 的整数.

(湖南师大附中学生 刘宇东 供题)

第三题. 设正整数 $k \le n$. T 是有 n 个顶点的树, 且有 k 个树叶. 证明: 可以用 $1, 2, \cdots, n$ 将 T 的顶点编号, 使得任意一边的两个顶点编号之差的绝对值不超过 $\lceil \frac{k}{2} \rceil$.

(上海大学 冷岗松 供题)

第四题. 给定正整数 k, n. 求最大的实数 λ, 使得对任意满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = kn$ 的正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 都有 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{[x_i]^2}{x_i} \ge \lambda$.

(温州育英国际实验学校学生 林逸沿 供题)