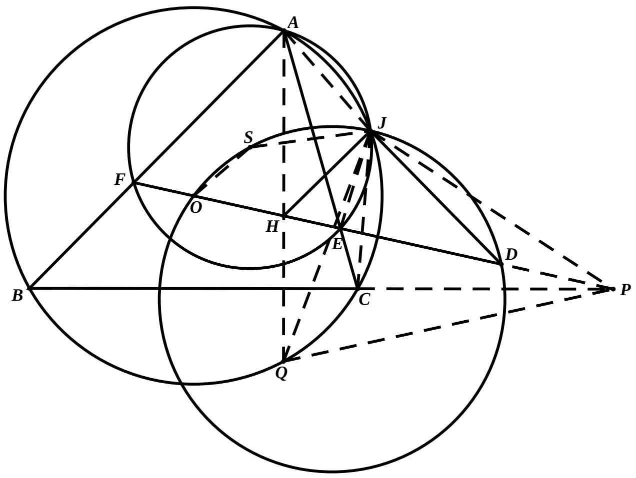
第三十八期问题征解解答与点评

张端阳

第一题 设 $\triangle ABC$ 为不等腰三角形, O, H 分别为其外心与垂心, 直线 OH 与 AC, AB 分别交于点 E, F. 令 $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, 它与 $\triangle AEF$ 的外接圆 $\odot S$ 交于除 A 外的另一点 J. 再设 $\triangle JSO$ 的外接圆与 $\odot O$ 交于 J, K 两点, 而与直线 OH 交于 O, D 两点. 直线 DK 与 $\odot O$ 交于 G, K 两点, 直线 JK 与 OH 交于 M. 求证: 过 G, H, M 的圆与 $\odot O$ 相切.

(兰州一中学生 郝敏言 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):



先证明 $HJ \perp JD$.

延长 OH、BC 交于点 P, 则 J 是完全四边形 $ABCFEP$ 的密克点, 于是 J, E, C, P 共圆. 延长 AH 交 $\odot O$ 于点 Q, 则 Q 与 H 关于 BC 对称. 因为

$$\angle JPE = \angle JCE = \angle JQA,$$

所以 J, P, Q, H 共圆. 这样,

$$\angle JHD = \angle JQP = \angle AQP - \angle JQA = \angle QHP - \angle JPH.$$

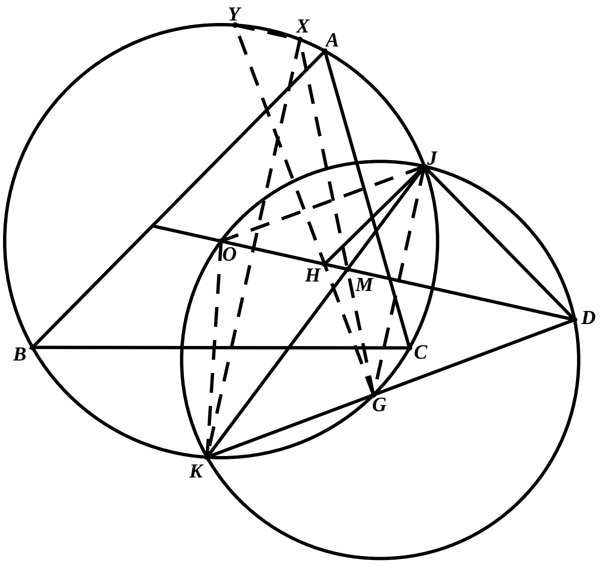
又

$$\begin{aligned}\angle JDH =&180^\circ-\angle OSJ=90^\circ-\angle AJS=\angle AEJ\\ =&\angle JCE+\angle EJC=\angle JPH+\angle EPC,\end{aligned}$$

故

$$\angle JHD+\angle JDH=\angle QHP+\angle EPC=90^\circ,$$

即 $HJ\perp JD$.



回到原题. 因为

$$\angle JDG=180^\circ-\angle JOK=180^\circ-2\angle JGD,$$

所以 $DJ=DG$. 又 $OJ=OG$, 所以 J 与 G 关于直线 OD 对称.

延长 GM 交 $\odot O$ 于点 X, 则 X 与 K 关于直线 OD 对称, 所以 $XK\perp OD$.

延长 GH 交 $\odot O$ 于点 Y, 结合 $HJ\perp JD$ 得,

$$\angle YXK=\angle YGK=180^\circ-\angle HGD=180^\circ-\angle HJD=90^\circ,$$

即 $XK\perp YX$.

于是 $YX\parallel OD$, 即 $YX\parallel HM$, 故过 G,H,M 的圆与 $\odot O$ 相切. □

评注 (1). 北京大学刘云冲同学用的复数法, 他依次算出

$$E=\frac{A+C}{1+AC},\quad F=\frac{A+B}{1+AB},\quad S=\frac{A(1+AB+BC+CA)}{(1+AB)(1+AC)},$$

$$J=\frac{1+AB+BC+CA}{A+B+C+ABC},\quad K=ABC,\quad G=\frac{A+B+C+ABC}{1+AB+BC+CA}.$$

(2). 成都树德中学何雨航, 长沙市南雅中学石育锟, 杭州学军中学叶梓、

郑思源, 雅礼中学温玟杰, 温州育英国际实验学校林逸沿, 温州中学金晟治, 华东师大二附中王一川等同学也给出了本题的正确解答.

第二题 将一个 $n \times n$ 的白色方格表中的 n 个格子染成黑色. 证明: 存在至少 $\binom{n}{2}$ 个白格, 它们彼此之间通过公共边形成连通分支.

(重庆南开中学学生 伍垟圳 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):

分两种情形讨论.

情形 1: 有一行和一列 (记作 L) 中没有黑格.

设 L 所在的连通分支为 T.

方格表除 L 外被分为四个部分 A_1, A_2, A_3, A_4 (可能有的部分为空). 对 $1 \le i \le 4$, 设 A_i 中有 a_i 个黑格. 下面证明, A_i 中不属于 T 的白格至多有 $\binom{a_i}{2}$ 个.

事实上, 对 A_i 中不属于 T 的一个白格 B, 设 L 中与 B 同行和同列的格分别为 X, Y, 则 B, X 之间且与它们同行的格中必有黑格, B, Y 之间且与它们同列的格中也必有黑格. 从而 A_i 中不属于 T 的一个白格对应了 A_i 中的两个不同的黑格. 又不会有两个白格对应到同一对黑格 (否则这两个白格既同行也同列, 因而是同一个), 故 A_i 中不属于 T 的白格的个数不多于 A_i 中黑格对的个数 $\binom{a_i}{2}$.

从而 T 中白格数不少于

$$n^2 - n - \sum_{i=1}^{4} \binom{a_i}{2} \ge n^2 - n - \binom{n}{2} = \binom{n}{2}.$$

情形 2: (不妨) 每列中均有黑格.

因为黑格共有 n 个, 所以每列中恰有一个黑格.

若存在相邻两列, 其中的黑格没有公共点, 则这两列中的 $2(n-1)$ 个白格属于同一个连通分支 T. 由每列中恰有一个黑格, 知当一列中有 x 个白格属于 T 时, 其相邻的列中至少有 $x-1$ 个白格属于 T. 从而 T 中白格数不少于

$$2(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 1 > \binom{n}{2}.$$

下设任意相邻两列的黑格都有公共点.

若第一行和最后一行中没有黑格, 则全部白格被分为上下两个连通分支, 必有一个中的白格数不少于 $\binom{n}{2}$.

若 (不妨) 第一行中有黑格, 则其下方的 $n-1$ 个白格属于同一个连通分支 T. 同上面的论证, T 中白格数不少于

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 = \binom{n}{2}.$$

综上, 命题得证. $\square$

评注 杭州学军中学黄行睿, 雅礼中学温玟杰, 麓山国际实验学校童昊阳, 温州中学金晟治, 华东师大二附中王一川等同学也给出了本题的正确解答.

第三题 设 a_i, b_i $(1 \le i \le n)$ 为实数, 满足 $a_i \ge 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|b_i+b_j+b_k+b_l|\cdot a_ia_ja_ka_l \ge \sum_{i=1}^{n}|b_i|\cdot a_i.$$

(北京大学学生 张江昊 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):

先证明二维情形

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_i+b_j|\cdot a_ia_j \ge \sum_{i=1}^{n}|b_i|\cdot a_i.$$

设 $b_i = c_id_i$, 其中 $d_i = |b_i|, c_i = \pm 1$, 则只需证明

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_id_i+c_jd_j|\cdot a_ia_j \ge \sum_{i=1}^{n}d_ia_i.$$

先证明局部不等式

$$|c_id_i+c_jd_j| \ge \frac{1}{2}(d_i+d_j)+c_ic_j\sqrt{d_id_j}.$$

事实上, 当 c_i, c_j 同号时, 即证 $\frac{1}{2}(d_i+d_j) \ge \sqrt{d_id_j}$, 显然成立.

当 c_i, c_j 异号时, 不妨设 $d_i \ge d_j$, 则即证 $d_i - d_j \ge \frac{1}{2}(\sqrt{d_i}-\sqrt{d_j})^2$, 这等价于 $2(\sqrt{d_i}+\sqrt{d_j}) \ge \sqrt{d_i}-\sqrt{d_j}$, 也成立.

这样,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_id_i+c_jd_j|\cdot a_ia_j \ge & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(d_i+d_j)+c_ic_j\sqrt{d_id_j}\right)a_ia_j \\ = & \left(\sum_{i=1}^{n}d_ia_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\sqrt{d_i}a_i\right)^2 \\ \ge & \sum_{i=1}^{n}d_ia_i.\end{aligned}$$

回到原题. 因为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j = \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2 = 1,$$

所以先对 n^2 个变量 a_ia_j 与 $b_i+b_j (1 \le i, j \le n)$ 用二维情形, 再直接用二维情形

得,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|(b_i+b_j)+(b_k+b_l)|\cdot(a_ia_j)(a_ka_l)\\\geq&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_i+b_j|\cdot a_ia_j\geq\sum_{i=1}^{n}|b_i|\cdot a_i.\end{aligned}$$

综上, 命题得证. □

评注 (1). 在二维情形中取 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$, 即得到 2006 年伊朗国家队选拔考试第四题.

(2). 二维情形也可以通过对 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 正负分离来证明.

(3). 南开大学唐梓洲教授指出, 二维情形对复数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 也成立. 证明思想同原证明相近, 事实上, 设 $b_i=c_id_i$, 其中 $d_i=|b_i|,|c_i|=1$, 关键的一步是证明局部不等式

$$|c_id_i+c_jd_j|\geq\frac{1}{2}(d_i+d_j)+\frac{1}{2}(c_i\overline{c_j}+\overline{c_i}c_j)\sqrt{d_id_j},\tag{$*$}$$

之后同原证明.

$(*)$ 式证明如下: 当 d_i 或 d_j 等于 0 时显然成立, 下不妨设 $d_i\geq d_j>0$. 记 $d=\frac{d_i}{d_j},\lambda=\overline{c_i}c_j$, 则 $d\geq1,|\lambda|=1$, 且

$$|c_id_i+c_jd_j|=|d_i+\overline{c_i}c_jd_j|=d_j|d+\lambda|,$$

于是只需证明

$$|d+\lambda|\geq\frac{1}{2}(d+1)+\frac{1}{2}(\lambda+\overline{\lambda})\sqrt{d}.$$

设 $\lambda=\cos\theta+i\sin\theta$, 则只需证明

$$d+\cos\theta\geq\frac{1}{2}(d+1)+\cos\theta\sqrt{d}.$$

这等价于

$$\sqrt{d}+1\geq2\cos\theta,$$

由 $\sqrt{d}+1\geq2\geq2\cos\theta$ 即证.

(4). 巴黎高等师范学院刘奔博士指出, 二维情形对 $b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbb{R}^d$ 也成立, 其中 d 是任意正整数.

先证明一个引理.

引理 设 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, 满足

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{x}{\sqrt{|x|}}, & x\neq0\end{cases},$$

则对任意 $a,b\in\mathbb{R}^d$,

$$2|a+b|\geq|f(a)+f(b)|^2.$$

证明 设 $f(a)=xu, f(b)=yv$, 其中 $x=|f(a)|, y=|f(b)|$, u,v 是单位向量, 则 $a=x^2u, b=y^2v$. 记 $c=\langle u,v\rangle$ 为 u,v 的内积, 则

$$\begin{aligned}&4|a+b|^2-|f(a)+f(b)|^4\\=&4(x^4+y^4+2x^2y^2c)-(x^2+y^2+2xyc)^2\\=&3(x^4+y^4)-2x^2y^2+(8x^2y^2-4xy(x^2+y^2))c-4x^2y^2c^2.\end{aligned}$$

上式是关于 c 的二次函数, 开口向下, 因此最小值在端点 ±1 处取到.

当 $c=1$ 时,

$$4|a+b|^2-|f(a)+f(b)|^4=4(x^2+y^2)^2-(x+y)^4\geq0;$$

当 $c=-1$ 时,

$$4|a+b|^2-|f(a)+f(b)|^4=4(x^2-y^2)^2-(x-y)^4=(x-y)^2(4(x+y)^2-(x-y)^2)\geq0.$$

引理证毕.

回到原题. 由引理,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|b_i+b_j|\cdot a_ia_j\\\geq&\frac12\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|f(b_i)+f(b_j)|^2\cdot a_ia_j\\=&\frac12\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(|f(b_i)|^2+|f(b_j)|^2+2\langle f(b_i),f(b_j)\rangle\right)\cdot a_ia_j\\=&\frac12\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(|b_i|+|b_j|)\cdot a_ia_j+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\langle f(b_i),f(b_j)\rangle\cdot a_ia_j\\=&\left(\sum_{i=1}^n|b_i|\cdot a_i\right)\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)+\left|\sum_{i=1}^n f(b_i)\cdot a_i\right|^2\\\geq&\sum_{i=1}^n|b_i|\cdot a_i.\end{aligned}$$

(5). 杭州学军中学叶梓、郑思源, 雅礼中学温玟杰, 温州中学金晟治, 华东师大二附中王一川等同学也给出了本题的正确解答.

第四题 对简单图 $G(V,E)$ 以及任意边子集 $E_1\subset E$, 称顶点子集 $V_1\subset V$ 覆盖 E_1, 若 E_1 中的每条边至少有一个端点在 V_1 中. 求最小的正整数 N, 使得对

任意简单图 G, 只要 G 的任意 N 条边可以被不超过 20 个顶点覆盖, 则 G 的全部边可以被不超过 20 个顶点覆盖.

(北京大学学生 刘浩宇 供题)

解 (**根据华东师大二附中王一川同学的解答整理**):

N 的最小值为 231.

一方面, 取 G 为 22 阶完全图, 则 G 的全部边不能被 20 个顶点覆盖. 而去掉 G 中任意一条边 v_1v_2 后, 余下的边可用 $V\setminus\{v_1,v_2\}$ 覆盖. 故 $N\le \mathrm{C}_{22}^2-1=230$, 不符合要求.

另一方面, 我们证明 $N=231$ 符合要求.

只需证明在简单图 $G(V,E)$ 中, 若 $|E|\ge 232$, 且去掉 G 中任意一条边后余下的边可用 20 个顶点覆盖, 则 G 的所有边也可用 20 个顶点覆盖.

设 G 的边数为 $r(r\ge 232)$, G 的边为 $e_1,e_2,\cdots,e_r$.

对 $1\le i\le r$, 设 e_i 的两端点构成二元集 A_i, 20 元集 $B_i\subseteq V$ 覆盖除 e_i 外的所有边.

假设 G 的所有边不能用 20 个顶点覆盖, 则 $B_1,B_2,\cdots,B_r$ 两两不同, 且对 $1\le i\le r$, $A_i\cap B_i=\emptyset$ (否则 B_i 覆盖 e_i); 对 $1\le i,j\le r,i\ne j$, $A_i\cap B_j\ne\emptyset$ (因为 B_j 覆盖 e_i).

因为 $|A_i|=2,|B_i|=20$, 所以由 Bollobás 定理, $r\le \mathrm{C}_{2+20}^2=231$, 矛盾!

综上, 所求最小值为 231. □

评注 (1). Bollobás 定理叙述为:

设 $A_1,A_2,\cdots,A_k,B_1,B_2,\cdots,B_k$ 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的不同子集, 满足对 $1\le i,j\le k$, $A_i\cap B_j=\emptyset$ 当且仅当 $i=j$, 则

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\mathrm{C}_{|A_i|+|B_i|}^{|A_i|}}\le 1.$$

特别当 $|A_1|=\cdots=|A_k|=a,|B_1|=\cdots=|B_k|=b$ 时, $k\le \mathrm{C}_{a+b}^a$.

(2). 杭州学军中学郑思源同学也给出了本题的正确解答.