2021 年上海新星春季数学奥林匹克试题

2021 年 4 月 15 日 8:00–12:00, 上海

1. 给定整数 $n \geq 2$. 对 1, 2, $\cdots$, n 的一个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $1 \leq i \leq n$, 用 x_i 表示以 a_i 为首项的递增子列的长度的最大值, 用 y_i 表示以 a_i 为首项的递减子列的长度的最大值. 求 $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ 的最小可能值.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

2. 设 T 是 n 个顶点的树. 证明: 可以用 1, 2, $\cdots$, n 将 T 的顶点编号, 使得任意一边的两个顶点编号之差的绝对值不超过 $\frac{n}{2}$.

(华东师范大学 吴尉迟 供题)

3. 给定整数 $n \geq 4$. 求最大的实数 λ, 使得对任意满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ 的非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 均有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq \frac{1}{4} - \lambda m M,$$

其中 $a_{n+1} = a_1$, $m = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $M = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

4. 在某个合成水果小游戏中, 水果有一系列品种 S_1, S_2, $\cdots$. 游戏的操作规则是: 对任意正整数 i, 可以将两个水果 S_i 合成一个水果 S_{i+1}, 也可以将三个水果 S_i 合成一个水果 S_{i+2}. 对正整数 n, 已知篮子 B_n 装有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个水果: n 个 S_1, $n-1$ 个 S_2, $\cdots$, 1 个 S_n. 证明: 可以通过适当操作, 将 B_n 中的所有水果最终合成一个水果.

(浙江大学 张洪申　华东师范大学 何忆捷 供题)

5. 设 $\sigma(n)$ 表示正整数 n 的正约数之和, A_n 是 $\sigma(n)$ 的不同素因子构成的集合, B_n 是 n 的不同素因子构成的集合. 证明: 对任意正整数 k, 存在正整数 m, 使得 $|A_m \setminus B_m| = k$.

(温州知临中学 杨浩泽 供题)

6. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ, D 为 BC 中点. E 在 $\triangle ABC$ 内, 满足 $\angle BAD = \angle CAE$, 且 $\angle BEC = 90°$. M 在 BC 上, 满足 $\angle EMD = \angle ADM$. 延长 AM 交 Γ 于 L, K 为线段 AL 上一点, 满足 $\angle ABK = \angle CDL$. 设 $AN \perp BC$ 交 BC 于 N, 证明: $KL = 2DN$.

(温州育英国际实验学校 林逸沿 供题)