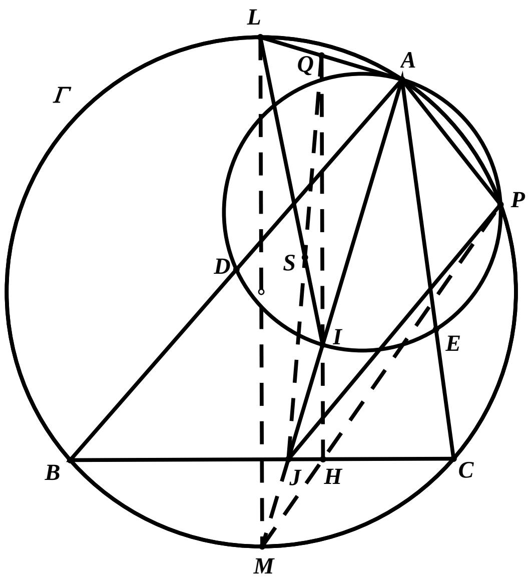
2020 年上海新星冬季数学奥林匹克试题解析

胡珏伟　吴尉迟　冷岗松

2021 年 2 月, 上海数学新星寒假营提供了一套网络自测题. 测试分为两天, 一天四道题, 时间为每天晚上 6 点到 10 点. 本次测验第一天的题目较为常规, 第二天的题目较为困难. 下面就介绍这些试题及给出相应的解答. 不当之处, 敬请读者批评指正.

题 1 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 内接于圆 Γ, $AB > AC$, I 为内心, 直线 AI, BC 交于 J, L 为弧 BAC 中点, AI 为直径的圆与圆 Γ 交于另一点 P. 证明: $\triangle AJP$ 的外心在 LI 上.

(成都树德中学 卢圣 供题)



证明 如图, 过 I 作 AB, AC, BC 的垂线, 垂足分别为 D, E, H, 则由 AI 为直径知 D, E 在 $\odot(AIP)$ 上. 首先证明 P, H, M 共线且 J, H, A, P 共圆. 事实上,

$$\angle PBA = \angle PCA,$$

修订日期: 2020-02-20.

$$\angle BDP = 180^\circ - \angle PDA = 180^\circ - \angle PEA = \angle PEC.$$

故 $\triangle PBD \sim \triangle PCE$, 于是

$$\frac{PB}{PC} = \frac{BD}{CE} = \frac{BH}{CH}.$$

由角平分线定理 H 在 $\angle BPC$ 的角平分线上. 又 M 为 $\widehat{AB}$ 中点, 故 P, H, M 共线. 由 $\angle MBJ = \angle MAC = \angle MAB$ 知 $\triangle BMJ \sim \triangle AMB$, 故

$$BM^2 = MJ \cdot MA.$$

由 $\triangle CMH \sim \triangle PMC$, 有

$$CM^2 = MH \cdot MP.$$

故

$$MJ \cdot MA = MH \cdot MP,$$

有 J, H, A, P 共圆.

连结 AL, 延长 HI 交 AL 于 Q. 由

$$\angle LAM = \angle JHQ = 90^\circ,$$

知 J, H, A, Q 共圆. 故有 J, H, P, A, Q 共圆. 此时弦 JQ 对应的圆心角为 $\angle JHQ = 90^\circ$, 故 $\triangle AJP$ 的外接圆圆心在 JQ 的中点. 因此只需证 LI 平分 JQ. 考虑到

$$\frac{JI}{IQ} = \frac{IH}{IA} = \sin\frac{A}{2}, \qquad ①$$

同时

$$\frac{\sin\angle LIQ}{\sin\angle JIL} = \frac{\sin\angle ILM}{\sin\angle MIL} = \frac{IM}{LM} = \frac{BM}{LM} = \sin\frac{A}{2}, \qquad ②$$

于是对 $\triangle QSI$ 和 $\triangle SIJ$ 分别应用正弦定理有

$$\begin{aligned}\frac{QS}{SJ} &= \frac{QI \cdot \dfrac{\sin\angle SIQ}{\sin\angle QSI}}{IJ \cdot \dfrac{\sin\angle SIJ}{\sin\angle ISJ}} \\ &= \frac{QI}{IJ} \cdot \frac{\sin\angle LIQ}{\sin\angle JIL} \\ &= \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} \cdot \sin\frac{A}{2} \quad (\text{用到①, ②}) \\ &= 1.\end{aligned}$$

即 LI 平分 JQ. $\square$

评注 首先发现 A, J, P 与内心 I 在边 BC 上的垂足 H 共圆. 上述做法的关键在于添出直径 JQ, 于是 $\triangle AJP$ 的外心即为 JQ 中点. 从而转化为证明 LI 平分线段 JQ, 利用正弦定理导比例便可证明这一点.

题 2 证明存在无穷多组正整数对 $(a,\ b)$, 使得集合

$$\left\{\left\lfloor\frac{a^n}{n}\right\rfloor \mid n\in\mathbb{N}^+\right\} \text{和} \left\{\left\lfloor\frac{b^n}{n}\right\rfloor \mid n\in\mathbb{N}^+\right\}$$

均包含模 3 的完系, 且 $a-b=2021$.

(湖南师范大学附属中学 刘伟才 供题)

证明 任取奇素数 $p>a(p>3)$, 则由费马小定理,

$$a^p\equiv a \pmod p,$$

故

$$\left\lfloor\frac{a^p}{p}\right\rfloor=\frac{a^p-a}{p},$$

又由 $a(a^2-1)\mid a(a^{p-1}-1)$, 知 $3\mid a^p-a$, 从而 $3\mid\left\lfloor\frac{a^p}{p}\right\rfloor$.

若 $a\equiv 2 \pmod 3$, 则对任意 $m\in\mathbb{Z}^+$ 有

$$\left\lfloor\frac{a^{a^m}}{a^m}\right\rfloor=a^{a^m-m}\equiv(-1)^{a^m-m}\equiv(-1)^{a-m}\equiv\begin{cases}1 \pmod 3, & \text{若 } 2\mid a-m\\ 2 \pmod 3, & \text{若 } 2\nmid a-m\end{cases}.$$

若 $a\equiv 1 \pmod 3$, 且存在 $3k+2$ 型素数 p 使得 $p\mid a$, 则

$$\left\lfloor\frac{a^a}{a}\right\rfloor=a^{a-1}\equiv 1 \pmod 3,$$

$$\left\lfloor\frac{a^{pa}}{pa}\right\rfloor=\frac{a^{pa-1}}{p}\equiv\frac{1}{2}\equiv 2 \pmod 3.$$

若 $3\mid a$, $2\nmid a$, 则

$$\left\lfloor\frac{a^2}{2}\right\rfloor=\frac{a^2-1}{2}\equiv\frac{-1}{2}\equiv 1 \pmod 3,$$

$$\left\lfloor\frac{a^4}{4}\right\rfloor=\frac{a^4-1}{4}\equiv\frac{-1}{4}\equiv 2 \pmod 3.$$

若 $3\mid a$, $2\mid a$, 则

$$\left\lfloor\frac{a^{a-1}}{a-1}\right\rfloor=\frac{a^{a-1}-1}{a-1}\equiv\frac{-1}{-1}\equiv 1 \pmod 3,$$

$$\left\lfloor\frac{a^{2(a+1)}}{2(a+1)}\right\rfloor=\frac{a^{2(a+1)}-a-2}{2(a+1)}\equiv\frac{-2}{2}\equiv 2 \pmod 3.$$

其中 $\left\lfloor \frac{a^{2(a+1)}}{2(a+1)} \right\rfloor = \frac{a^{2(a+1)}-a-2}{2(a+1)}$ 是由于 $a^{2(a+1)}+a$ 能被 $2(a+1)$ 整除.

综上, 任意被 3 整除或有 $3k+2$ 型素因子的整数 a, 都有 $\left\{\left\lfloor \frac{a^n}{n} \right\rfloor \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$ 包含模 3 的完系. 注意到 $2021 \equiv 2 \pmod 3$, 故取

$$a = b + 2021,\ b = 3k, \quad k \in \mathbb{N}^+,$$

即可满足条件. □

评注 本题需要对正整数 a 按模 3 的余数分类讨论, 证明 $3k$ 型和 $3k+2$ 型正整数均满足 $\left\{\left\lfloor \frac{a^n}{n} \right\rfloor \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$ 包含模 3 的完系. 再注意到 2021 模 3 余 2 便可完成证明.

题 3 给定整数 $n \geq 4$, 求最小的 $\lambda(n)$, 使得对于任意 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \geq 0$, 满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n,$$

就有

$$\sum_{i=1}^{n} \{a_i\} a_{i+1} \leq \lambda(n)$$

恒成立, 其中, $a_{n+1} = a_1,\ \{x\} = x - \lfloor x \rfloor,\ \lfloor x \rfloor$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

(长沙一中 宋青山 供题)

解 先证明如下引理.

引理 设 $n \geq 4$, 若 $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n \in [0,1]$ 且

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = r,$$

其中 $r \in \mathbb{N}^+,\ r \leq n-1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} r_i r_{i+1} \leq r - \frac{3}{4}.$$

证明 设

$$f(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n) = \sum_{r=1}^{n} r_i r_{i+1}, \quad r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n \in [0,1].$$

此时函数 f 为定义在有界闭集上的连续函数, 故存在最大值, 不妨假设最大值在 $(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n)$ 取到. 下证其中不存在 3 个数属于 $(0,1)$.

若不然, 必有两个数的下标之差大于 1 (mod n 意义下). 不妨设为 $r_i,\ r_j$, 即 i, j 满足

$$|i-j| \pmod n \geq 2.$$

固定 $r_i+r_j=t$, 则 f 是关于 r_i 的线性函数, 最大值在 $r_i=0$ 或 1 时取到, 矛盾! 故至多有两个数属于 $(0,1)$ 且两个数(若存在)的下标必定相邻, 即

$$|i-j| \pmod n = 1.$$

(1) 所有 r_i 均为 0 或 1, 则恰有 r 个 1. 此时

$$\sum_{i=1}^{n} r_i r_{i+1} \le r-1.$$

(2) 当恰由 2 个 r_i 属于 $(0,\ 1)$. 不妨设为 $r_1,\ r_2$, 则 $r_1+r_2=1$ 且剩余 $r-1$ 个 1. 此时有

$$r_n r_1 + r_1 r_2 + r_2 r_3 \le r_1 + r_1 r_2 + r_2,$$

故

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} r_i r_{i+1} &\le r_1 + r_1 r_2 + r_2 + r - 2 \\
&= r - 1 + r_1 r_2 \\
&\le r - 1 + \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2 \\
&= r - \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

引理得证!

回到原题. 设 $a_i=b_i+r_i$, 其中 $b_i=\lfloor a_i \rfloor$, $r_i=\{a_i\}$. 设 $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i = r$, 则

$$r+\sum_{i=1}^{n} b_i = n,$$

故 $r\in\mathbb{N}^+$ 且 $r\le n-1$. 由引理有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\{a_i\}a_{i+1} &= \sum_{i=1}^{n} r_i(b_{i+1}+r_{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} r_i r_{i+1} + \sum_{i=1}^{n} r_i b_{i+1} \\
&\le r - \frac{3}{4} + \sum_{i=1}^{n} b_{i+1} \\
&= n - \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

另一方面, 令 $a_1=\frac{3}{2}+(n-2)\epsilon,\ a_2=\frac{1}{2}$ (对应有两个 r_i 为 $\frac{1}{2}$), $a_3=a_4=\cdots=a_n=1-\epsilon$. 这时, 令 $\epsilon\to 0^+$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\{a_i\}a_{i+1} \to n-\frac{3}{4}.$$

综上, $\lambda(n)_{\min}=n-\frac{3}{4}$. $\square$

评注 本题想法是将 a_i 拆为整数部分 b_i 和小数部分 r_i. 对 $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i r_{i+1}$ 用调整法证明该部分极大值时除两个小数部分外, 其余 r_i 需足够接近 0 或 1. 此时, $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i b_{i+1}$ 中的 r_i 均可直接放缩为 1. 这样得到的最优值是渐进最优的.

题 4 设 n 是正整数, $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 是 n 个不同的非空有限集, 满足对任意 $1 \le i,\ j,\ k \le n$, 若 $A_i \cap A_j = \varnothing$, 则存在整数 $l(1 \le l \le n)$ 使得

$$(A_i \cup A_k) \setminus A_j = A_l.$$

求最大的实常数 c, 使对任意正整数 n 和任意满足上述性质的集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 存在集合 $I \subseteq \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, 使得

(1) $|I| \ge cn$,

(2) 对任意 $i,\ j \in I,\ A_i \cap A_j \ne \varnothing$.

(华东师范大学第二附属中学 王一川 供题))

解 c 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

首先证明 $c = \frac{1}{2}$ 时结论成立. 称符合条件的集族 $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$ 是"好的". 由若$A_i \cap A_j = \varnothing$,则存在整数 $l(1 \le l \le n)$ 满足

$$A_l = (A_i \cup A_k) \setminus A_j \supseteq A_i,$$

易知对任意 $X \in \{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$, 若 X 的真子集均不在 $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$ 中, 则 $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\} \setminus X$ 仍是"好的". 证明如下引理.

引理 若对"好的"集族 $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$, 其中有两个集合不交, 则存在集合 $T \in \{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$, 使得 T 恰好与 $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$ 中一个集合不交.

证明 取 T 为与 $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$ 中至少一个集合不交的集合中元素最多的一个. 用反证法, 若存在 $l_1 \ne l_2$ 使

$$T \cap A_{l_1} = T \cap A_{l_2} = \varnothing.$$

由于 $A_{l_1},\ A_{l_2}$ 是不同集合, 故不妨设 $A_{l_1} \setminus A_{l_2} \ne \varnothing$. 由题设条件有

$$T' = T \cup (A_{l_1} \setminus A_{l_2}) = (T \cup A_{l_1}) \setminus A_{l_2} \in \{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}.$$

注意到

$$|T'| = |T| + |A_{l_1} \setminus A_{l_2}| > |T|$$

且 $T' \cap A_{l_2} = \varnothing$, 这与 T 的最大性矛盾!

引理得证.

回到原题. 若 $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$ 两两相交, 则 $c=\frac{1}{2}$ 满足题目要求. 若不然, 则可以归纳地在 $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$ 中取出两两不同的集合

$$P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_t,\ Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_t(t\geq 1\text{待定}).$$

取法如下: 对 $i\geq 1$, 记

$$\mathcal{F}_{i-1}=\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}\setminus\{P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{i-1}\}.$$

若 $\mathcal{F}_{i-1}$ 中集合两两相交, 则停止.

若 $\mathcal{F}_{i-1}$ 中存在两个集合不交, 则取 $Q_i\in\mathcal{F}_{i-1}$ 恰与一个集合不交, 记为 P_i. 此时 P_i 的真子集一定不在 $\mathcal{F}_{i-1}$ 中, 故若 $\mathcal{F}_{i-1}$ 是“好的”, 则 $\mathcal{F}_i$ 也是“好的”. 而 $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$ 是“好的”, 结合引理, 这保证了若 $\mathcal{F}_i$ 中存在两个集合不交, 取法中的 Q_{i+1} 必定存在.

下面说明 P_i 与 $Q_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ i-1)$ 必定不相同. 若不然, 则由取法知 Q_j 只与 P_j 不交, 与 $Q_i\in\mathcal{F}_{i-1}\subset\mathcal{F}_{j-1}$ 相交, 而由 Q_i 取法知 Q_i 只与 P_i(即 Q_j) 不交, 产生矛盾. 因此

$$P_i\notin\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}\setminus\{P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{i-1},\ Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_{i-1}\},$$

类似讨论可得

$$Q_i\notin\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}\setminus\{P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{i-1},\ Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_{i-1}\},$$

故

$$P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_t,\ Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_t$$

两两不同, 上述过程必定会终止, 且 $t\leq\frac{n}{2}$.

对于 $1\leq i\leq t$, Q_i 与 $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_i,\ Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_{i-1}$ 外集合均相交, 且

$$\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}\setminus\{P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_t,\ Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_t\}$$

中集合两两相交, 故

$$\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}\setminus\{P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_t\}$$

中的集合两两相交, 从而存在 $I\subseteq\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, $|I|=n-t\geq\frac{n}{2}$ 且 $A_i(i\in I)$ 两两相交.

另一方面, 可以证明 $c>\frac{1}{2}$ 不成立. 当 $n=2$ 时, $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2\}$ 满足题设条件, 但 $A_1\cap A_2=\varnothing$, 于是 $c\leq\frac{1}{2}$.

综上, c 的最大值为 $\frac{1}{2}$. □

评注 本题的最优值可以在尝试较小的 n 时得到. 在论证部分, 我们通过不断寻找剩余集族中的"极小集族", 该最小元满足存在一个集族, 该集族只与"极小集族"不交, 这样的过程可以保证我们的题设条件不变. 从而, 取出的集族不超过一半, 并且剩余的集族两两相交.

题 5 设 n 是正整数, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\cdots$, $\vec{v_n}$ 是平面中的单位向量, a_1, a_2, $\cdots$, a_n 是正数. 证明: 可以选取 $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 使

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i a_i \vec{v_i}$$

满足

$$|\vec{x}\cdot\vec{v_k}| \geq a_k$$

对 $k = 1, 2, \cdots, n$ 均成立.

(华东师范大学 吴尉迟 供题)

证明 取 $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$, 使

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i a_i \vec{v_i}$$

模长最大. 设 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 对

$$\vec{y}=\sum_{i\neq k}\epsilon_i a_i \vec{v_i},$$

由于 $\vec{x}$ 模长的最大性, 知

$$|\vec{y}+\epsilon_k a_k \vec{v_k}| = |\vec{x}| \geq |\vec{y}-\epsilon_k a_k \vec{v_k}|,$$

从而

$$\vec{y}\cdot(\epsilon_k a_k \vec{v_k}) \geq 0,$$

即

$$\epsilon_k \vec{y}\cdot\vec{v_k} \geq 0.$$

故

$$\begin{aligned}|\vec{x}\cdot\vec{v_k}| &= |\vec{y}\cdot\vec{v_k}+\epsilon_k a_k \vec{v_k}\cdot\vec{v_k}| \\ &= |\epsilon_k\cdot(\epsilon_k \vec{y}\cdot\vec{v_k}+a_k)| \\ &\geq \epsilon_k\cdot\vec{y}\cdot\vec{v_k}+a_k \\ &\geq a_k.\end{aligned}$$

命题得证. $\square$

评注 本题的想法应是极端原理, 即取 ϵ_i 使得 $\vec{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}\epsilon_i a_i\,\vec{v_i}$ 模长最大, 再验证不等式即可.

题 6 对任意整数 $n\geq 3$, 试找出一个 $\mathbb{Q}$ 上不可约的 n 次多项式 $f(x)$, 使得对任意 $g(x)\in\mathbb{Q}[x](1<\deg g<n)$, 均有 $f(x)\nmid f\left(g(x)\right)$.

(华东师范大学 罗振华 供题)

解 取 $f(x)=x^n-2$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 且所有根为

$$\sqrt[n]{2}\xi^k,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

其中

$$\xi=e^{\frac{2\pi}{n}i}.$$

下面证明 $f(x)$ 即为所求.

若存在 $g\in\mathbb{Q}[x]$ 且 $1<\deg g<n$ 使得 $f(x)\mid f(g(x))$, 则 $g(\sqrt[n]{2}\xi^k)$ 也是 $f(x)$ 的根. 考虑到 $g(\sqrt[n]{2})$ 为实数故

$$g(\sqrt[n]{2})=\sqrt[n]{2}\text{ 或 }g(\sqrt[n]{2})=-\sqrt[n]{2}.$$

若 $g(\sqrt[n]{2})=\sqrt[n]{2}$, 则 $g(x)-x$ 与 $f(x)$ 有公共根 $\sqrt[n]{2}$. 又 f 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 故

$$f(x)\mid g(x)-x.$$

于是

$$\deg g(x)=\deg(g(x)-x)\geq\deg f(x)\geq n$$

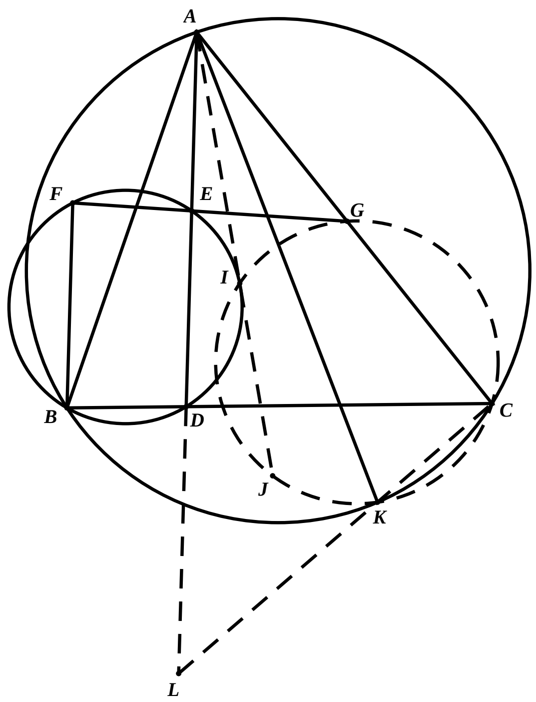
矛盾! 同理, $g(\sqrt[n]{2})=-\sqrt[n]{2}$ 也会导出矛盾.

综上, 命题得证. $\square$

评注 上述的构造的想法是构造 f 满足其根均不是有理数, 且恰有一根为实根. 在反证假设下, 利用 g 是有理系数多项式知 $f(x)$ 与 $g(x)-x$ 有公共实根且根不为有理数. 结合 f 不可约性便得矛盾.

题 7 $\triangle ABC$ 内心为 I, D 为 BC 边上一点, AD 再次交 $\triangle BDI$ 外接圆于点 E. 过 B 作 AD 平行线再次交 $\triangle BDI$ 外接圆于点 F, FE 交 AC 于点 G, K 在 $\triangle ABC$ 外接圆上满足 $\angle BAD=\angle CAK$. 证明: C, G, I, K 共圆.

(温州中学 金晟治 供题)



证明 下面利用同一法.

设 D 在 BC 上, K 在 $\odot ABC$ 满足 $\angle BAD = \angle CAK$. $\odot CIK$ 交 AC 于 G, 点 E 在 AD 上, 使 $\angle GED = \angle CDE$. 设 $CK \cap AD = L$, $AI \cap \odot CIK = \{I, J\}$. 下面只需证: B, D, I, E 共圆.

由

$$\begin{aligned}\angle GED = \angle CDE &= \angle DBA + \angle BAD \\ &= \angle AKC + \angle CAK = 180^\circ - \angle ACK,\end{aligned}$$

知 L, C, G, E 共圆. 由

$$AI \cdot AJ = AG \cdot AC = AE \cdot AL$$

知 E, I, J, L 共圆. 考虑到

$$\begin{aligned}\angle EIB = \angle EIJ - \angle BIJ &= 180^\circ - \angle ELJ - \left(90^\circ - \frac{\angle C}{2}\right) \\ &= 180^\circ - \angle ALC - \angle JLC - 90^\circ + \frac{\angle C}{2} \\ &= \angle LDC + \angle LCD + \frac{\angle C}{2} + \angle JLC - 90^\circ \\ &= \angle BDE + \angle LCI + \angle JLC - 90^\circ.\end{aligned}$$

故只需证明

$$\angle LCI + \angle JLC = 90^\circ,$$

由

$$\angle LCI = 180^\circ - \angle AJK,$$

只需证

$$\angle AJK = 90^\circ + \angle JLC.$$

故需证: J 为 $\triangle ALK$ 的内心. 结合 AJ 平分 $\angle LAK$ 知, 只需证 KJ 平分 $\angle AKL$. 而

$$\angle LKJ = \angle JIC = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle AKC}{2}.$$

故 KJ 平分 $\angle AKL$.

综上, 命题得证. $\square$

评注 上述解法采用同一法. 先取定 D, K, 再取定 $\triangle CKI$ 外接圆与 AC 交点 G. 然后取点 E 满足 $\angle GED = \angle CDE$, 这样便消去了点 F, 此时只需证明 B, D, I, E 共圆. 利用 L, C, G, E 共圆, E, I, J, L 共圆以及 J 为 $\triangle ALK$ 内心这三个结论导角证明.

题 8 设 $n \geq 2$ 是给定的整数. 求所有的实数 α, 使得存在函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 满足对任意实数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 均有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j|^\alpha.$$

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

解 当 $x_i = x_j$ 时, 由 $|x_i - x_j|^\alpha$ 存在知 $\alpha > 0$.

首先证明, 当 $\alpha \geq 2$ 时, 取函数 $f(x) = 2^{\alpha-1}n(n-1)|x|^\alpha$ 满足要求.

先证明: 对 $x_1 \geq x_2 \geq 0$,

$$2^{\alpha-1}(x_1^\alpha + x_2^\alpha) \geq (x_1 + x_2)^\alpha + (x_1 - x_2)^\alpha. \tag{$*$}$$

记

$$g(x_1) = 2^{\alpha-1}(x_1^\alpha + x_2^\alpha) - (x_1 + x_2)^\alpha - (x_1 - x_2)^\alpha,$$

则

$$g'(x_1) = \alpha\left(2^{\alpha-1}x_1^{\alpha-1} - (x_1 + x_2)^{\alpha-1} - (x_1 - x_2)^{\alpha-1}\right).$$

由 $\alpha - 1 \geq 1$ 知

$$(x_1 + x_2)^{\alpha-1} + (x_1 - x_2)^{\alpha-1} \leq \big((x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)\big)^{\alpha-1} = 2^{\alpha-1}x_1^{\alpha-1},$$

故 $g'(x_1)\ge 0$, 结合 $g(x_2)=0$ 知 $g(x_1)\ge 0$, $(*)$ 式成立.

对 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)&=2^{\alpha-1}(n-1)\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{\alpha}\\&=2^{\alpha-1}\sum_{1\le i<j\le n}(|x_i|^{\alpha}+|x_j|^{\alpha})\\&\ge\sum_{1\le i<j\le n}(||x_i|+|x_j||^{\alpha}+||x_i|-|x_j||^{\alpha})\quad(\text{用到 }(*)\text{ 式})\\&=\sum_{1\le i<j\le n}(|x_i+x_j|^{\alpha}+|x_i-x_j|^{\alpha})\\&\ge\frac{\left(\sum\limits_{1\le i<j\le n}|x_i+x_j|\right)^{\alpha}}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^{\alpha-1}}+\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|^{\alpha}\quad(\text{幂平均不等式})\\&\ge\frac{\left|\sum\limits_{1\le i<j\le n}(x_i+x_j)\right|^{\alpha}}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^{\alpha-1}}+\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|^{\alpha}\quad(\text{三角不等式})\\&=f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)+\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|^{\alpha}.\end{aligned}$$

其次证明, 当 $\alpha<2$ 时, 不存在函数满足要求.

对任意实数 $x,\ y$, 当 n 是偶数时, 取 $x_1=\cdots=x_{\frac{n}{2}}=x,\ x_{\frac{n}{2}+1}=\cdots=x_n=y$ 得,

$$\frac{1}{2}(f(x)+f(y))\ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{n^2}{2}|x-y|^{\alpha};$$

当 n 是奇数时, 取 $x_1=\cdots=x_{\frac{n-1}{2}}=x,\ x_{\frac{n+1}{2}}=\cdots=x_{n-1}=y,\ x_n=\frac{x+y}{2}$ 得,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2}f(x)+\frac{n-1}{2}f(y)+f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\\\ge&f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{(n-1)^2}{4}|x-y|^{\alpha}+(n-1)\cdot\frac{|x-y|^{\alpha}}{2^{\alpha}},\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{2}(f(x)+f(y))\ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)+n\left(\frac{n-1}{4}+\frac{1}{2^{\alpha}}\right)|x-y|^{\alpha}.$$

于是只需证明, 当 $\alpha<2$ 时, 不存在函数 $f(x)$ 和正实数 C, 使得对任意实数 $x,\ y$, 均有

$$\frac{1}{2}(f(x)+f(y))\ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)+C|x-y|^{\alpha}.$$

事实上, 假设存在, 则

$$\frac{1}{2}\left(f(x)+f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\ge f\left(\frac{3x+y}{4}\right)+\frac{1}{2^{\alpha}}C|x-y|^{\alpha},\qquad ①$$

$$\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f(y)\right)\geq f\left(\frac{x+3y}{4}\right)+\frac{1}{2^\alpha}C|x-y|^\alpha, \qquad ②$$
$$\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{3x+y}{4}\right)+f\left(\frac{x+3y}{4}\right)\right)\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{1}{2^\alpha}C|x-y|^\alpha. \qquad ③$$

① + ② + 2 · ③ 得,

$$\frac{1}{2}(f(x)+f(y))\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{4}{2^\alpha}C|x-y|^\alpha.$$

重复上面的过程可知, 对任意正整数 m,

$$\frac{1}{2}(f(x)+f(y))\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\left(\frac{4}{2^\alpha}\right)^m C|x-y|^\alpha.$$

由 $\alpha<2$, 知 $\frac{4}{2^\alpha}>1$, 所以

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{4}{2^\alpha}\right)^m=+\infty,$$

矛盾!

综上, 所求为所有不小于 2 的实数. □

评注 (1) 本题可以尝试 $\alpha=2$ 的情形. 当取 $f(x)=|nx|^2$, 要证不等式刚好取等. 我们知道当 α 越大, $f(x)=|nx|^\alpha$ 的凸性越强. 由此猜测 $\alpha\geq 2$ 结论成立.

对 $\alpha\geq 2$ 的情形, 取 $f(x)=|kx|^\alpha$(k 为待定系数), 对于固定的$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 系数 k 越大,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)-f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)$$

也越大而

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}|x_i-x_j|^\alpha$$

不变. 因此取 k 足够大时便满足题目条件.

对 $\alpha<2$ 的情形, 采用分析的想法. 在反证法的假设下, 取特定的 x, y, 使 $|x-y|^\alpha$ 前的系数不断增大并趋于无穷, 由此得到矛盾.

(2) 本题源于对 2000 年美国数学奥林匹克第一题的讨论:

称实值函数 f 是"强凸的", 如果对任意实数 x, y, 均有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)+|x-y|.$$

证明: 不存在强凸的函数.