第三十七期问题征解解答与点评

张端阳

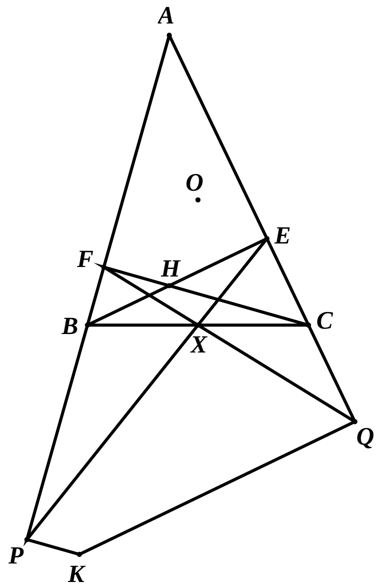
第一题 在锐角三角形 ABC 中, $BC > AB > AC$. 设 I 为内心, D, E, F 分别为内切圆在 BC, AC, AB 上的切点. G 为三角形的葛尔刚点, J 是 I 关于 $\triangle GBC$ 的等角共轭点, 直线 IJ 与 AD 交于点 X. 证明: $AX = 2XD$.

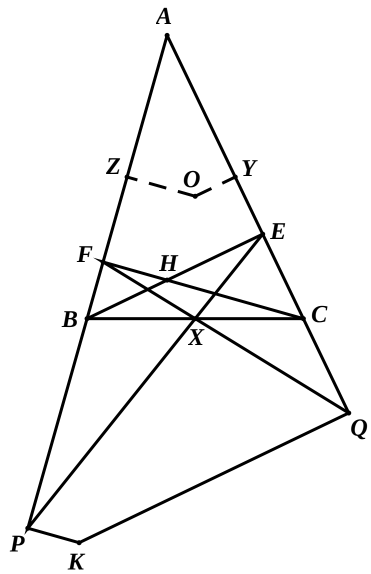
(青岛二中学生 陈晓琨 供题)

解 (根据供题者的解答整理):

先证明一个引理.

引理 在非等腰锐角 $\triangle ABC$ 中, O, H 分别是外心和垂心, X 是 BC 的中点, E 是 B 在 AC 上的投影, F 是 C 在 AB 上的投影. 设 EX 与 AB 交于点 P, FX 与 AC 交于点 Q. 过 P, Q 分别作 AB, AC 的垂线交于点 K, 则 O, H, K 三点共线.





证明 设 Y, Z 分别是 AC, AB 的中点, 则只需证明 $\frac{QE}{EY} = \frac{PF}{FZ}$.

设 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c, 不妨设 $b > c > a$.

由梅涅劳斯定理得,

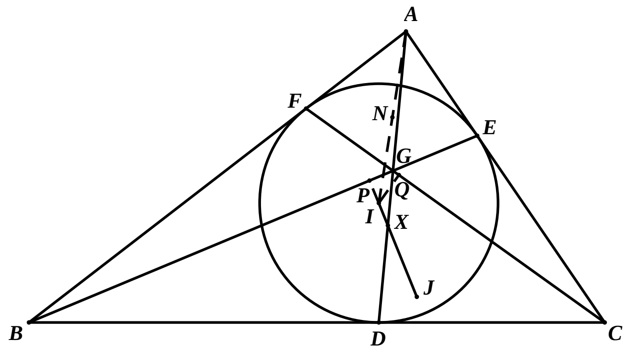
$$CQ = \frac{b(a^2-b^2+c^2)}{2(b^2-a^2)}.$$

又 $CE = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}, CY = \frac{b}{2}$, 所以

$$\frac{QE}{EY} = \frac{\frac{b(a^2-b^2+c^2)}{2(b^2-a^2)} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}}{\frac{b}{2} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}} = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}.$$

这关于 b, c 对称, 故 $\frac{QE}{EY} = \frac{PF}{FZ}$.

引理证毕.



回到原题. 设 AI 的中点为 N, 由梅涅劳斯定理, 只需证明 IJ 平分线段 ND.

设 P, Q 分别为 I 在 BG, CG 上的投影, 因为 D 为 I 在 BC 上的投影, 所以由等角共轭点的性质, $\triangle DPQ$ 的外心为 IJ 的中点. 于是只需证明 $\triangle DPQ$ 的外心、I、ND 的中点三点共线.

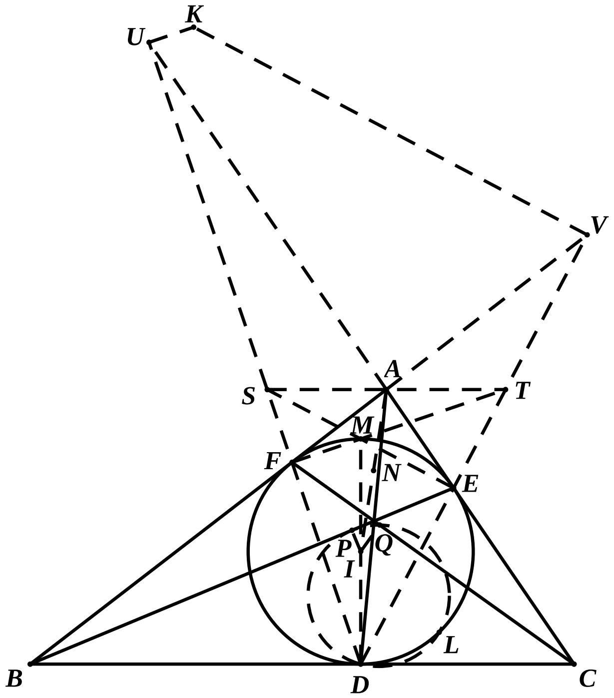
设 M, D 为 $\odot I$ 的对径点, L 为 $\triangle DPQ$ 的外接圆与 $\odot I$ 的另一个交点. 因为 ML 经过 D 在 $\triangle DPQ$ 外接圆的对径点, 于是只需证明 M, N, L 三点共线.

设 DF 与 AC 交于点 U, DE 与 AB 交于点 V. 因为 DF, AC 分别为点 B, E 关于 $\odot I$ 的极线, 所以 U, P 关于 $\odot I$ 互为反演点. 同理, V, Q 关于 $\odot I$ 互为反演点. 因为 D, L 在反演下不动, 所以由 D, L, Q, P 共圆知 D, L, V, U 共圆.

过 U, V 分别作 UD, VD 的垂线交于点 K, 则 D, L, V, U, K 都在以 DK 为直径的圆上, 所以 $DL \perp LK$. 因为 $DL \perp LM$, 所以 K, M, L 共线.

设 EM 与 DF 交于点 S, FM 与 DE 交于点 T, 则 M 为 $\triangle DST$ 的垂心, 于是 $ST \parallel BC$. 因为 A 为 EF 关于 $\odot I$ 的极点, 所以 S, A, T 共线, 进而 A 为 ST 的中点. 因为 N 为 $\triangle AEF$ 的外心, 所以 N 为 $\triangle DST$ 九点圆的圆心. 从而对 $\triangle DST$ 用引理得, K, M, N 共线.

故 M, N, L 共线, 命题得证. $\square$



评注 南昌市第二中学魏业勋同学也给出了本题的正确解答, 他通过三角计算证明了 IJ 经过 A 关于 M 的对称点. 山东省实验中学孙永喆同学也给出了本题的正确解答, 他通过复数计算证明了 $IJ \parallel MN$.

第二题 给定正整数 $n \geq 2$. 平面上有 n 个圆, 圆心分别为 $O_1, \ldots, O_n$. 对平面上任意一点 P, 令 $\rho_i(P)$ 为点 P 到圆 O_i 的幂. 称一个 1 到 n 的排列 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ 为合法排列, 若存在点 P 使得

$$\rho_{\tau_1}(P) > \cdots > \rho_{\tau_n}(P).$$

若 n 个圆可以任意选取, 求合法排列个数的最大值.

(人大附中学生 卢远 供题)

解 (**根据供题者的解答整理**):

这 n 个圆两两的根轴将平面分成了若干个区域. 对每块区域中的任意一点 P, 对任意 $1 \leq i < j \leq n$, $\rho_i(P)$ 和 $\rho_j(P)$ 有明确的大小关系. 又显然每个不在任意一条根轴上的点都对应一个合法排列, 故合法排列的个数等于根轴分平面形成的区域数.

当分成的区域数最多时, 显然这 C_n^2 条根轴两两不平行. 此时由蒙日定理, 对每三个圆, 它们的根轴交于一点, 因此至少存在 C_n^3 组根轴三线共点.

当有三条直线交于一点时, 区域总数会减少 1. 熟知 C_n^2 条直线至多将平面

分为 $\frac{(\mathrm{C}_n^2)^2+\mathrm{C}_n^2+2}{2}$ 个区域, 再减去至少存在的 C_n^3 组三线共点, 故这 C_n^2 条根轴至多将平面分为

$$\frac{(\mathrm{C}_n^2)^2+\mathrm{C}_n^2+2}{2}-\mathrm{C}_n^3=\frac{3n^4-10n^3+21n^2-14n+24}{24}$$

个区域.

当这 n 个圆的根轴两两相交, 且无四条交于一点时可以取到最大值.

综上, 合法排列个数的最大值为 $\frac{3n^4-10n^3+21n^2-14n+24}{24}$. □

评注 (1). 本题与 2002 年女子数学奥林匹克第八题类似:

设 $A_1,A_2,\cdots,A_8$ 是平面上任意取定的 8 个点, 对平面上任意取定的一条有向直线 l, 设 $A_1,A_2,\cdots,A_8$ 在该直线上的射影分别是 $P_1,P_2,\cdots,P_8$. 如果这 8 个射影两两不重合, 依直线 l 的方向依次排列为 $P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_8}$, 这样就得到了 $1,2,\cdots,8$ 的一个排列 $i_1,i_2,\cdots,i_8$. 设这 8 个点对平面上所有有向直线作射影后, 得到的不同排列的个数为 $N_8=N(A_1,A_2,\cdots,A_8)$, 求 N_8 的最大值.

(2). 成都七中唐旌凯, 安师大附中胡越洋, 武汉市新洲区第一中学罗云杰, 武汉市武珞路实验初级中学黄俊文等同学也给出了本题的正确解答.

第三题 对正整数 n, 定义 $f(n)=2^n+1$, 而 $f^{(k)}(n)$ 为 $f(n)$ 的 k 次迭代. 是否存在无穷多个正整数 n, 使得 n 整除 $f^{(2020)}(n)$, 但对任意 $1\le k<2020$, n 不整除 $f^{(k)}(n)$?

(湖南师大附中学生 刘宇东 供题)

解 (**根据成都七中唐旌凯同学的解答整理**):

存在.

由 Zsigmondy 定理, 对任意正整数 t, 存在大于 3 的素数 p_t, 使得 2 关于模 p_t 的半阶为 3^{t+2019}, 即 $p_t\mid 2^{3^{t+2019}}+1$, 且对任意 $0<x<3^{t+2019}$, $p_t\nmid 2^x+1$.

下面证明, $n=3^tp_t$ 满足要求.

先证明对 $0\le k\le 2020$, $\nu_3\left(f^{(k)}(3^tp_t)\right)=k+t$. $(*)$

对 k 归纳.

当 $k=0$ 时, $\nu_3(3^tp_t)=t$, 结论成立.

假设 $k-1$ 时成立, 来看 k 时的情形.

因为 $f^{(k-1)}(3^tp_t)$ 是奇数, 所以由指数提升引理和归纳假设,

$$\nu_3\left(f^{(k)}(3^tp_t)\right)=\nu_3\left(2^{f^{(k-1)}(3^tp_t)}+1\right)=\nu_3(2+1)+\nu_3\left(f^{(k-1)}(3^tp_t)\right)=k+t.$$

归纳证毕.

由 2 关于模 p_t 的半阶为 3^{t+2019}, 知

$$p_t \mid f^{(k)}(3^t p_t) \Longleftrightarrow 3^{t+2019} \mid f^{(k-1)}(3^t p_t).$$

由 $(*)$, 这对 $k=2020$ 成立, 而对 $1 \leq k < 2020$ 不成立.

又由 $(*)$, $3^t \mid f^{(2020)}(3^t p_t)$, 所以 $3^t p_t \mid f^{(2020)}(3^t p_t)$. 而由上面的证明, 对 $1 \leq k < 2020$, $3^t p_t \nmid f^{(k)}(3^t p_t)$, 故 $3^t p_t$ 满足要求.

综上, 存在无穷多个满足要求的正整数 n. □

评注 (1). 本题是对 2012 年罗马尼亚大师杯第四题的推广:

证明: 存在无穷多个正整数 n, 使得 $n \mid 2^{2^n+1}+1$, 但 $n \nmid 2^n+1$.

(2). 本题也可以通过归纳构造证明：若 n 满足要求, 则 2^n+1 也满足要求.

(3). 安师大附中胡越洋, 武汉市武珞路实验初级中学黄俊文, 重庆市巴蜀中学郭泓辰等同学也给出了本题的正确解答.

第四题 设 a,b,c,d 为模长不超过 1 的复数, 且满足 $a+b+c+d=0$. 求 $|a^3+b^3+c^3+d^3|$ 的最大值.

(湖南师大附中学生 陈茁卓 供题)

解 1 (**根据人大附中依嘉的解答整理**):

当 $a=0, b=1, c=\omega, d=\omega^2$, 其中 $\omega=e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$ 是三次单位根时, $a+b+c+d=0$, 且 $|a^3+b^3+c^3+d^3|=3$.

下面证明, 总有 $|a^3+b^3+c^3+d^3| \leq 3$.

注意到

$$\begin{aligned}
&|a^3+b^3+c^3+d^3| \\
=&|(a+b)(a^2-ab+b^2)+(c+d)(c^2-cd+d^2)| \\
=&|(a+b)(a^2-ab+b^2-c^2+cd-d^2)| \\
=&|a+b| \cdot |(a+b)^2-(c+d)^2-3ab+3cd| \\
=&3|a+b| \cdot |ab-cd|,
\end{aligned}$$

于是只需证明 $|a+b| \cdot |ab-cd| \leq 1$.

记 $a+b=r$, 通过将 a,b,c,d 同时旋转可不妨设 $r \geq 0$. 当 $r=0$ 时结论显然成立, 当 $r>0$ 时, 只需证明 $|ab-cd| \leq \frac{1}{r}$.

先证明一个引理.

引理 $\left|ab-1+\frac{1}{2r}\right| \leq \frac{1}{2r}$.

证明 当 $0<r<\frac{1}{2}$ 时, 由三角不等式,

$$\left|ab-1+\frac{1}{2r}\right| \le |ab|+\left(\frac{1}{2r}-1\right) \le 1+\left(\frac{1}{2r}-1\right)=\frac{1}{2r}.$$

当 $r \ge \frac{1}{2}$ 时, 设 $a=x_1+y\mathrm{i}, b=x_2-y\mathrm{i}$, 其中 $x_1,x_2,y\in\mathbb{R}$. 则 $x_1+x_2=r, x_1^2+y^2\le 1, x_2^2+y^2\le 1$. 此时

$$ab-1+\frac{1}{2r}=\left(x_1x_2+y^2-1+\frac{1}{2r}\right)+y(x_2-x_1)\mathrm{i},$$

所以只需证明

$$\left(x_1x_2+y^2-1+\frac{1}{2r}\right)^2+y^2(x_2-x_1)^2\le\frac{1}{4r^2},$$

即

$$y^4+\left(-2+\frac{1}{r}+x_1^2+x_2^2\right)y^2+(x_1x_2-1)\left(x_1x_2-1+\frac{1}{r}\right)\le 0.$$

不妨设 $x_1\ge x_2$, 则 $y^2\in[0,1-x_1^2]$, 由二次函数的凸性, 只需证明当 $y^2=0$ 和 $y^2=1-x_1^2$ 的情形.

当 $y^2=0$ 时, 因为 $x_1\le|a|\le 1, x_1+x_2=r$, 所以

$$x_1x_2-1+\frac{1}{r}\ge 1\cdot(r-1)-1+\frac{1}{r}=r+\frac{1}{r}-2\ge 0.$$

又 $x_1x_2\le|x_1x_2|\le|ab|\le 1$, 所以

$$(x_1x_2-1)\left(x_1x_2-1+\frac{1}{r}\right)\le 0.$$

当 $y^2=1-x_1^2$ 时,

$$\begin{aligned}
&y^4+\left(-2+\frac{1}{r}+x_1^2+x_2^2\right)y^2+(x_1x_2-1)\left(x_1x_2-1+\frac{1}{r}\right)\\
&=(1-x_1^2)\left(-1+\frac{1}{r}+x_2^2\right)+(x_1x_2-1)\left(x_1x_2-1+\frac{1}{r}\right)\\
&=-1+x_1^2+\frac{1}{r}-\frac{x_1^2}{r}+x_2^2-x_1^2x_2^2+x_1^2x_2^2-2x_1x_2+1+\frac{1}{r}x_1x_2-\frac{1}{r}\\
&=(x_1-x_2)^2-\frac{1}{r}x_1(x_1-x_2)\\
&=(x_1-x_2)\left((1-\frac{1}{r})x_1-x_2\right).
\end{aligned}$$

因为 $r\ge\frac{1}{2}$, 所以

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)x_1-x_2=\left(2-\frac{1}{r}\right)x_1-r\le 2-\frac{1}{r}-r\le 0.$$

引理证毕.

回到原题. 因为 $(-c)+(-d)=a+b=r$, 所以由引理,

$$\left|cd-1+\frac{1}{2r}\right|=\left|(-c)(-d)-1+\frac{1}{2r}\right|\le\frac{1}{2r}.$$

故由三角不等式,

$$|ab-cd| \le \left|ab-1+\frac{1}{2r}\right| + \left|cd-1+\frac{1}{2r}\right| \le \frac{1}{2r}+\frac{1}{2r}=\frac{1}{r}.$$

综上, 所求最大值为 3. □

解 2 (**根据成都七中唐旌凯同学的解答整理**):

只证 $|a^3+b^3+c^3+d^3| \le 3$.

固定 c, d, 将 $a^3+b^3+c^3+d^3 = a^3-(a+c+d)^3+c^3+d^3$ 视为关于 a 的函数, 其中 $|a| \le 1, |a+c+d| \le 1$. 显然这不是常值函数, 所以由最大模原理, $|a^3+b^3+c^3+d^3|$ 的最大值必在边界处取得, 即要么 $|a|=1$, 要么 $|b|=|a+c+d|=1$.

于是当 $|a^3+b^3+c^3+d^3|$ 取得最大值时, a, b, c, d 任两个中至少有一个的模为 1, 故 a, b, c, d 中至少有 3 个的模为 1.

不妨设 $|a|=|b|=|c|=1$, 设 a, b, c 在复平面内对应的点分别为 A, B, C, 则 A, B, C 在单位圆上. 由 $|a+b+c|=|d| \le 1$, 知 $\triangle ABC$ 的垂心在单位圆内或单位圆上, 从而 $\triangle ABC$ 是锐角或直角三角形.

设 AB, BC, CA 的中点分别为 C_1, A_1, B_1, 则

$$\left|\frac{a+b}{2}\right| = OC_1 = \cos C,$$

$$\left|\frac{b+c}{2}\right| = OA_1 = \cos A,$$

$$\left|\frac{c+a}{2}\right| = OB_1 = \cos B.$$

注意到

$$\begin{aligned}&|a^3+b^3+c^3+d^3|\\ =\ &|a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3| = 3|(a+b)(b+c)(c+a)|\\ =\ &24\left|\frac{a+b}{2}\right|\left|\frac{b+c}{2}\right|\left|\frac{c+a}{2}\right| = 24\cos A\cos B\cos C,\end{aligned}$$

所以只需证明 $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$, 而这是熟知的. □

评注 武汉市武珞路实验初级中学黄俊文, 学军中学施敖、周箴言, 人大附中罗方舟, 清华大学周海刚等同学也给出了本题的正确解答.