数学新星问题征解

第三十九期 (2021.03)

主持: 张端阳

第一题. 求所有的正整数 n, 使得对任意 n 次首一实系数多项式 P, 只要 $P^{(2)}$ 有 n^2 个不同的非正实根, 就有对每个正整数 m, $P^{(m)}$ 有 n^m 个不同的实根. 这里 $P^{(m)}$ 表示 P 的 m 次迭代.

(北京大学学生 杨泓暕 供题)

第二题. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Ω, 内切圆为 ω, ω 与 BC, CA, AB 分别切于点 D, E, F. 延长 EF 交 Ω 于点 P, 直线 PD 分别与 ω, Ω 交于点 G, Q. 设 Ω 在 B, C 处的切线交于点 T. 证明: (1) TG 是 ω 的切线; (2) $\frac{PQ}{DG} = \frac{R+r}{r}$, 其中 R, r 分别是 Ω, ω 的半径.

(法国再保险公司北京分公司 陈舜 华东师范大学 罗振华 供题)

第三题. 求最大的实数 λ, 使得对任意正整数 n 和正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 都有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max\{i,j\} x_i x_j\right) \geq \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4.$$

(人大附中学生 邹明轩 供题)

第四题. 对正整数集的非空有限子集 I, 用 $l(I)$ 表示 I 中所有元素的最小公倍数. 设 n 是大于 1 的整数, k 是不超过 n 的素数的个数. 设 A 是 $\{2, 3, \cdots, n\}$ 的非空子集, 记 $B = \{l(I) \mid I \subseteq A, I \neq \emptyset, l(I) \leq n^2\}$. 求证: 存在 $C \subseteq B$, 使得 $|C| \geq \frac{2}{k+1}|B|$, 且 C 中元素两两不互素.

(华东师范大学第二附属中学学生 王一川 供题)