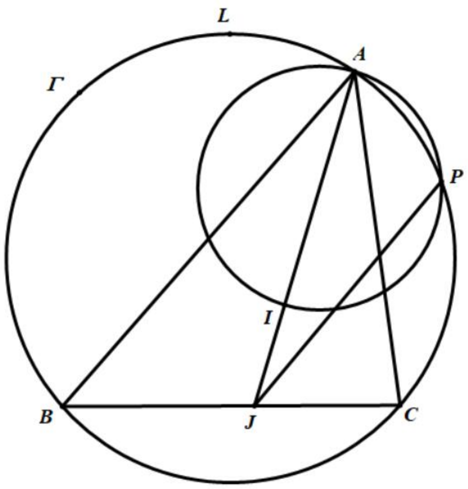
2020年冬季上海新星数学奥林匹克试题

胡珏伟　吴尉迟　冷岗松

2021年2月, 上海数学新星寒假营提供了一套网络自测题. 测试分为两天, 一天四道题, 时间为每天晚上6点到10点.

第一天试题

1. 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 内接于圆 Γ, $AB > AC$, I 为内心, 直线 AI, BC 交于 J, L 为弧 BAC 中点, AI 为直径的圆与圆 Γ 交于另一点 P. 证明: $\triangle AJP$ 的外心在 LI 上.



(成都树德中学 卢圣 供题)

2. 证明存在无穷多组正整数对 $(a,\ b)$, 使得集合

$$\left\{\left\lfloor\frac{a^n}{n}\right\rfloor \mid n\in\mathbb{N}^+\right\} \text{和} \left\{\left\lfloor\frac{b^n}{n}\right\rfloor \mid n\in\mathbb{N}^+\right\}$$

均包含模3的完系, 且 $a-b=2021$.

(湖南师范大学附属中学 刘伟才 供题)

3. 给定整数 $n \geq 4$, 求最小的 $\lambda(n)$, 使得对于任意 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \geq 0$, 满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n,$$

就有

$$\sum_{i=1}^{n} \{a_i\} a_{i+1} \leq \lambda(n)$$

恒成立, 其中, $a_{n+1} = a_1$, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

(长沙一中 宋青山 供题)

4. 设 n 是正整数, $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 是 n 个不同的非空有限集, 满足对任意 $1 \leq i,\ j,\ k \leq n$, 若 $A_i \cap A_j = \varnothing$, 则存在整数 $l(1 \leq l \leq n)$ 使得

$$(A_i \cup A_k) \setminus A_j = A_l.$$

求最大的实常数 c, 使对任意正整数 n 和任意满足上述性质的集合 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$, 存在集合 $I \subseteq \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, 使得

(1) $|I| \geq cn$,

(2) 对任意 $i,\ j \in I,\ A_i \cap A_j \neq \varnothing$.

(华东师范大学第二附属中学 王一川 供题)

第二天试题

5. 设 n 是正整数, $\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \cdots,\ \vec{v_n}$ 是平面中的单位向量, $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 是正数. 证明:可以选取 $\epsilon_i \in \{-1,\ 1\}$, $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$, 使

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i \vec{v_i}$$

满足

$$|\ \vec{x} \cdot \vec{v_k}\ | \geq a_k$$

对 $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 均成立.

(华东师范大学 吴尉迟 供题)

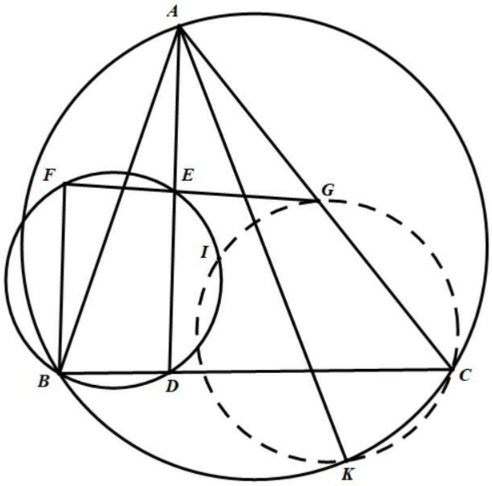
6. 对任意整数 $n \geq 3$, 试找出一个 $\mathbb{Q}$ 上不可约的 n 次多项式 $f(x)$, 使得对任意 $g(x) \in \mathbb{Q}[x](1 < \deg g < n)$, 均有 $f(x) \nmid f(g(x))$.

(华东师范大学 罗振华 供题)

7. $\triangle ABC$ 内心为 I, D 为 BC 边上一点, AD 再次交 $\triangle BDI$ 外接圆于点 E. 过 B 作 AD 平行线再次交 $\triangle BDI$ 外接圆于点 F, FE 交 AC 于点 G, K 在

$\triangle ABC$ 外接圆上满足 $\angle BAD = \angle CAK$.

证明: C, G, I, K 共圆.



(温州中学 金晟治 供题)

8. 设 $n \geq 2$ 是给定的整数. 求所有的实数 α, 使得存在函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 满足对任意实数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 均有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j|^{\alpha}.$$

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)