第三十六期问题征解解答与点评

张端阳

第一题 求所有的整数 α, 使得对任意正整数 n 以及任意乘积为 1 的正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 都有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^\alpha}{1-a_i+a_i^\alpha} \le n.$$

另外求所有的整数 α 使得上面不等式的反方向永远成立.

(山大附中学生 王子彧 傅浩桐 供题)

解 (根据供题者的解答整理):

记 $f(\alpha)=\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i^\alpha}{1-a_i+a_i^2}$. 注意到

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^\alpha}{1-a_i+a_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i^{-1})^{2-\alpha}}{1-a_i^{-1}+(a_i^{-1})^2},$$

又当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是乘积为 1 的正实数时, $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \cdots, a_n^{-1}$ 也是乘积为 1 的正实数, 所以 $f(\alpha)$ 与 $f(2-\alpha)$ 等价. 于是只需考虑 α 是正整数的情形.

下面分四种情形讨论.

情形 1: 当 $\alpha=1$ 时, 由均值不等式,

$$f(1)=\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_i+a_i^2} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i} = n,$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时取到.

情形 2: 当 $\alpha=2$ 时, 若取 $a_1=2, a_2=\frac{1}{2}, a_3=\cdots=a_n=1$, 则

$$f(2)=n-\frac{1}{3}<n;$$

若取 $a_1=\cdots=a_{n-1}=2, a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$, 则

$$f(2) \ge \frac{4}{3}(n-1) > n$$

在 $n \ge 5$ 时成立. 于是 $f(2)$ 既可以小于 n, 也可以大于 n.

情形 3: 当 $\alpha=3$ 时, 记函数

$$g(x)=\frac{x^3}{1-x+x^2}-2\ln x, x>0.$$

因为

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{x^4-2x^3+3x^2}{(1-x+x^2)^2}-\frac{2}{x}\\&=\frac{x^5-4x^4+7x^3-6x^2+4x-2}{x(1-x+x^2)^2}\\&=\frac{(x-1)\left(x^2(x-\frac{3}{2})^2+(x-1)^2+1+\frac{3}{4}x^2\right)}{x(1-x+x^2)^2},\end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 于是 $g(x)\geq g(1)=1$. 故

$$f(3)=\sum_{i=1}^{n}g(a_i)\geq n.$$

情形 4: 当 $\alpha\geq 4$ 时, 记函数

$$h(x)=\frac{x^\alpha}{1-x+x^2}, x>0,$$

则

$$f'(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^\alpha}{1-a_i+a_i^2}\cdot\ln a_i=\sum_{i=1}^{n}h(a_i)\cdot\ln a_i.$$

因为

$$\begin{aligned}h'(x)&=\frac{\alpha x^{\alpha-1}(1-x+x^2)-x^\alpha(2x-1)}{(1-x+x^2)^2}\\&=\frac{x^{\alpha-1}((\alpha-2)x^2-(\alpha-1)x+\alpha)}{(1-x+x^2)^2},\end{aligned}$$

又当 $\alpha\geq 3$ 时,

$$\alpha-2>0,\quad \triangle=(\alpha-1)^2-4\alpha(\alpha-2)=-3(\alpha-1)^2+4\leq 0,$$

所以 $h'(x)\geq 0$, 于是 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调不减.

不妨设 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$, 则

$$\ln a_1\leq\ln a_2\leq\cdots\leq\ln a_n,\quad h(a_1)\leq h(a_2)\leq\cdots\leq h(a_n).$$

从而由 Chebyshev 不等式,

$$f'(\alpha)\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}h(a_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln a_i\right)=0,$$

于是 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调不减. 故 $f(\alpha)\geq f(3)\geq n$.

综上, 使得 $f(\alpha)\leq n$ 恒成立的整数 α 只有 1, 使得 $f(\alpha)\geq n$ 恒成立的整数 α 为所有大于等于 3 或小于等于 -1 的整数. □

评注 (1). 人大附中陈锐韬同学对于 $\alpha \geq 4$ 时的情形给出了如下做法:

由 Hölder 不等式,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha}}{1-a_i+a_i^2}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-a_i+a_i^2}\right)^{\alpha-3}\geq\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{1-a_i+a_i^2}\right)^{\alpha-1}.$$

因此由 $f(1)\leq n, f(3)\geq n$ 即得 $f(\alpha)\geq n$.

山东省实验中学孙永喆同学对于 $\alpha \geq 4$ 时的情形给出了如下做法:

由均值不等式, 对 $1\leq i\leq n$,

$$2\cdot\frac{a_i^{\alpha}}{1-a_i+a_i^2}+2(1-a_i+a_i^2)+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\alpha-4\text{个}}\geq\alpha a_i^2.$$

对 i 从 1 到 n 求和得,

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha}}{1-a_i+a_i^2}\geq(\alpha-2)\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_i-(\alpha-2)n.$$

再由 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\geq n, \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\geq n$ 即得 $f(\alpha)\geq n$.

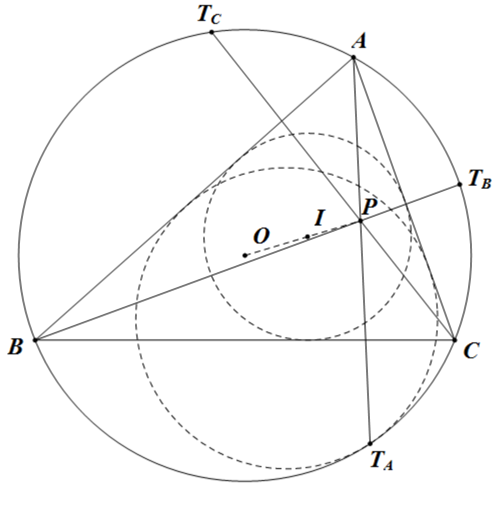
(2). 湖南省长沙市南雅中学黄叶, 桐乡高级中学冯屹霄, 武汉市新洲区第一中学罗云杰, 长郡中学刘楚才等同学也给出了本题的正确解答.

第二题 设 $\triangle ABC$ 的外心和内心分别为 O 和 I. 外接圆上弧 $\widehat{BAC}$ 的中点为 N_1, $\angle BAC$ 所对的旁切圆在 BC 上的切点为 D_1. 将 $\triangle AN_1D_1$ 的外接圆记为 Γ_1, 类似定义 Γ_2,Γ_3. 令 P 为 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 这三个圆的根心, 求证 P 在直线 OI 上.

(人大附中学生 董天诺 供题)

证明 (**根据供题者的解答整理**):

我们证明, P 是 $\odot O$ 与 $\odot I$ 的外位似中心.



重新定义 P 是 $\odot O$ 与 $\odot I$ 的外位似中心, 只需证明 P 到 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 的幂相

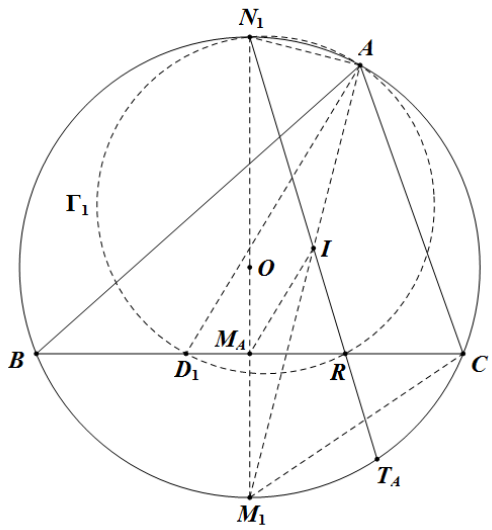
等.

先证明一个引理.

引理 设 T_A 是 A–伪内切圆与 $\odot O$ 的切点, 类似定义点 T_B, T_C, 则 AT_A, BT_B, CT_C 共点于 P.

证明 由 Monge 定理, $\odot O, \odot I$ 及 A–伪内切圆两两的外位似中心 A, P, T_A 共线, 即 AT_A 过 P. 同理, BT_B, CT_C 均过 P. 引理证毕.

回到原题. 由伪内切圆的熟知结论, N_1, I, T_A 共线, 设该直线与 BC 交于点 R.



下面证明, R 在 Γ_1 上, 即 A, N_1, D_1, R 共圆.

事实上, 设直线 N_1O 与 BC 交于点 M_A、与 $\widehat{BC}$ 交于点 M_1, 则 A, I, M_1 共线. 由内心的性质及射影定理,

$$M_1I^2 = M_1C^2 = M_1M_A \cdot M_1N_1,$$

所以 $\triangle M_1M_AI \sim \triangle M_1IN_1$, 于是

$$\angle IN_1A = \angle M_1IN_1 - 90^\circ = \angle M_1M_AI - 90^\circ = \angle IM_AC.$$

又熟知 $IM_A \parallel AD_1$, 所以

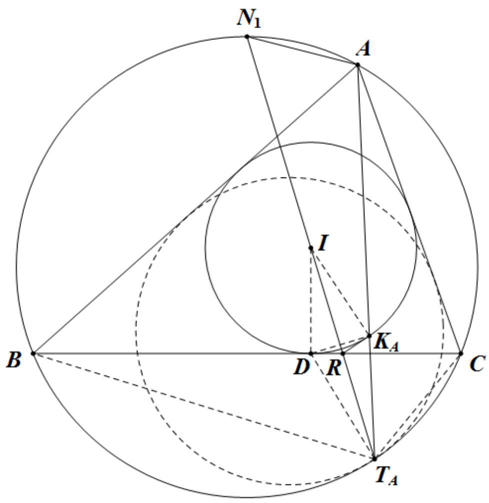
$$\angle AN_1R = \angle IM_AR = \angle AD_1R,$$

故 A, N_1, D_1, R 共圆.

设 AT_A 与 $\odot I$ 靠近 T_A 的交点为 K_A.

下面证明, K_A 在 Γ_1 上, 即 A, K_A, R, N_1 共圆.

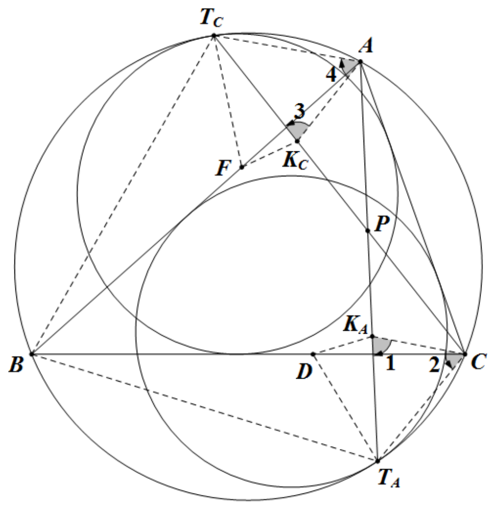
熟知 T_AD, T_AA 是 $\angle BT_AC$ 的等角线, 结合 N_1T_A 平分 $\angle BT_AC$, 知 N_1T_A 平



分 $\angle DT_AK_A$. 又因为 $ID=IK_A$, 所以 IT_A 是线段 DK_A 的垂直平分线. 于是

$$\angle AN_1R=\angle ABT_A=\angle RDT_A=\angle RK_AT_A,$$

故 A,K_A,R,N_1 共圆.



根据之前的推导, P 到 Γ_1 的幂为 $-PA\cdot PK_A$. 同理, P 到 Γ_3 的幂为 $-PC\cdot PK_C$. 因此只需证明 $PA\cdot PK_A=PC\cdot PK_C$, 即 A,K_C,K_A,C 共圆.

如图, 记

$$\angle 1=\angle CK_AT_A,\quad \angle 2=\angle K_ACT_A,\quad \angle 3=\angle AK_CT_C,\quad \angle 4=\angle K_CAT_C.$$

由 $\triangle CT_AA\sim\triangle DT_AB$, 知

$$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}=\frac{T_AC}{T_AK_A}=\frac{T_AC}{T_AD}=\frac{CA}{BD}.$$

类似地,

$$\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4}=\frac{T_CA}{T_CK_C}=\frac{T_CA}{T_CF}=\frac{CA}{BF},$$

所以
$$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}=\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4}.$$
又因为
$$\angle 1+\angle 2=180^\circ-\angle K_AT_AC=180^\circ-\angle K_CT_CA=\angle 3+\angle 4<180^\circ,$$
所以 $\angle 1=\angle 3$, 故 A,K_C,K_A,C 共圆.

综上, 命题得证. □

评注 成都实验外国语学校黄楚锋, 杭州学军中学郑思源、叶梓, 湖南省长沙市南雅中学石育锟、欧阳仁鼎, 南昌市第二中学魏业勋, 南宁三中高曼书, 山大附中肖行健、朱鹤延, 石家庄二中赵柳烨, 长郡中学刘楚才、刘尧瑞、王子晗、周祖毅, 人大附中陈锐韬, 重庆市巴蜀中学陈冠霖等同学也给出了本题的正确解答.

第三题 给定正整数 $n\geq 4$. 考虑所有和为 n 的非整数的正实数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$. 求最优的常数 $C_1(n)$ 以及 $C_2(n)$, 使得下面不等式恒成立:
$$C_1(n)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i\cdot\{x_i\}}{x_i+1}\leq C_2(n),$$
其中 $\{x_i\}$ 为 x_i 的小数部分.

(湖南师大附中学生 夏阳 供题)

解 (**根据供题者的解答整理**):

记 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i\cdot\{x_i\}}{x_i+1}$.

先求 S 的下界.

对 $0<\varepsilon<1$, 取 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=\frac{1-\varepsilon}{n-1}, x_n=n-1+\varepsilon$. 则
$$S=(n-1)\cdot\frac{\frac{(1-\varepsilon)^2}{(n-1)^2}}{\frac{1-\varepsilon}{n-1}+1}+\frac{(n-1+\varepsilon)\varepsilon}{n+\varepsilon}\to\frac{1}{n}(\varepsilon\to 0),$$
所以 $C_1(n)\leq\dfrac{1}{n}$.

下面证明 $C_1(n)=\dfrac{1}{n}$ 时不等式成立.

不妨设 $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n$. 因为当 $x\geq 0$ 时, $x\geq\{x\}$, 又函数 $y=\dfrac{x}{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 所以
$$S\geq\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\{x_i\}^2}{\{x_i\}+1}+\frac{x_n\{x_n\}}{x_n+1}\geq\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\{x_i\}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\{x_i\}+n-1}+\frac{x_n\{x_n\}}{x_n+1},\qquad(*)$$

其中最后一步用到了柯西不等式.

记 $\sum\limits_{i=1}^{n}\{x_i\}=k$. 因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=n$ 是整数, 所以 k 是整数, 又 x_i 均不是整数, 所以 k 是正整数.

当 $k\ge 2$ 时, 由 $\{x_n\}<1$ 知 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\{x_i\}>1$, 所以

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\{x_i\}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\{x_i\}+n-1}\ge\frac{1}{n}\Leftrightarrow\left(n\sum_{i=1}^{n-1}\{x_i\}+n-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\{x_i\}-1\right)\ge 0,$$

成立. 故由 $(*)$,

$$S\ge\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\{x_i\}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\{x_i\}+n-1}\ge\frac{1}{n}.$$

当 $k=1$ 时, 记 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\{x_i\}=m$, 则 $0<m<1$ 且 $\{x_n\}=1-m$. 又由 x_n 最大知 $x_n\ge 1$, 所以 $[x_n]\ge 1$, 故

$$x_n=[x_n]+\{x_n\}\ge 2-m.$$

从而由 $(*)$,

$$S\ge\frac{m^2}{m+n-1}+\frac{(2-m)(1-m)}{3-m}.$$

而

$$\begin{aligned}&\frac{m^2}{m+n-1}+\frac{(2-m)(1-m)}{3-m}\ge\frac{1}{n}\\ \Leftrightarrow&m^2(3-m)n+(m+n-1)(m^2-3m+2)n\ge(m+n-1)(3-m)\\ \Leftrightarrow&(n^2-n+1)m^2-(3n^2-6n+4)m+(2n^2-5n+3)\ge 0.\end{aligned}$$

记函数

$$g(x)=(n^2-n+1)x^2-(3n^2-6n+4)x+(2n^2-5n+3),$$

由 $n\ge 4$, 知其对称轴

$$\frac{3n^2-6n+4}{2(n^2-n+1)}\ge 1,$$

所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, 于是

$$g(m)\ge g(1)=(n^2-n+1)-(3n^2-6n+4)+(2n^2-5n+3)=0$$

成立.

综上, $C_1(n)$ 的最优值为 $\frac{1}{n}$.

再求 S 的上界.

对 $0<\varepsilon<\frac{1}{n-1}$, 取 $x_1=(n-1)\varepsilon, x_2=\cdots=x_{n-1}=1-\varepsilon, x_n=2-\varepsilon$. 则

$$S=\frac{(n-1)^2\varepsilon^2}{(n-1)\varepsilon+1}+\frac{(n-2)(1-\varepsilon)^2}{2-\varepsilon}+\frac{(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon}\to\frac{3n-2}{6}(\varepsilon\to 0),$$

所以 $C_2(n)\geq\frac{3n-2}{6}$.

下面证明 $C_2(n)=\frac{3n-2}{6}$ 时不等式成立.

不妨设 $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_t<1\leq x_{t+1}\leq\cdots\leq x_n$. 注意到当 $x\in[a,a+1)$, 其中 $a\in\mathbb{N}$ 时,

$$\frac{\{x\}}{x+1}=\frac{x-a}{x+1}<\frac{1}{a+2},$$

所以

$$\begin{aligned}S=&\sum_{i=1}^{t}\frac{x_i\{x_i\}}{x_i+1}+\sum_{j=t+1}^{n}\frac{x_j\{x_j\}}{x_j+1}<\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}x_i+\frac{1}{3}\sum_{j=t+1}^{n}x_j\\=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}x_i+\frac{1}{3}\left(n-\sum_{i=1}^{t}x_i\right)=\frac{n}{3}+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{t}x_i.\end{aligned}$$

当 $\sum\limits_{i=1}^{t}x_i\leq n-2$ 时,

$$S<\frac{n}{3}+\frac{1}{6}(n-2)=\frac{3n-2}{6}.$$

当 $\sum\limits_{i=1}^{t}x_i>n-2$ 时, $t=n-1$, 所以 $x_n\in(1,2)$, 此时

$$S=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i^2}{x_i+1}+\frac{x_n(x_n-1)}{x_n+1}.$$

因为

$$(x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_2,x_1)\prec(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-2\text{个}},2-x_n),$$

且易知 $y=\frac{x^2}{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是下凸函数, 所以由 Karamata 不等式,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i^2}{x_i+1}\leq\frac{n-2}{2}+\frac{(2-x_n)^2}{3-x_n}.$$

于是只需证明

$$\frac{(2-x_n)^2}{3-x_n}+\frac{x_n(x_n-1)}{x_n+1}\leq\frac{2}{3}.$$

化简知, 这等价于

$$5x_n^2-13x_n+6\leq 0,$$

即 $\frac{3}{5}\leq x_n\leq 2$, 由 $1<x_n<2$ 即证.

综上, $C_2(n)$ 的最优值为 $\frac{3n-2}{6}$. □

评注 安师大附中胡越洋, 人大附中陈锐韬, 武汉市新洲区第一中学罗云杰, 长郡中学刘楚才等同学也给出了本题的正确解答.

第四题 正整数 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{27}$ 满足这些数没有大于 1 的公因子, 且每个 x_i 均整除它们的和. 若 x_{27} 是一个素数, 求这个素数的所有可能值.

(吉林大学 苏绛毓 供题)

解 (根据供题者的解答整理):

先注意到对任意的素数 $p \le 26$, 都有一组满足题意的正整数, 使得 $x_{27} = p$. 事实上, 令

$$x_i = \begin{cases} 1, i \in \{1, 2, \cdots, p\} \\ p, i \in \{p+1, p+2, \cdots, 27\} \end{cases}$$

即可.

下面证明一个引理.

引理 对于正整数 $a \le b$, 区间 $[b, (b-a+2)\cdot 2^a - 2]$ 中的每个正奇数 c 都可以表示为 $\sum\limits_{i=1}^{b} 2^{a_i}$ 的形式, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_b$ 是不超过 a 的非负整数.

证明 首先, 归纳证明区间 $[b, (b-a+1)\cdot 2^a - 1]$ 中的每个正整数 c 都可以表示为引理中的形式.

当 $c = b$ 时, 可取所有的 a_i 都是 0.

假设 $c \le (b-a+1)\cdot 2^a - 2$ 且 c 时结论成立, 设 $c = \sum\limits_{i=1}^{b} 2^{a_i}$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_b$ 是不超过 a 的非负整数. 注意到至多有 $b-a$ 个 a_i 等于 a, 所以至少有 a 个 a_i 小于 a. 若小于 a 的 a_i 互不相同, 则恰有 a 个 a_i 小于 a, 且 $0, 1, \cdots, a-1$ 各一个. 这样,

$$\sum_{i=1}^{b} 2^{a_i} = (b-a)\cdot 2^a + (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{a-1}) = (b-a+1)\cdot 2^a - 1,$$

与 $c \le (b-a+1)\cdot 2^a - 2$ 矛盾! 因此存在下标 i_1 和 i_2, 使得 $a_{i_1} = a_{i_2} = d$, 其中 $0 \le d < a$. 记 $a'_{i_1} = d+1, a'_{i_2} = 0$, 其余 $a'_i = a_i$, 则所有 a'_i 都是不超过 a 的非负整数, 且 $c+1 = \sum\limits_{i=1}^{b} 2^{a'_i}$.

归纳证毕.

其次, 当 $(b-a+1)\cdot 2^a \le c \le (b-a+2)\cdot 2^a - 2$ 时, 记

$$c' = c - (b-a+1)\cdot 2^a + 1,$$

则 $1 \le c' \le 2^a - 1$. 由 c 是奇数, 知 c' 是偶数, 所以 c' 可以表示为 $\sum\limits_{i=1}^{a-1} s_i \cdot 2^i$ 的形

式, 其中 $s_i \in \{0,1\}$. 此时, 取

$$a_i=\begin{cases}0, & i=1\\ i-1+s_{i-1}, & i\in\{2,3,\cdots,a\}\\ a, & i\in\{a+1,a+2,\cdots,b\}\end{cases},$$

则所有 a_i 都是不超过 a 的非负整数. 又注意到总有

$$s_i\cdot 2^i=2^{i+s_i}-2^i,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{b}2^{a_i}=&2^0+\sum_{i=1}^{a-1}2^{i+s_i}+(b-a)\cdot 2^a\\ =&1+\sum_{i=1}^{a-1}(s_i\cdot 2^i+2^i)+(b-a)\cdot 2^a\\ =&1+\sum_{i=1}^{a-1}s_i\cdot 2^i+(2^a-2)+(b-a)\cdot 2^a\\ =&c'+(b-a+1)\cdot 2^a-1=c.\end{aligned}$$

引理证毕.

对素数 $27\le p\le 157$, 对 $a=4,b=12$ 应用引理 1, 因为 $(b-a+2)\cdot 2^a-2=158$, 所以我们可以把 p 写成 12 个不超过 2 的 4 次幂之和. 此时把这 12 项按照单调不减的顺序记为 x_1 到 x_{12}, 再令 $x_{13}=x_{14}=\cdots=x_{27}=p$, 容易验证 $x_1,x_2,\cdots,x_{27}$ 满足题意.

接下来证明, 若素数 $p>183$, 则一定不存在满足题意的正整数组, 使得 $x_{27}=p$.

假设存在, 因为 $x_{27}\mid\sum\limits_{i=1}^{27}x_i$, 所以可设 $\sum\limits_{i=1}^{27}x_i=kp$, 其中 k 是正整数. 因此对任意的 $1\le i\le 27$, 都有 $x_i\mid kp$. 设 i_0 是最小的使得 $x_i=p$ 的下标, 因为 $x_1,x_2,\cdots,x_{27}$ 没有大于 1 的公因子, 所以 $i_0\ge 2$. 因为

$$\sum_{i=1}^{27}x_i>\sum_{i=i_0}^{27}x_i=(28-i_0)p,$$

所以 $k\ge 29-i_0$.

下面分两种情形讨论.

情形 1: $k=29-i_0$. 此时

$$\sum_{i=1}^{i_0-1}x_i=(29-i_0)p-(28-i_0)p=p.$$

因为对 $1 \le i \le i_0 - 1$, $x_i < p$, 而 $x_i \mid kp$, 所以 $x_i \mid k$.

若 $x_1, x_2 < k$, 则 $x_1, x_2 \le \frac{k}{2}$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{i_0-1} x_i \le (i_0 - 2)k$.

若对 $2 \le i \le i_0 - 1$, 都有 $x_i = k$, 则对这些 i, $x_1 \mid x_i$. 又 $\sum\limits_{i=1}^{i_0-1} x_i = p$, 所以 $x_1 \mid p$. 于是 $x_1 = 1$, 进而 $\sum\limits_{i=1}^{i_0-1} x_i \le (i_0 - 2)k + 1$.

从而总有

$$p = \sum_{i=1}^{i_0-1} x_i \le (i_0 - 2)k + 1 = (27 - k)k + 1 \le 13 \times 14 + 1 = 183,$$

矛盾!

情形 2: $k \ge 30 - i_0$. 此时对 $1 \le i \le i_0 - 1$, 仍有 $x_i \le k$. 因为

$$\sum_{i=1}^{i_0-1} x_i = kp - (28 - i_0)p = (k + i_0 - 28)p,$$

所以

$$(k + i_0 - 28)p \le (i_0 - 1)k.$$

因此

$$\begin{aligned} p \le \frac{(i_0-1)k}{k+i_0-28} &= i_0 - 1 + \frac{(i_0-1)(28-i_0)}{k+i_0-28} \\ &\le i_0 - 1 + \frac{(i_0-1)(28-i_0)}{2} \qquad (*) \\ &\le 26 + \frac{27^2}{8} < 118, \end{aligned}$$

矛盾!

最后, 只需要再讨论 $p = 163, 167, 173, 179, 181$ 的情形.

对 $p = 163$, 令

$$x_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 9, & i \in \{2, 3, \cdots, 19\} \\ 163, & i \in \{20, 21, \cdots, 27\} \end{cases};$$

对 $p = 167$, 令

$$x_i = \begin{cases} 2, & i = 1 \\ 5, & i = 2 \\ 10, & i \in \{3, 4, \cdots, 18\} \\ 167, & i \in \{19, 20, \cdots, 27\} \end{cases};$$

对 $p=173$, 令

$$x_i=\begin{cases}2, & i=1\\ 3, & i=2\\ 12, & i\in\{3,4,\cdots,16\}\\ 173, & i\in\{17,18,\cdots,27\}\end{cases};$$

对 $p=181$, 令

$$x_i=\begin{cases}1, & i=1\\ 12, & i\in\{2,3,\cdots,16\}\\ 181, & i\in\{17,18,\cdots,27\}\end{cases},$$

容易验证满足题意.

最后证明, 对 $p=179$, 不存在满足题意的正整数组.

事实上, 如果存在, 则由之前的讨论, 存在 $2\le i_0\le 27$, 使得

$$179(k+i_0-28)\le(i_0-1)k.$$

由 $(*)$, 当 $k\ge 30-i_0$ 时不存在这样的 i_0, 因此 $k=29-i_0$.

此时, $179\le(i_0-1)(29-i_0)$, 解得 $11\le i_0\le 19$.

对给定的 i_0, 当且仅当有 i_0-1 个 $29-i_0$ 的因子使得它们的和为 179 时有这样的正整数组. 然而当我们检验了 $11\sim 19$ 后, 并没有发现满足上述要求的 i_0.

综上, 若将素数从小到大排列为 $p_1,p_2,\cdots$, 则本题的答案为 $p_1,p_2,\cdots,p_{40}$ 以及 p_{42}. □

评注 (1). 对于 $27\le p\le 173$ 及 $p=181$ 的情形, 湖南省长沙市南雅中学朱凯峰和石育锟同学采用了统一的构造方式: 令 $x_1,x_2,\cdots,x_{13}$ 中有 a 个 1、b 个 3、c 个 5、d 个 15, 其中 a,b,c,d 是非负整数, 且满足

$$\begin{cases}a+b+c+d=13\\ a+3b+5c+15d=p\end{cases},$$

再令 $x_{14}=x_{15}=\cdots=x_{27}=p$. 细节读者可自行补全.

(2). 巴蜀中学罗登尧、瞿霄宇, 杭州学军中学郑思源, 人大附中陈锐韬, 长郡中学刘楚才等同学也给出了本题的正确解答.