2020 年上海新星秋季数学奥林匹克试题解析

胡珏伟　吴尉迟　冷岗松

2020 年 12 月, 上海数学新星秋季精品营举行了一次测试. 测试共六道题, 时间从 8 点到 12 点共 4 个小时. 试题已发布在数学新星网教师专栏 2020-12-20 期供大家自测. 这次测验题目较难, 下面就给出这些试题相应的解答. 不当之处, 敬请读者批评指正.

题 1 求最小的实数 λ, 使得对任意满足 $\sum\limits_{i=1}^{20} ix_i = 0$ 的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{20}$, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{20} i^2 x_i\right| \le \lambda \max_{1\le i\le 20} |x_i|.$$

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

解 一方面, 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{14} = 1$, $x_{15} = x_{16} = \cdots = x_{20} = -1$ 时,

$$\sum_{i=1}^{20} ix_i = \sum_{i=1}^{14} i - \sum_{i=15}^{20} i = 105 - 105 = 0,$$

满足条件. 所以

$$\lambda \ge \left|\sum_{i=1}^{14} i^2 - \sum_{i=15}^{20} i^2\right| = |1015 - 1855| = 840.$$

另一方面, 由题设条件及三角不等式, 有

$$\left|\sum_{i=1}^{20} i^2 x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{20} (i^2 - 14i) x_i\right| \le \sum_{i=1}^{20} |i^2 - 14i| \cdot |x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{20} |i^2 - 14i|\right) \max_{1\le i\le 20} |x_i|.$$

注意到, $\sum\limits_{i=1}^{20} |i^2 - 14i| = 840$, 即 $\lambda = 840$ 时不等式成立.

综上可得所求最小值为 840. □

评注 本题是中等难度的代数题, 考试中约 31% 做对此题. 对于一般的正整数 n, 需要存在正整数 $k < n$, 使得

$$1 + 2 + \cdots + k = (k+1) + (k+2) + \cdots + n,$$

修订日期: 2020-12-23.

变形得 Pell 方程

$$(2n+1)^2-2(2k+1)^2=-1.$$

选取 $n=20$ 一方面计算量适中, 另一方面与年份相合.

题 2 称边不相交的 n 边形为简单 n 边形. 求简单 n 边形外对角线(整个对角线上的内点均在形外)数目的最大值.

(清华大学 王琇 供题)

解 先证如下引理.

引理 简单 n 边形有至少 $n-3$ 条内对角线.

证明 对 n 使用数学归纳法. 当 $n=3$ 时, 显然成立.

假设当 $n\le k$ 时成立, 当 $n=k+1$ 时, 建立直角坐标系, 使得任两点纵坐标不相等. 取纵坐标最大的顶点 A, 与之相邻的点为 B, C.

若 BC 在形内, 则考虑 BC 与剩下 $k-2$ 个点围成的 k 边形中至少有 $k-3$ 条内对角线. 这 $k-3$ 条内对角线均为 $k+1$ 边形的内对角线, 同时 BC 也为 $k+1$ 边形的内对角线, 故此时内对角线数目至少为 $k-3+1=k-2$ 条, 结论成立.

若 BC 部分在形内, 则 $\triangle ABC$ 内部必有 $k+1$ 边形的顶点. 设这些顶点中 D 到 BC 的距离最远, 那么 AD 一定全部在形内, 否则一定会有顶点在 $\triangle ABC$ 内距离 BC 更远. 此时 AD 将多边形分为 $k+1-t+1$ 边形与 $t+1(t\ge 2)$ 边形, 它们各自有不少于 $k+1-t-2$ 与 $t-2$ 条内对角线, 也是该 $k+1$ 边形的内对角线. 又 AD 也是一条内对角线, 故此时内对角线的数目至少为

$$1+(k+1-t-2)+(t-2)=k+1-3$$

条. 结论成立.

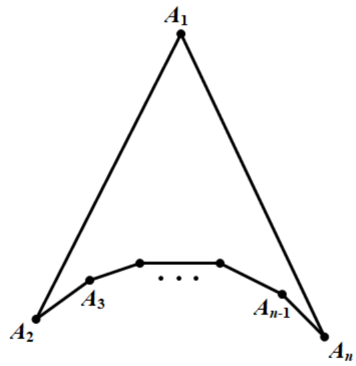
综上可得, 当 $n=k+1$ 时结论成立. 引理得证!

回到原题. 考虑到简单 n 边形共有 C_n^2-n 条对角线, 故

$$\text{外对角线数}\le \mathrm{C}_n^2-n-(n-3)=\frac{1}{2}(n-2)(n-3).$$

构造如下图: 取 A_2, A_3, $\cdots$, A_n 为一个凸多边形上连续的顶点, 并取点 A_1 使得 A_3 与 A_1 在 A_2A_n 同侧, 且 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 顺次构成 n 边形, 则 $A_iA_j(2\le i<j\le n,\ j-i\ne 1)$ 为 $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ 条外对角线. $\square$

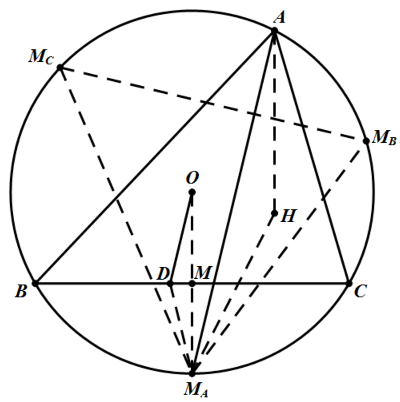
评注 本题是中等难度的组合题, 考试中约 15% 做对此题. 切入点是对外对



角线的"反面"内对角线进行计数, 由三角剖分可知简单 n 边形至少有 $n-3$ 条内对角线, 结合简单 n 多边形的对角线条数为 C_n^2-n, 即知简单 n 多边形外对角线条数的最大值.

题 3 在锐角 $\triangle ABC$ 中, O 是外心, M_A, M_B, M_C 分别是外接圆劣弧 $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ 的中点. 过 O 作 AM_A, BM_B, CM_C 的平行线, 分别与 BC, CA, AB 交于点 D, E, F. 证明: 直线 M_AD, M_BE, M_CF 交于一点.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)



证明 设 $\triangle ABC$ 的垂心是 H, BC 的中点是 M, $\odot O$ 的半径是 R. 我们证明 $\triangle DOM_A \sim \triangle HAM_A$. 事实上, 一方面由 $OD \parallel AM_A$, $OM_A \parallel AH$, 知

$$\angle DOM_A = \angle M_AAH. \qquad ①$$

另一方面, 由 $OD \parallel AM_A$ 知

$$\angle DOM = 90^\circ - \angle ODM = 90^\circ - \left(180^\circ - \frac{A}{2} - C\right) = \frac{C-B}{2}.$$

故

$$OD = \frac{OM}{\cos\angle DOM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{AH}{\cos\frac{C-B}{2}},$$

而

$$AM_A = 2R\sin\angle ABM_A = 2R\sin\left(\frac{A}{2}+B\right) = 2R\cos\frac{C-B}{2},$$

因此

$$\frac{OD}{AH} = \frac{1}{2\cos\frac{C-B}{2}} = \frac{R}{2R\cos\frac{C-B}{2}} = \frac{OM_A}{AM_A}. \qquad ②$$

由①, ②知 $\triangle DOM_A \sim \triangle HAM_A$, 于是 $\angle OM_AD = \angle AM_AH$. 又

$$\angle OM_AM_C = 90^\circ - \angle M_CM_BM_A = \angle AM_AM_B,$$

所以 $\angle DM_AM_C = \angle HM_AM_B$, 即 M_AD, M_AH 是 $\angle M_CM_AM_B$ 的等角线.

同理, M_BE, M_BH 是 $\angle M_AM_BM_C$ 的等角线, M_CF, M_CH 是 $\angle M_BM_CM_A$ 的等角线. 故 M_AD, M_BE, M_CF 交于 H 关于 $\triangle M_AM_BM_C$ 的等角共轭点. □

评注 本题是较难的几何题, 考试中约 5% 做对此题. 从结论出发本题要求证明 M_AD, M_BE, M_CF 交于一点, 较难用到平行的条件, 考虑做该点关于 $\triangle M_AM_BM_C$ 的等角共轭点 H, 事实上点 H 即为 $\triangle ABC$ 的垂心. 此时便将原题所求证明转化为说明 M_AD, M_AH 是 $\angle M_CM_AM_B$ 的等角线.

题 4 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是非负实数, $\lambda\in[0,1]$, $A=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$, 且 $a_1, \cdots, a_n$ 中恰有 m 个数不小于 λA. 证明:

$$m\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \geq (1-\lambda)^2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2.$$

(华东师范大学 罗振华 供题)

证明 1 记 $S=\{i \mid a_i\geq\lambda A,\ 1\leq i\leq n\}$, 则 $|S|=m$.

当 $i\notin S$, $1\leq i\leq n$ 时, $a_i<\lambda A$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_i &= \sum_{i\in S}a_i+\sum_{i\notin S}a_i \leq \sum_{i\in S}a_i+\sum_{i\notin S}\lambda A = \sum_{i\in S}a_i+(n-m)\lambda A\\ &\leq \sum_{i\in S}a_i+n\lambda A = \sum_{i\in S}a_i+\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i.\end{aligned}$$

即

$$(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}a_i \leq \sum_{i\in S}a_i.$$

则

$$(1-\lambda)^2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i\in S}a_i\right)^2.$$

故由柯西不等式, 有

$$m\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \geq m\sum_{i\in S}a_i^2 \geq \left(\sum_{i\in S}a_i\right)^2 \geq (1-\lambda)^2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2.$$

命题得证! □

证明 2 由齐次性不妨假设 $A=1$, 原不等式等价于

$$m\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \geq (1-\lambda)^2 n^2.$$

由对称性, 不妨设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, 考虑

$$(a_1',\ a_2',\ \cdots,\ a_n') = \left(\frac{n-(n-m)\lambda}{m},\ \cdots,\ \frac{n-(n-m)\lambda}{m},\ \lambda,\ \cdots,\ \lambda\right)$$

其中前 m 项为 $\frac{n-(n-m)\lambda}{m}$, 后 $n-m$ 项为 λ. 显然

$$\sum_{i=1}^{n}a_i = \sum_{i=1}^{n}a_i' = n,$$

注意到当 $0 \leq \lambda \leq 1$ 时,

$$\frac{n-(n-m)\lambda}{m} \geq \lambda.$$

当 $1 \leq j \leq m$ 时,

$$\sum_{i=1}^{j}a_i \geq i\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{j}a_i+(m-j)a_j}{m} \geq i\cdot\frac{n-(n-m)\lambda}{m} = \sum_{i=1}^{j}a_i'.$$

当 $m < j \leq n$ 时,

$$\sum_{i=1}^{j}a_{=}\sum_{i=1}^{n}a_i - \sum_{i=j+1}^{n}a_i \geq \sum_{i=1}^{n}a_i - \sum_{i=j+1}^{n}\lambda = \sum_{i=1}^{j}a_i'.$$

故

$$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\ \text{优超于}\ (a_1',\ a_2',\ \cdots,\ a_n').$$

因为 $f(x)=x^2$ 为凸函数, 所以由 Karamata 不等式有

$$m\sum_{i=1}^{n}f(a_i) \geq m\sum_{i=1}^{n}f(a_i').$$

故

$$\begin{aligned} m\sum_{i=1}^{n}a_i^2 &\geq m\left(m\left(\frac{n-(n-m)\lambda}{m}\right)^2+(n-m)\lambda^2\right) \\ &\geq m^2\left(\frac{n(1-\lambda)}{m}+\lambda\right)^2 \\ &\geq n^2(1-\lambda)^2. \end{aligned}$$

命题得证! $\square$

评注 本题是中等难度的代数题, 考试中约 35% 做对此题. 证明 1 的想法是估计 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 与 $\sum_{i\in S} a_i$ 的关系, 再利用柯西不等式得到结论. 证明 2 将小于 λA 的 a_i 均变为 λA, 另外 m 个数均变为剩余部分的算术平均, 这样便可利用 Karamata 不等式得到结论.

题 5 设 p 是素数, a, b 是正整数, 且 p 与 ab 互素. 设 $(x_0,\ y_0)$ 是同余方程

$$ax + by \equiv 0 \pmod p$$

使得 $x+y$ 最小的正整数解. 证明: 存在与 p 互素的整数 m 使得

$$x_0|ma|_p + y_0|mb|_p = p,$$

其中 $|x|_p$ 表示整数 x 模 p 的最小正剩余.

(河南省郑州一中 张甲 供题)

证明 1 (金晟治) 由 $(p,\ ab) = 1$ 及 $ax_0 + by_0 \equiv 0 \pmod p$ 结合 $x_0 + y_0$ 最小性, 知 $1 \le x_0,\ y_0 \le p-1$. 若不然, 不妨假设 $p \mid x_0$, 由 $ax_0 + by_0 \equiv 0 \pmod p$ 知 $p \mid y_0$, 故 $x_0 + y_0 \ge 2p$. 此时取 $x_1 = |b|_p \in [1,\ p-1]$, $y_1 = p - |a|_p \in [1,\ p-1]$ 也是一组解且 $x_1 + y_1 < x_0 + y_0$, 与最小性矛盾!

考虑关于 u, v 的方程 $x_0u + y_0v = p$. 由 $(x_0,\ y_0)$ 是最小解, 所以 x_0 与 y_0 互素, 故由裴蜀定理知该方程有解. 设 $(u,\ v)$ 为该方程使 u 最小且 $u \ge 1$ 的整数解, 则 $u \le y_0$ (否则若 $u \ge y_0 + 1$ 则 $u - y_0$, $v + x_0$ 是一组 u 更小的解, 矛盾!). 由 $1 \le u \le y_0 \le p-1$ 有 $(u,\ p) = 1$ 故 $(v,\ p) = 1$.

考虑如下两个同余方程

$$\begin{cases} x_0u + y_0v \equiv 0 \pmod p, \\ ax_0 + by_0 \equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

有

$$x_0y_0ub \equiv x_0y_0va,$$

结合 $(p,\ x_0y_0) = 1$ 故

$$ub \equiv va \pmod p.$$

考虑到 $p \nmid abuv$, 即知存在 $m \in \mathbb{Z}$, $(m,\ p) = 1$ 使 $u \equiv ma$, $v \equiv mb \pmod p$.

下面说明 u, v 为最小正剩余即可.

① 若 $v \geq 0$, 则由 $p \nmid v$ 有 $v \geq 1$. 而 $p = x_0u + y_0v$, 故 $u, v < p$, 即 $u, v \in [1, p-1]$. 因此 $u = |ma|_p$, $v = |mb|_p$. 这样的 m 即满足条件.

② 若 $v < 0$, 设 $w = -v > 0$ 有 $x_0u = p + y_0w$. 带入 $ax_0 + by_0 \equiv 0 \pmod p$ 得

$$\frac{ay_0w + ap}{u} + by_0 \equiv 0 \pmod p.$$

故

$$y_0(aw + bu) \equiv 0 \pmod p,$$

即

$$aw + bu \equiv 0 \pmod p.$$

而 $1 \leq u \leq y_0$ 故

$$x_0u = p + y_0w \leq x_0y_0.$$

因此 $w < x_0$, 即 $1 \leq w \leq x_0 - 1$. 故 $(w,\ u)$ 是方程 $ax + by \equiv 0 \pmod p$ 一组使 $w + u < x_0 + y_0$ 的正整数解, 矛盾! 故情形 ② 不可能发生.

综上即证! □

证明 2 (刘胤辰) 由于 $(p, ab) = 1$, 故 $(p, a) = (p,\ b) = 1$. 记

$$\frac{b}{a} \equiv r \pmod p,\ r \in \mathbb{Z}^+,\ 1 \leq r \leq p-1.$$

故 (x_0, y_0) 也为 $p \mid x + ry$ 的使 $x_0 + y_0$ 最小的正整数解. 记 $x_0 + ry_0 = kp$, 显然有 $1 \leq x_0,\ y_0 \leq p-1$ (因为可以取 $x_0, y_0 \bmod p$ 的最小正剩余). 由于

$$x_0 + ry_0 = kp > 0,$$

故 $k \in \mathbb{Z}^+$ 且 $k \geq 1$.

下面说明 $(k,\ y_0) = 1$, 若不然, 设 $d = (k,\ y_0) > 1$, 则由 $d \mid k,\ d \mid y_0$ 知 $d \mid x_0$. 再考虑

$$\frac{x_0}{d} + r\frac{y_0}{d} = \frac{k}{d}p$$

成立, 故 $\left(\frac{x_0}{d},\ \frac{y_0}{d}\right)$ 也为满足条件的正整数解. 而

$$\frac{x_0}{d} + \frac{y_0}{d} < x_0 + y_0,$$

与 $x_0 + y_0$ 的最小性矛盾!

考虑 $m \in \mathbb{Z}^+$ 满足

$$m \equiv \frac{1}{k} \pmod{y_0},\ 1 \leq m < y_0 \leq p-1.$$

由 $y_0 \mid mk-1$ 知 $y_0 \mid mkp-p$, 故

$$y_0 \mid mx_0+mry_0-p.$$

因此 $y_0 \mid p-mx_0$. 事实上 $p-mx_0 \le 0$ 是不可能的. 这是由于若 $p-mx_0 \le 0$ 成立, 则记 $mx_0-p=y_0u$. 因为 $1 \le m \le p-1,\ 1 \le x_0 \le p-1$, 故 $u \ne 0$, 即 $u \in \mathbb{Z}^+$. 由

$$mx_0 = p+y_0u > y_0u > mu$$

知 $u < x_0$. 代入 $p \mid x_0+ry_0$, 有

$$p \mid \frac{p+y_0u}{m}+ry_0,$$

故

$$p \mid uy_0+r(my_0).$$

又由 $1 \le y_0 \le p-1$, 有 $(y_0,\ p)=1$, 故 $p \mid u+rm$. 而 $u<x_0,\ m<y_0$, 此时 $(u,\ m)$ 为使 $p \mid u+rm$ 成立且 $u+m<x_0+y_0$ 的一组正整数解, 矛盾!故 $p-mx_0 \le 0$ 不成立, 即 $p-mx_0>0$.

记 $p-mx_0=y_0u,\ u \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$p = mx_0+uy_0 > uy_0 \ge u,$$

故 $1 \le u \le p-1$. 因此

$$-mx_0 \equiv uy_0 \equiv mry_0 \pmod{p}.$$

又由 $(y_0,\ p)=1$, 有 $u \equiv mr \pmod{p}$. 而 $1 \le u \le p-1$, 因此 $u=|mr|_p$. 记

$$m'a \equiv m \pmod{p},\ mr \equiv m\frac{b}{a} \equiv m'b \pmod{p}$$

故

$$u=|mr|_p=|m'b|_p,$$

则

$$p=mx_0+uy_0=|m'a|_p x_0+|m'b|_p y_0$$

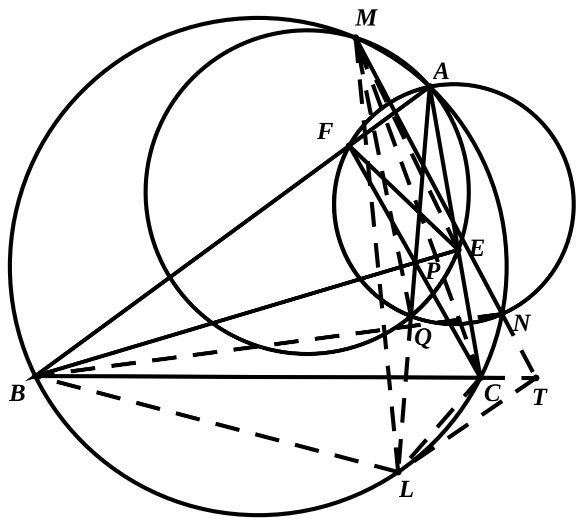
且由 $(m,\ p)=1$ 知 $(m',\ p)=1$. 命题得证! □

评注 本题是较难的数论题, 考试中约 5% 的同学做对. 本题证明 1 的想法"去掉"最小剩余, 考虑关于 $u,\ v$ 的方程 $x_0u+y_0v=p$, 利用题设条件和裴蜀定理说明该方程有解. 再考虑使整数 $u \ge 1$ 的最小整数解, 最后结合题设条件证明此时的 $u,\ v$ 便是要找的最小正剩余. 证明 2 通过取 $\frac{b}{a} \pmod{p}$ 的最小正剩余

r, 将同余方程 $ax+by\equiv 0 \pmod p$ 转化为 $x_0+ry_0=kp$ 的形式进行讨论, 之后说明取 $m\equiv \frac{1}{k} \pmod{y_0}$, $u=\frac{p-mx_0}{y_0}$ 即为要找的最小正剩余就得到了题目所求的结论.

题 5 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB\neq AC$, E, F 分别是边 AC, AB 上的点, 且 $\angle AEF=\angle ABC$, P 是 BE, CF 的交点, Q 是直线 AP 上一动点(不与 A 重合). 记 $\odot(ABC)$ 与 $\odot(AEQ)$, $\odot(AFQ)$ 分别再次交于 M, N. 证明: 直线 MN 过定点.

(湖南师范大学附属中学 苏林 供题)



证明 1 设 AP 再次交 $\odot(ABC)$ 于 L, $\odot(ABC)$ 在 L 处的切线交 BC 的延长线于 T. 下面证明动直线 MN 过 T 点. 设直线 TN 再次交 $\odot(ABC)$ 于 M', 只需证 M' 与 M 重合.

因为 M, M', L, C 均在 $\odot(ABC)$ 上, 故只需证 $\frac{ML}{MC}=\frac{M'L}{M'C}$.

因为 $\angle MQL=180^\circ-\angle MQA=180^\circ-\angle MEA=\angle MEC$, $\angle MLQ=\angle MCE$, 所以 $\triangle MLQ\sim\triangle MCE$, 于是

$$\frac{ML}{MC}=\frac{QL}{CE}.$$

同理可证 $\triangle NLQ\sim\triangle NBF$. 从而

$$\frac{BF}{NB}=\frac{LQ}{NL}. \quad ①$$

由题设知 B, C, E, F 四点共圆, 从而 $\triangle BPF\sim\triangle CPE$, 于是

$$\frac{BF}{CE}=\frac{PB}{PC}=\frac{PA\cdot\sin\angle BAP}{\sin\angle PBA}\cdot\frac{\sin\angle PCA}{PA\cdot\sin\angle CAP}=\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle CAL}=\frac{BL}{CL}. \quad ②$$

由①, ②知

$$\frac{QL}{CE}=\frac{BL}{CL}\cdot\frac{NL}{NB}.$$

因为 LT 是切线, 所以 $\triangle TBL\sim\triangle TLC$. 所以 $\frac{BL}{CL}=\frac{TL}{TC}$, 于是

$$\frac{QL}{CE}=\frac{TL}{TC}\cdot\frac{NL}{NB}.$$

由 LT 是切线, 熟知

$$\triangle TNL\sim\triangle TLM',\ \Delta TCM'\sim\Delta TNB,$$

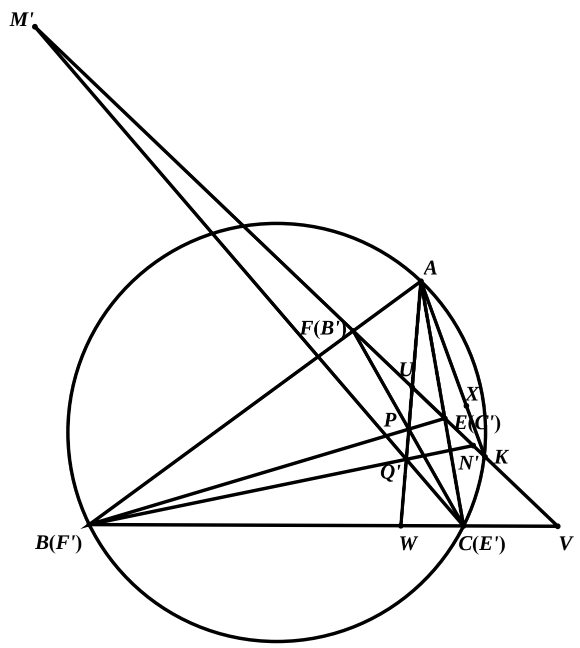
于是

$$\frac{M'L}{NL}=\frac{TL}{TN},\ \frac{TN}{TC}=\frac{NB}{M'C},$$

从而

$$\frac{M'L}{M'C}=\frac{TL}{TC}\cdot\frac{NL}{NB},$$

所以直线 MN 过定点 T (T 是 $\odot(ABC)$ 在 L 处的切线与 BC 的交点). □



证明 2 由 $\angle AEF=\angle ABC$, 故 $AF\cdot AB=AE\cdot AC=r^2$. 以 A 为反演中心, r 为反演半径对图形进行反演. 可得

$$E'=C,\ F'=B,\ B'=F,\ C'=E,\ M'=B'C'\cap E'Q',\ N'=B'C'\cap F'Q'.$$

设 $EF\cap AP=U,\ EF\cap BC=V,\ K$ 为 UV 中点, $AQ\cap BC=W$. 由

$$(C'B',\ UV)=(E'F',\ WV)=(M'N',\ UV)=-1,$$

有

$$KV^2 = KB' \cdot KC' = KM' \cdot KN'.$$

取一顶点 X 在线段 KA 上使得 $KA \cdot KX = KV^2$, 有 $X \in \odot(AB'C')$, $X \in \odot(AM'N')$, 故直线 MN, BC 交于一定点. $\square$

评注 本题是较难的几何题, 考试中约 5% 做对此题. 证明 1 首先做出定点 T, 之后利用相似关系证明 TN 与 $\odot(ABC)$ 的交点 M' 即为 M. 证明 2 难点在于利用反演变换找到原图点对应变换后的点, 之后利用 W, V 调和分割 B, C 即可得到圆 $\odot(AB'C')$ 与 $\odot(AM'N')$ 交于一定点.