2020 年 ELMO 试题解答与评析

羊明亮

(浙江乐清知临中学, 325600)

2020 年 ELMO 于 6 月 20, 21 日 $14:00-18:30$ 在线上举行. 本次赛题, 题目新颖, 难度较大, 是一套高质量的试题, 其中 1, 4, 6 较容易, 适合全国高中数学联赛, 2, 3, 5 有一定难度, 是冬令营好的训练题, 值得一提是 3, 设置独特, 很好地考察学生的几何能力. 笔者水平有限, 不当之处还请指正.

I. 试 题

1. 试求所有的函数 $f:\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}^+$ 满足:

$$f^{f^{f(x)}(y)}(z)=x+y+z+1,\quad \text{对所有正整数 } x,\ y,\ z \text{ 成立}.$$

这里 $f^1(b)=f(b),\ f^{a+1}(b)=f\left(f^a(b)\right)$, 其中 $a,\ b\in\mathbb{N}^+$.

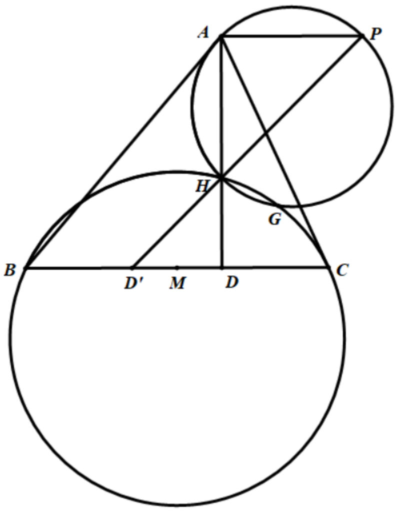
2. 定义斐波那契数为 $F_1=F_2=1,\ F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\ n\geq 3$. 设 k 为正整数, 假设对任意的正整数 m, 都存在一个正整数 n, 使得 $m\mid F_n-k$, 问: k 是否一定为斐波那契数?

3. Janabel 有一个作图工具: 给平面上两个不同的点 $u,\ v$, 他可以作出 uv 的中垂线. 现给定一个由三条直线构成的三角形. 证明: 他可以仅用这个工具和一支铅笔作出该三角形的垂心.

4. 如图, 设 H 为非等腰的锐角三角形 ABC 的垂心, AD 为 BC 边上的高, M 为 BC 的中点, D' 为 D 关于 M 的对称点. 过点 A 作 BC 的平行线交直线 $D'H$ 于点 P. 设 $\triangle AHP$ 的外接圆与 $\triangle BHC$ 的外接圆交于 $H,\ G$ 两点. 证明: $\angle MHG=90^\circ$.

5. 给定正整数 $m,\ n$, 求最小的正整数 s, 使得存在一个 $m\times n$ 的由正整数

修订日期: 2020-09-04.



构成的矩阵, 满足

(1) 每行的 n 个数是以某种顺序排列的连续正整数.

(2) 每列的 m 个数是以某种顺序排列的连续正整数.

(3) 矩阵中的每个数都不超过 s.

6. 对任意正整数 n, 定义: $\tau(n)$ 表示 n 的正因子个数; $\sigma(n)$ 表示 n 的所有正因子之和; $\varphi(n)$ 表示小于 n 的与 n 互素的正整数的个数.

Brandon 有一个计算器, 上面有三个按钮, 分别可以用 $\tau(n)$, $\sigma(n)$, $\varphi(n)$ 替换当前显示的 n. 给定大于 1 的整数 a, b. 证明: 如果计算器当前显示的数为 a, 那么 Brandon 可以通过有限次 (可以为零次) 摁按钮, 使得计算器显示的数为 b.

II. 解答与评注

题 1 试求所有的函数 $f:\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}^+$ 满足:

$$f^{f^{f(x)}(y)}(z)=x+y+z+1,\quad \text{对所有正整数 } x,\ y,\ z \text{ 成立}.$$

这里 $f^1(b)=f(b)$, $f^{a+1}(b)=f\left(f^a(b)\right)$, 其中 a, $b\in\mathbb{N}^+$.

解 1 记 $m=x+y+1$, m 可取遍所有不小于 3 的正整数, 再记 $t=f^{f(x)}(y)$. 则 $f^t(z)=z+m$, 对 $\forall z\in\mathbb{N}^+$ 成立. 从而

$$f(z+m)=f\left(f^t(z)\right)=f^t\left(f(z)\right)=f(z)+m. \qquad ①$$

取 $z=1$, 则 $f(n)=n-1+f(1)$ 对 $n\geq 4$ 成立. 于是, 对 $\forall n\in\mathbb{N}^+(n\geq 4)$ 有 $f(n)=n-1+f(1)$, 从而 $f(6)=5+f(1)$. 又由①知 $f(6)=f(3)+3$, 于是 $f(3)=2+f(1)$. 同理: $f(5)=4+f(1)$ 且 $f(5)=3+f(2)$, 所以 $f(2)=f(1)+1$.

综上, 知对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$ 有 $f(n)=n-1+f(1)$.

记 $c=f(1)-1$, 则

$$\begin{aligned}x+y+z+1=f^{f^{f(x)}(y)}(z)&=f^{f^{x+c}(y)}(z)\\&=z+c(y+(x+c)\cdot c)\\&=c^2x+cy+z+c^3\end{aligned}$$

对 $\forall x,\ y,\ z\in\mathbb{N}^+$ 成立, 比较两边 $x,\ y$ 系数知 $c=1$, 即 $f(n)=n+1$, 对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$. 容易验证该函数符合条件.

综上即知所求 $f(x)=x+1$. $\square$

解 2 (缪立昂) 依题设

$$f^{f^{f(x)}(y)}(z)=x+y+z+1. \qquad (*)$$

我们在 $(*)$ 中取 $x=y=1$, 可得 $f^{f^{f(1)}(1)}(z)=z+3$.

① 若 $f(1)=1$, 则 $f(z)=z+3$. 取 $z=1$ 即知矛盾.

② 若 $f(1)\geq 2$, 我们在 $(*)$ 中取 $x=f^{f(1)-1}(1)$. 那么

$$f^{f^{f(x)}(y)}(z)=y+z+f^{f(1)-1}(1)+1,\ f^{f^{f(x)}(y)}(z)=f^{f^{f^{f(1)}(1)}(y)}(z)=f^{y+3}(z),$$

从而

$$f^{y+3}(z)=y+z+f^{f(1)-1}(1)+1.$$

再在上式中分别取 $y=1,\ 2$, 可得:

$$f^4(z)=z+f^{f(1)-1}(1)+2,\ f^5(z)=z+f^{f(1)-1}(1)+3,$$

即

$$f\left(z+f^{f(1)-1}(1)+2\right)=z+f^{f(1)-1}(1)+3.$$

这说明: 对 $\forall z\geq f^{f(1)-1}(1)+3,\ z\in\mathbb{N}^+$ 有 $f(z)=z+1$. 于是, 在 $(*)$ 中取 $y,\ z\geq f^{f(1)-1}(1)+3$, 有

$$z+y+f(x)=x+y+z+1.$$

所以 $f(x)=x+1$ 对 $x\in\mathbb{N}$ 成立. 容易验证满足条件.

综上所述, 所求函数为 $f(x)=x+1$. $\square$

评注 本题是一道典型的函数迭代题, 可先猜测答案, 然后通过迭代运算不断向目标逼近. 断定迭代是累加运算后, 转为求 $f(1)$ 的值即可.

题 2 定义斐波那契数为 $F_1=F_2=1,\ F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\ n\geq 3$. 设 k 为正整数, 假设对任意的正整数 m, 都存在一个正整数 n, 使得 $m\mid F_n-k$, 问: k 是否一定为斐波那契数?

解 1 (卢程达) 答案是肯定的. 理由如下:

假设 k 不是斐波那契数. 对于给定的 $t\in\mathbb{N}^+$, 我们对 $s(s\in\mathbb{N})$ 归纳证明:

$$F_{t-s}\equiv(-1)^{s-1}F_{t+s}\pmod{F_t}. \tag{*}$$

其中, 由 $F_{n-2}=F_n-F_{n-1}$, 可将 $\{F_n\}$ 的下标向零及负整数延拓.

(1) 当 $s=0$ 时, 结论成立. 当 $s=1$ 时, $F_{t-1}=F_{t+1}-F_t$, 结论成立.

(2) 假设结论对 $s=n-1,\ s=n$ 成立 ($n\in\mathbb{N}^+$). 当 $s=n+1$ 时,

$$\begin{aligned}F_{t-(n+1)}&=F_{t-(n-1)}-F_{t-n}\\&\equiv(-1)^{n-2}F_{t+n-1}-(-1)^{n-1}F_{t+n}\\&\equiv(-1)^n(F_{t+n}+F_{t+n-1})\\&\equiv(-1)^nF_{t+n+1}\pmod{F_t},\end{aligned}$$

故结论对 $s=n+1$ 成立.

(3) 综上, 由归纳原理知 $(*)$ 成立.

注意到 $F_0=0$, 由 $(*)$ 知

$$F_{2t}\equiv F_0=0\pmod{F_t}.$$

而

$$F_{2t+s}\equiv(-1)^{s-1}F_{2t-s}\pmod{F_{2t}},$$

从而

$$\begin{aligned}F_{2t+s}\equiv(-1)^{s-1}F_{2t-s}&\equiv(-1)^{s-1}F_{t+(t-s)}\\&\equiv(-1)^{s-1}(-1)^{t-s-1}F_s\\&\equiv(-1)^tF_s\pmod{F_t}.\end{aligned}$$

故当 $2\mid t$ 时, F_n 在 $\bmod F_t$ 意义下以 $2t$ 为周期. 故对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$, t 为偶数, $\exists u\in\{0,\ 1,\ \cdots,\ t-1\}$ 使得

$$F_n\equiv F_u \text{ 或 } -F_u\pmod{F_t}.$$

取 t 充分大使 $k<F_{t-2}$, 由题设, $\exists n\in\mathbb{N}^+$, 使得

$$F_t\mid F_n-k,$$

故
$$k \equiv F_u \text{ 或 } -F_u \pmod{F_t}.$$
但若 $k \equiv F_u \pmod{F_t}$, 由 $k < F_{t-2}$, $u \leq t-1$, 有 $|F_u - k| < F_t$, 知 $F_u = k$, 矛盾！同理当 $k \equiv -F_u \pmod{F_t}$ 时, 由 $k < F_{t-2}$, $u \leq t-1$ 有 $|F_u + k| < F_t$, 知 $-F_u = k$, 矛盾！

综上, 知 k 必为斐波那契数. □

解 2 答案是肯定的. 理由如下:

假设 k 不是斐波那契数. 我们依次证明如下三个结论:

①存在 $n \in \mathbb{N}^+$, 使得 $k \mid F_n$.

②对任意的 $n,\ q \in \mathbb{N}^+$, $n,\ q \geq 1$, 有
$$F_n = F_q \cdot F_{n+1-q} + F_{q-1}F_{n-q}(\text{约定 } F_0 = 0).$$

③假设 d 为最小的正整数, 使得 $k \mid F_d$, 则 $F_d \mid k$.

对于①, 设 $F_n \equiv x_n \pmod{k}$, 其中, $0 \leq x_n \leq k-1$. 考察数组 $(x_n,\ x_{n+1})$, 由 x_n 仅有 k 种取法知 $(x_n,\ x_{n+1})$ 至多有 k^2 种取法, 于是由抽屉原理, 知存在一组 $i,\ j \in \mathbb{N}^+(i < j)$, 使得 $x_i = x_j$, $x_{i+1} = x_{j+1}$, 即
$$\begin{cases} F_i \equiv F_j \pmod{k}, \\ F_{i+1} \equiv F_{j+1} \pmod{k}. \end{cases}$$
取一组这样的 $i,\ j$, 使得 j 为最小的, 则有 $i = 1$. 否则, 若 $i \geq 2$, 有
$$F_{i-1} \equiv F_{i+1} - F_i \equiv F_{j+1} - F_j \equiv F_{j-1} \pmod{k},$$
矛盾. 所以
$$\begin{cases} F_j \equiv F_1 \equiv 1 \pmod{k}, \\ F_{j+1} \equiv F_2 \equiv 1 \pmod{k}. \end{cases}$$
从而 $k \mid F_{j+1} - F_j$, 即 $k \mid F_{j-1}$, 从而①成立.

对于②,
$$\begin{aligned} F_n &= F_1 \cdot F_n + F_0 \cdot F_{n-1} \\ &= F_1 \cdot (F_{n-1} + F_{n-2}) + F_0 \cdot F_{n-1} \\ &= F_2 \cdot F_{n-1} + F_1 \cdot F_{n-2} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F_t \cdot F_{n+1-t} + F_{t-1} \cdot F_{n-t} \\
&= F_t \cdot (F_{n-t} + F_{n-t-1}) + F_{t-1} \cdot F_{n-t} \\
&= F_{t+1} \cdot F_{n-t} + F_t \cdot F_{n-t-1} \\
&= \cdots \\
&= F_q \cdot F_{n+1-q} + F_{q-1} \cdot F_{n-q}.
\end{aligned}
$$

从而②成立.

对于③, 取 $m = F_d$, 由题设, 存在 $n \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$F_d \mid F_n - k. \tag{*}$$

设 $n = pd + r,\ 1 \le r \le d,\ p \in \mathbb{N}$, 在②中取 $q = d$, 则

$$F_n = F_d \cdot F_{n+1-d} + F_{d-1} \cdot F_{n-d},$$

故

$$
\begin{aligned}
F_n &\equiv F_{pd+r} \\
&\equiv F_d \cdot F_{(p-1)d+r+1} + F_{d-1} \cdot F_{(p-1)d+r} \\
&\equiv F_{d-1} \cdot F_{(p-1)d+r} \\
&\equiv \cdots \\
&\equiv F_{d-1}^p \cdot F_r \pmod{F_d}.
\end{aligned}
$$

由于 $k \mid F_d$, 则

$$F_n \equiv F_{d-1}^p \cdot F_r \pmod{k},$$

而由 $k \mid F_d$ 及 $(*)$ 知 $k \mid F_n$, 于是 $k \mid F_{d-1}^p \cdot F_r$. 又因为

$$\gcd(F_d,\ F_{d-1}) = \gcd(F_{d-1},\ F_{d-2}) = \cdots = \gcd(F_2,\ F_1) = 1.$$

结合 $k \mid F_d$, 有 $\gcd(k,\ F_{d-1}) = 1$. 从而 $k \mid F_r$, 再结合 d 的最小性有, $r = d$, 再由 $F_n \equiv F_{d-1}^p \cdot F_r \pmod{F_d}$ 知 $F_d \mid F_n$. 由 $(*)$ 即有 $F_d \mid k$, 从而③成立.

此时, 由 $k \mid F_d,\ F_d \mid k$, 知 $k = F_d$, 矛盾.

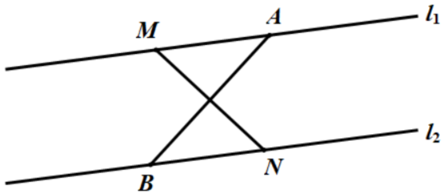
综上所述, k 一定为斐波那契数. □

评注 两种解法分别从代数观点与数论观点出发, 寻求斐波那契数的性质. 解法一, 洞察到了模意义下的递推性, 将数列中的项具体刻画出来;解法二, 只用到了整除性, 关键是找到解答中的 F_d, 从而通过间隔同余零解决问题.

题 3 Janabel 有一个作图工具: 给平面上两个不同的点 u, v, 他可以作出 uv 的中垂线. 现给定一个由三条直线构成的三角形. 证明: 他可以仅用这个工具和一支铅笔作出该三角形的垂心.

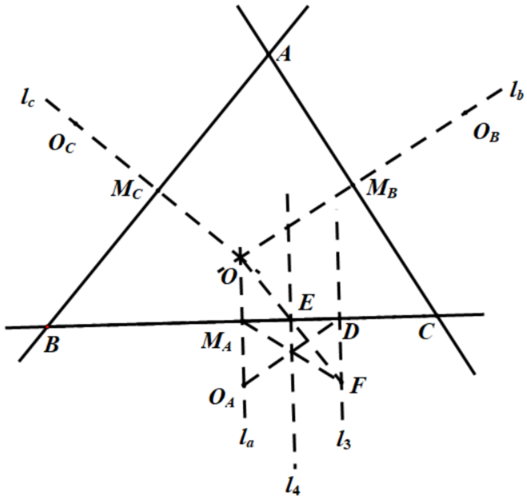
证明 1 (方星皓) 我们先证明如下引理.

引理 如图所示. 已知直线 l_1 和 l_2 满足 $l_1/\!/l_2$. A 在 l_1 上, B 在 l_2 上, 且 AB 不与 l_1 垂直, 则直线 AB 可被作出.



引理的证明 作出 AB 的中垂线分别交 l_1, l_2 于点 M, N. 由 $l_1/\!/l_2$, 可知 MN 的中垂线即为直线 AB, 从而从而引理获证.

下回到原题.



如图所示, 点出三角形的三个顶点 A, B, C, 我们证明如下结论:

(1) 可作出 $\triangle ABC$ 的外心 O,

(2) 可作出 O 关于 $\triangle ABC$ 三边的对称点 O_A, O_B, O_C,

(3) 可作出 $\triangle ABC$ 的三条高线.

对 (1), 分别作出边 BC, CA, AB 的中垂线 l_a, l_b, l_c, 它们的交点即为 O.

对 (2), 记 BC 与 l_a 的交点为 M_A, 作出 M_AC 的中垂线 l_3 与 BC 交于 D, 作出 M_AD 的中垂线 l_4 与 BC 交与点 E. 此时有: $l_a/\!/l_3/\!/l_4$. 故可利用引理, 作出 OE 交 l_3 于 F, 作出 M_AF 交 l_4 于 G, 作出 GD 交 l_a 于 O_A. 此时有

$$OM_A = DF = M_AO_A,$$

即 O_A 为 O 关于 BC 的对称点. 同理可作出 O_B 与 O_C.

对 (3), 由于 O_B 与 O 关于 AC 对称, O_C 与 O 关于 AB 对称, 故有

$$AO_C = AO = AO_B,\ M_BM_C \underline{\mathrel{/\!/}} \frac{1}{2}O_BO_C.$$

这里 M_B, M_C 分别为 AC 与 l_b, AB 与 l_c 的交点. 又 $M_BM_C \underline{\mathrel{/\!/}} \frac{1}{2}BC$, 故 $O_BO_C /\!/ BC$. 结合 $AO_C = AO_B$, 知 O_BO_C 的中垂线即为 $\triangle ABC$ 过点 A 的高线. 同理有另两条高线, 交点即为垂心, 得证. □

证明 2 (万林普) 点出三角形的三个顶点 A, B, C, 考虑证明如下事实:

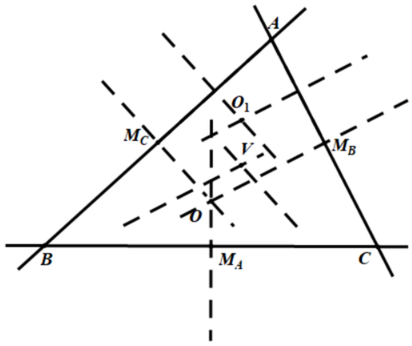
(1) 可点出线段 AB 的中点.

(2) 可作出 $\triangle ABC$ 的中位线.

(3) 可作出过 $\triangle ABC$ 的任一顶点且与对边平行的直线 l_A, l_B, l_C.

(4) 设 l_A, l_B, l_C 围成三角形 $V_AV_BV_C$, 可作出 $\triangle V_AV_BV_C$ 的外心 U.

对 (1), 作出 AB 的中垂线, 其与 AB 交点即为中点.



对 (2), 点出 AB 中点 M_C, AC 中点 M_B, 分别作 AM_C, AM_B 的中垂线交于 O_1. 点出 BC 中点 M_A, 分别做 M_AM_B, M_BM_C, M_CM_A 中垂线交于点 V, 则 O_1, V 分别为 $\triangle AM_BM_C$, $\triangle M_AM_BM_C$ 的外心. 注意到 $M_CM_A \underline{\mathrel{/\!/}} AM_B$, 知

$$\triangle AM_BM_C \cong \triangle M_AM_CM_B.$$

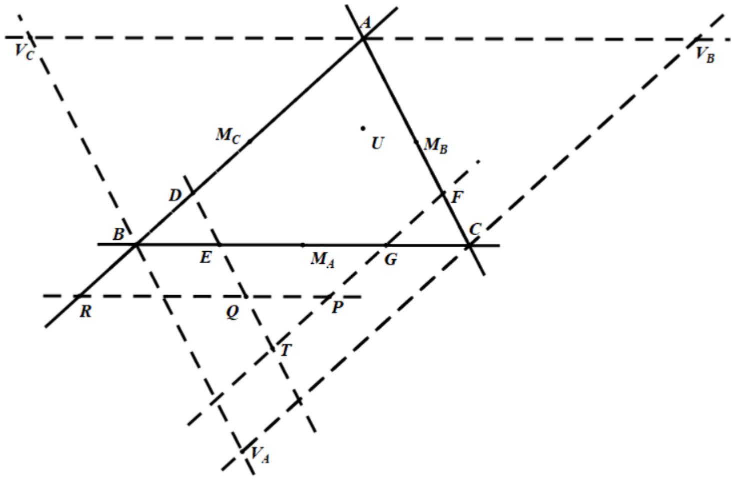
从而 M_BM_C 垂直平分 O_1V, 故 M_BM_C 可被作出.

对 (3), 点出 BM_C 中点 D, BM_A 中点 E, 作出 $\triangle BM_AM_C$ 的中位线 DE. 点出 M_BC 中点 F, M_AC 中点 G, 作出 $\triangle CM_AM_B$ 中位线 FG. 设 DE 与 FG 交于点 T, 点出 ET, GT 的中点 Q, P. 作出 $\triangle ETG$ 的中位线 PQ 交 AB 于 R. 注意到四边形 $ADTF$ 为平行四边形, 则

$$DT = AF = 3FC = 3DE\left(DE \underline{\mathrel{/\!/}} \frac{1}{4}AC\right).$$

故

$$EQ = \frac{1}{2}ET = \frac{1}{2}(DT - DE) = DE.$$



又 $BE /\!/ RQ$, 则 $BR = BD$. 从而 $\triangle RDQ$ 顶点 R 所对中位线即为 l_B.

对 (4), 作出 $\triangle V_AV_BV_C$ 三边中垂线, 相交的点即为 U.

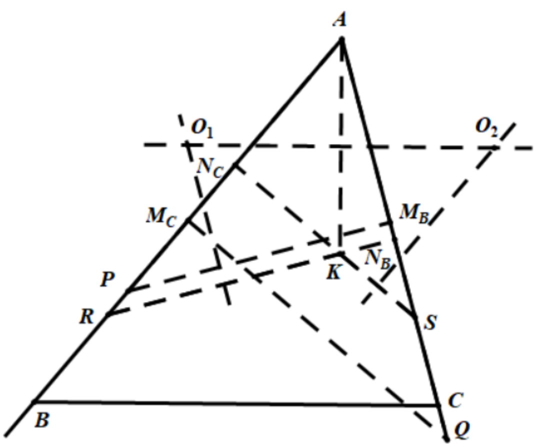
注意到 $l_A /\!/ BC$, $l_B /\!/ CA$, $l_C /\!/ AB$, 知 $\triangle ABC$ 为 $\triangle V_AV_BV_C$ 的中点三角形, 从而 $BU \perp V_AV_C$. 又 $AC /\!/ V_AV_C$, 故 $BU \perp AC$. 同理有

$$AU \perp BC,\ CU \perp AB,$$

故 U 为 $\triangle ABC$ 垂心, 得证. □

证明 3 (王铭炜) 点出三角形的三个顶点 A, B, C. 作出 AC 的中垂线, 分别与 AC, AB 交于 M_B, P. 作出 AB 的中垂线, 分别与 AB, AC 交于 M_C, Q. 作出 AQ 的中垂线, 分别与 AC, AB 交于 N_B, R. 作出 AP 的中垂线, 分别与 AB, AC 交于 N_C, S.

分别作出 RK, AK(K 为 RN_B 与 SN_C 的交点) 的中垂线, 交点记为 O_1. 分别作出 SK, AK 的中垂线, 交点记为 O_2. 我们证明如下事实:



(1) B, P, C, Q 四点共圆.

(2) $BC \perp AK$.

(3) AK 为 O_1O_2 的中垂线.

对 (1), 由

$$\begin{aligned}\angle APC &= 180^\circ - 2\angle PAC \\ &= 180^\circ - 2\angle BAQ \\ &= \angle BQA = \angle BQC,\end{aligned}$$

得证.

对 (2), 与 (1) 同理, 会有 R, Q, S, P 四点共圆. 从而

$$\begin{aligned}\angle ABS = \angle PRS = \angle PQS &= \angle PQC \\ &= \angle PBC = \angle ABC,\end{aligned}$$

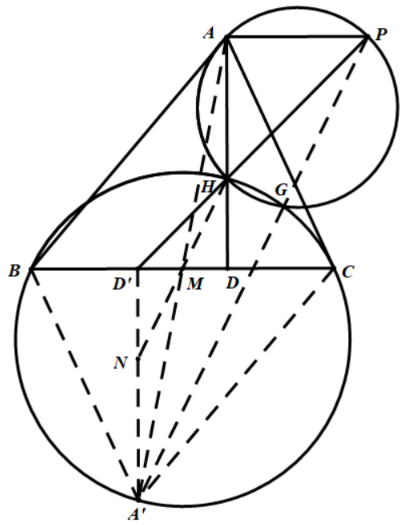
知 $RS /\!/ BC$. 注意到 K 为 $\triangle ARS$ 的垂心, 故 $AK \perp RS$, 因此 $AK \perp BC$.

对 (3), 考虑垂心组 $AKRS$, 知 $\odot AKR$ 与 $\odot AKS$ 为等圆. 从而 AK 垂直平分 O_1O_2. 故 AK 可被作出, 结合 (2) 知 $\triangle ABC$ 的顶点 A 所对的高线 h_A(h_A 即为 AK) 可被作出. 同理可作出 h_B, h_C, 那么 h_A, h_B, h_C 的交点即为 $\triangle ABC$ 的垂心, 命题获证. □

评注 本题形式新颖, 需要对图形有较好的认知. 在想法上, 方法一与方法三由垂心联想垂心组, 通过等圆得到一些中垂线, 获得好的性质, 不同的是方法一基于原垂心组, 而方法三则是构造新的垂心组. 方法二是希望欲做的垂心是某一三角形的巧合点, 选择了从中点三角形入手, 转化命题. 在刻画上, 方法一与方法二脱开中垂线, 寄希望于找到一种更容易被利用的连线方式, 方法三直接从中垂线入手, 这一做法颇为不易.

题 4 如图, 设 H 为非等腰的锐角三角形 ABC 的垂心, AD 为 BC 边上的高, M 为 BC 的中点, D' 为 D 关于 M 的对称点. 过点 A 作 BC 的平行线交直线 $D'H$ 于点 P. 设 $\triangle AHP$ 的外接圆与 $\triangle BHC$ 的外接圆交于 H, G 两点. 证明: $\angle MHG = 90^\circ$.

证明 1 (张盛博) 倍长 AM 至点 A', 倍长 HM 至点 N. 联结 BA', $D'A'$, CA', PG, GA'. 由 A, H, D 三点共线, $\angle ADM = 90^\circ$, 及 M 为 DD' 中点, 知 A', N, D' 三点共线, $\angle A'D'M = 90^\circ$, $D'N = DH$, $A'N = AH$, 由 M 分别为 BC, AA' 的中点, 知四边形 $ABA'C$ 为平行四边形, 故 $\angle BA'C = \angle BAC$. 由垂心的性质知



$\angle BAC+\angle BHC=180°$, 故 $\angle BA'C+\angle BHC=180°$. 从而 B, H, C, A' 四点共圆. 又

$$\angle A'GH=180°-\angle HBA'=180°-(\angle HBC+\angle A'BC)$$
$$=180°-(\angle HBC+\angle ACB)=90°,$$

且

$$\angle PGH=180°-\angle PAH=90°.$$

故 P, G, A' 三点共线且 $GH\perp PA'$. 由 $AP/\!/BC$, $\angle D'DH=\angle PAH=90°$ 知 $\triangle AHP\sim\triangle DHD'$. 从而

$$\frac{D'H}{PH}=\frac{DH}{AH},$$

故

$$\frac{D'H}{PH}=\frac{D'N}{A'N},$$

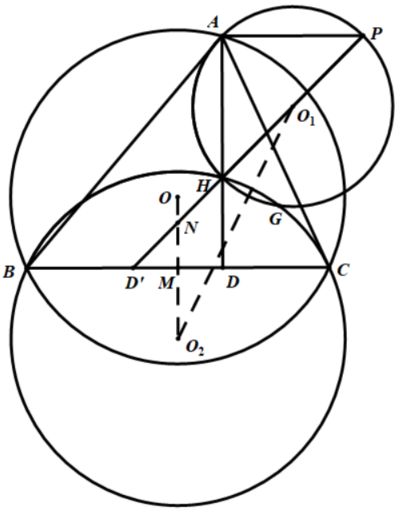
即 $NH/\!/PA'$. 于是 $NH\perp GH$, 即 $MH\perp GH$, 所以 $\angle MHG=90°$. □

证明 2 (张洪铭) 记 $\odot BHC$ 的圆心为 O_2, $\odot AHP$ 的圆心为 O_1, $\odot ABC$ 的圆心为 O. 联结 OO_2, O_1O_2. 由 HG 为 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的公共弦知 $O_1O_2\perp HG$. 于是我们只需证明: $MH/\!/O_1O_2$.

设 OO_2 交 $D'H$ 于点 N, 由垂心的性质知 OO_2 过点 M 且 O_2 与 O 关于 BC 对称, $AH=2OM$. 故

$$O_2M=OM=\frac{1}{2}AH. \quad ①$$

由 $AP/\!/BC$ 及 $AD\perp BC$ 知 $\angle HAP=90°$, 故 O_1 为线段 HP 中点.



结合

$$NM \perp BC,\ AD \perp BC,$$

可得 $MN /\!/ HD$. 又 M 为 DD' 的中点, 知 N 为 $D'H$ 的中点. 于是

$$\begin{aligned} \frac{NH}{O_1H} &= \frac{\frac{1}{2}D'H}{\frac{1}{2}HP} = \frac{D'H}{HP} \\ &= \frac{DH}{AH} \qquad (AP /\!/ DD') \\ &= \frac{2MN}{2O_2M} \qquad (\text{由①}) \\ &= \frac{MN}{O_2M}. \end{aligned}$$

即有 $MH /\!/ O_1O_2$. 从而由 $O_1O_2 \perp HG$, 有 $MH \perp HG$, $\angle HMG = 90^\circ$. 证毕. □

评注 利用好垂心的基本性质和平行线之间的比例关系就能轻松解决本题, 当中点出现时, 倍长中线得到平行四边形, 也是平面几何中的基本策略.

题 5. 给定正整数 m, n, 求最小的正整数 s, 使得存在一个 $m \times n$ 的由正整数构成的矩阵, 满足

(1) 每行的 n 个数是以某种顺序排列的连续正整数.

(2) 每列的 m 个数是以某种顺序排列的连续正整数.

(3) 矩阵中的每个数都不超过 s.

解 (邵方昊) 所求的最小值为 $m+n-d$, 其中 d 表示 m 和 n 的最大公约数.

记 $(x,\ y)$ 表示正整数 x 与 y 的最大公约数, 第 i 行中的最小元为 a_i, 第 j 列中的最小元为 b_j, 其中 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$, $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

一方面, 我们证明 $S \geq m+n-d$.

事实上, 不妨设 $a_1=b_1=1$. 考虑 $m\times n$ 矩阵中的所有元素构成的可重集合的生成函数为 $f(x)$. 依题设, 有

$$\begin{aligned} f(x)&=(1+x+\cdots+x^{n-1})\sum_{i=1}^{m}x^{a_i} &&(\text{对行求和})\\ &=(1+x+\cdots+x^{m-1})\sum_{j=1}^{n}x^{b_j} &&(\text{对列求和}) \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} &(1+x+\cdots+x^{n-1},\ 1+x+\cdots+x^{m-1})\\ =&\left(\frac{1-x^n}{1-x},\ \frac{1-x^m}{1-x}\right)\\ =&\frac{1-x^d}{1-x}\\ =&1+x+\cdots+x^{d-1}. \end{aligned}$$

结合

$$\big(x,\ 1+x+\cdots+x^{m-1}\big)=(x,\ 1)=1$$

知

$$\frac{1+x+\cdots+x^{m-1}}{1+x+\cdots+x^{d-1}}\mid\sum_{i=1}^{m}x^{a_i-1}. \tag{*}$$

$(*)$ 式的左边为 $1+x^d+\cdots+x^{d\left(\frac{m}{d}-1\right)}$, 次数为 $m-d$. 由多项式整除的性质知

$$\max_{1\le i\le m}\{a_i\}-1\ge m-d.$$

设

$$a_t=\max_{1\le i\le m}\{a_i\},$$

依题设, 第 t 行的最大数 $c\le s$. 由 $c=n-1+a_t$ 得

$$s\ge n-1+a_t\ge n+m-d.$$

另一方面, 我们构造矩阵使得 $s=m+n-d$ 符合题意.

记

$$A_n=\begin{bmatrix}1&2&\cdots&n\\2&3&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\ddots&\vdots\\n&1&\cdots&n-1\end{bmatrix},\ A_n+w=\begin{bmatrix}1+w&2+w&\cdots&n+w\\2+w&3+w&\cdots&1+w\\\cdots&\cdots&\ddots&\vdots\\n+w&1+w&\cdots&n-1+w\end{bmatrix}$$

构造矩阵

$$\overline{X}=\begin{bmatrix} A_d & A_d+d & \cdots & A_d+\left(\frac{n}{d}-1\right)d \\ A_d+d & A_d+2d & \cdots & A_d+\left(\frac{n}{d}\right)d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_d+\left(\frac{m}{d}-1\right)d & A_d+\left(\frac{m}{d}\right)d & \cdots & A_d+\left(\frac{m+n}{d}-2\right)d \end{bmatrix}$$

这样的 $m\times n$ 矩阵 $\overline{X}$ 满足题意, 且其中的数都不超过 $m+n-d$.

综上所述, s 的最小值为 $m+n-d$. □

评注 算两次是处理矩阵问题的常见方法, 一般有两种形式: (1) 找对应关系进行计数; (2) 通过生成函数比较次数. 本解答中, 生成函数很好地体现了转化的思想, 通过一种特定的表示来避免具体取值的讨论, 进而刻画出整体的结果. 此外本题的构造具有普遍意义, 将矩阵划分为若干方阵, 体现了化繁为简的思想.

题 6. 对任意正整数 n, 定义: $\tau(n)$ 表示 n 的正因子个数; $\sigma(n)$ 表示 n 的所有正因子之和; $\varphi(n)$ 表示小于 n 的与 n 互素的正整数的个数.

Brandon 有一个计算器, 上面有三个按钮, 分别可以用 $\tau(n)$, $\sigma(n)$, $\varphi(n)$ 替换当前显示的 n. 给定大于 1 的整数 a, b. 证明: 如果计算器当前显示的数为 a, 那么 Brandon 可以通过有限次 (可以为零次) 摁按钮, 使得计算器显示的数为 b.

证明 (韩新淼) 注意到以下几个事实:

(1) a 可以产生 2.

(2) 2^{b-1} 可产生 b.

(3) 2^{k+1} 可产生 2^k, 其中 $k\in\mathbb{N}$.

(4) $2^k\cdot m$ 可产生 2^k, 其中 $m,\ k\in\mathbb{N}^+$, $(m,\ 2)=1$ 且 $m>1$.

对于 (1), 注意到 $2\leq\tau(a)<a$ 在 $a\geq 3$ 时恒成立, 只需对 a 反复进行 $\tau(n)$ 操作.

对于 (2), 注意到 $\tau\left(2^{b-1}\right)=b$ 即可.

对于 (3), 注意到 $\varphi\left(2^{k+1}\right)=2^k$.

对于 (4), 记 m 的标准分解 $\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}$, 有:

$$\varphi(2^k\cdot m)=\varphi(2^k)\cdot\varphi(m)=2^{k-1}\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1).$$

又 $2\mid p_i-1(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$, 知

$$V_2\left(\varphi\left(2^k\cdot m\right)\right)\geq k,$$

结合 $\varphi(2^k\cdot m)<2^k\cdot m$, 对 $2^k\cdot m$ 经有限次 $\varphi(n)$ 操作后会产生 $2^l(l\geq k)$, 由 (3) 知可产生 2^k.

回到原题, 由 (1) 可不妨设 $a=2$. 假设 2 不能产生 b, 由 (2)(3)(4) 知 2 不能产生 2^{b-1} 的倍数. 考虑每个可产生的数 n, 记 n 的标准分解 $\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}$, 则有 $s\leq b$. 否则

$$V_2(\varphi(n))=V_2\left(\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)\right)\geq V_2\left(\prod_{i=1}^{s}(p_i-1)\right)\geq s-1\geq b,$$

矛盾！从而

$$\frac{\varphi(n)}{n}=\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i-1}{p_i}\geq\frac{1}{2^s}\geq\frac{1}{2^b},$$

即

$$\frac{\varphi(n)}{n}\geq\frac{1}{2^b}.\tag{$*$}$$

先现对 2 反复进行 $\sigma(n)$ 操作. 待定 $M_1,\ M_2$, 并使产生的数 A 满足

$$A>2^{M_1\cdot b}\cdot M_2.$$

对 A 进行 M_1 次 $\varphi(n)$ 操作, 由 $(*)$ 知产生的数均大于 M_2. 令 $M_2>2^b$, 即知产生的 M_1 个数均不为 2 的幂. 同 (4) 知这 M_1 次操作均保持所得数的 2 的幂不减. 又这些数中无 2^{b-1} 的倍数, 故使 2 的幂次增加的操作少于 b 次.

待定 M_3 (充分大), 取 $M_1>bM_3$, 即知这 M_1 步中存在连续 M_3 步操作所得的数的 2 的幂次保持不变, 且不为 0 (因为不小于 3 的奇数进行 $\varphi(n)$ 操作会变为偶数, 含 2 的幂次改变). 注意到 $\forall k\geq 1,\ m>1,\ 2\nmid m$, 若 $V_2\left(\varphi\left(2^k\cdot m\right)\right)=k$, 同 (4) 知 m 只含一种素因子 p, 且 $p\equiv 3\pmod 4$.

取 $M_4>2^b,\ M_2>2^b\cdot 3^{M_4}$. 若上述 M_3 步中产生 $2^k\cdot 3^l$ 型数, 因为 $2^k\cdot 3^l>M_2$ 且 $k<b-1$, 则 $l>M_4$. 结合 $k\geq 1,\ \varphi\left(2^u\cdot 3^v\right)=2^u\cdot 3^{v-1}$ (其中 $u,\ v\in\mathbb{N}^+$)知对任意正整数 $l_0<M_4$, 可对 $2^k\cdot 3^l$ 反复进行 $\varphi(n)$ 操作产生 $2^k\cdot 3^{l_0}$.

取 $l_0=2^b-1<M_4$, 此时 $\tau(2^k\cdot 3^{l_0})=2^b\cdot(k+1)$, 与假设矛盾！于是这 M_3 步中均不产生 $2^k\cdot 3^l$ 型数.

对这 M_3 个数中前 M_3-2 个数中任一个, 设为 $2^k\cdot p^l(k,\ l\in\mathbb{N}^+)$, 则

$$\varphi\left(2^k\cdot p^l\right)=2^k\cdot\frac{p-1}{2}\cdot p^{l-1}.$$

而 $\varphi(2^k\cdot p^l)$ 含 2 的幂次为 k 且 $2^k\cdot\frac{p-1}{2}\cdot p^{l-1}$ 中只有一个奇素因子. 又 $1<\frac{p-1}{2}<p$, 知 l 仅能为 1 且 $\frac{p-1}{2}$ 为奇质数. 于是可不妨设前 M_3-2 步中第 i 步为 $2^k\cdot p_i$, 则有

$$p_{i+1}=\frac{p_i-1}{2}(1\leq i\leq M_3-3).$$

即

$$p_i+1=2(p_{i+1}+1).$$

对上式 $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ M_3-3$ 进行累乘, 知

$$p_1+1=2^{M_3-3}(p_{_{M_3-2}}+1),$$

即 p_1+1 为 2^{M_3-3} 的倍数. 令 $M_3>b+3$, 有 $2^b\mid p_1+1$, 此时

$$\sigma\left(2^k\cdot p_1\right)=(p_1+1)\left(2^{k+1}-1\right)$$

是 2^b 的倍数, 这与假设矛盾!

故假设不成立, 进而结论获证! $\square$

评注 本题需对三个数论函数的运算有一定程度的理解, 其基本思路和策略是:

(1) $\sigma(n)$ 和 $\varphi(n)$ 难以得到具体的值, 注意到 $\tau\left(2^{b-1}\right)=b$, 就可以得到 b.

(2) 要产生 2 的幂次, 用 $\varphi(n)$. 由 $\varphi\left(2^k\right)=2^{k-1}$ 可知, 2 的幂次可实现高次向低次转化. 当 n 不是 2 的幂次时, 可让 2 的幂次在操作时不减.

(3) 不断地用 $\sigma(n)$ 操作, 得到一个充分大的数, 再用 $\varphi(n)$ 来得到一个2的高次幂的数.

(4) 对 $\varphi(n)$ 解决不了的情况再去考虑利用 $\sigma(n)$ 和 $\tau(n)$ 来处理.