数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

2020 年保加利亚数学竞赛试题解答与评析

曾彦翔
(湖南省雅礼中学, 410007)
指导教师: 彭熹

保加利亚 2020 年数学奥林匹克试题, 命题角度新鲜, 题目简洁而富有挑战性, 是一套质量较高的数学奥林匹克试题. 全部的 6 个题中, 第 $1,2,4$ 题属简单题, 第 3 题和第 6 题属中档题, 第 5 题则为比较困难的问题.

I. 试 题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 Q,P,R 分别在线段 AB,AQ,BC 上. AR 与 CP,CQ 的交点分别记作点 M,N. 若 $BC=BQ,CP=AP,CR=CN,\angle BPC=\angle CRA$. 证明: $MP+NQ=BR$.

2. 已知实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的和为 2, 实数 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 满足 $b_0=b_n=0$, 且 $|b_i-b_{i-1}|\le a_i$, 其中 $i=1,2,\cdots,n$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(b_i+b_{i-1})\le 2.$$

3. 设 a_1 为整数, 且对任意正整数 n, 有 $a_{n+1}=a_n^2-a_n-1$. 证明: 对任意正整数 n, a_{n+1} 和 $2n+1$ 互素.

4. 是否存在正整数 $m>4$ 和 n, 使得以下方程有解?

(1) $\binom{m}{3}=n^2$;　　(2) $\binom{m}{4}=n^2+9$.

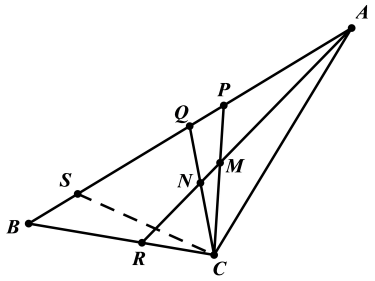
5. 平面上有 n 个顶点, 其中的某些点之间有边相连, 这些边被染成黑白两色, 使得各存在一个同色哈密顿回路. 已知边 AB 和 BC 是白色, 证明: 我们可以将所有边重新进行红蓝染色, 使得 AB 和 BC 为红色, 且并非所有黑白边都被对应染成红蓝边, 且染色后各存在一个同色哈密顿回路.

修订日期: **2020-08-23.**

6. 给定非常数实系数多项式 $f(x)$, 及严格单调递增且无界的实数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 $a_{i+1} < a_i + 2020$. 将 $\lfloor f(a_1) \rfloor, \lfloor f(a_2) \rfloor, \cdots$ 依次排成一列数, 其数码按顺序构成一个无穷数列 $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, 其中 $s_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, $k = 1, 2, \cdots$. 给定正整数 n, 证明: 对正整数 k, 在所有 $\overline{s_{n(k-1)+1} s_{n(k-1)+2} \cdots s_{nk}}$ 中, 所有 n 位数都出现过.

Ⅱ. 解答与评注

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 Q, P, R 分别在线段 AB, AQ, BC 上. AR 与 CP, CQ 的交点分别记作点 M, N. 若 $BC = BQ, CP = AP, CR = CN, \angle BPC = \angle CRA$. 证明: $MP + NQ = BR$.



证明 如图, 作 $\angle BCS = \angle QCP$, 使得射线 CS 与线段 AB 相交, 设 CS 交 AB 于点 S.

于是, $\angle SCP = \angle RCN$, 而 $\angle BPC = \angle CRA$, 故 $\triangle SCP \sim \triangle NCR$. 又 $CR = CN$, 故 $CS = CP = AP$, $\angle BSC = \angle MPA$.

由 $\angle BPC = \angle CRA$ 知 B, P, M, R 四点共圆, 故 $\angle PMA = \angle SBC$, 于是 $\triangle BCS \cong \triangle MAP$.

设 $\angle BAC = \alpha$, 则 $\angle PCA = \alpha, \angle CNR = \angle CRN = \angle CPS = 2\alpha, \angle CSP = 2\alpha$.

由 $CR = CN$ 及 $BC = BQ$ 知

$$\angle BQC = \angle BCQ = 180^\circ - \angle CNR - \angle CRN = 180^\circ - 4\alpha.$$

故 $\angle SCQ = \angle CSQ = 2\alpha$, 这即 $QS = QC$. 于是

$$\begin{aligned} MP + NQ &= BS + (CQ - CN) \\ &= BS + SQ - CR \\ &= BC - CR = BR. \end{aligned}$$

命题得证. □

评注 本题是一道简单的几何问题. 首先注意到欲证式的每一项都不能直接转化, 于是考虑等式两边同时添加一些项, 这亦是条件中许多线段相等所暗示的. 进一步, 便可知只需证明存在线段 AB 上的点 S, 使得 $CS=CP$, $QS=QC$. 为此, 可以先按任一条件取出 S 点, 再导角证明另一组等式即可.

2. 已知实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的和为 2, 实数 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 满足 $b_0=b_n=0$, 且 $|b_i-b_{i-1}|\le a_i$, 其中 $i=1,2,\cdots,n$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(b_i+b_{i-1})\le 2.$$

证明 记 $S_i=\sum\limits_{k=1}^{i}a_k, T_i=\sum\limits_{k=i}^{n}a_k$, 其中 $i=1,2,\cdots,n$. 补充定义 $S_0=T_{n+1}=0, S_{n+1}=T_0=2$. 则对 $i=0,1,\cdots,n$ 都有

$$S_i+T_{i+1}=2,$$

且 $\{S_i\}_{i=0}^{n+1}$ 单调不减, $\{T_i\}_{i=0}^{n+1}$ 单调不增. 注意到如下的局部不等式

$$b_i\le|b_i|\le\sum_{k=1}^{i}|b_k-b_{k-1}|\le\sum_{k=1}^{i}a_k=S_i,$$
$$b_i\le|b_i|\le\sum_{k=i+1}^{n}|b_k-b_{k-1}|\le\sum_{k=i+1}^{n}a_k=T_{i+1}.$$

取 i 为最小的使 $S_i\ge T_{i+1}$ 的 i, 则 $S_{i-1}\le 1$, $T_{i+1}\le 1$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}a_j(b_j+b_{j-1})&=\sum_{j=1}^{i-1}a_j(b_j+b_{j-1})+a_i(b_i+b_{i-1})+\sum_{j=i+1}^{n}a_j(b_j+b_{j-1})\\&\le\sum_{j=1}^{i-1}a_j(S_j+S_{j-1})+a_i(S_{i-1}+T_{i+1})+\sum_{j=i+1}^{n}a_j(T_j+T_{j+1})\\&=\sum_{j=1}^{i-1}(S_j^2-S_{j-1}^2)+(2-S_{i-1}-T_{i+1})(S_{i-1}+T_{i+1})\\&\quad+\sum_{j=i+1}^{n}(T_j^2-T_{j+1}^2)\\&=2-2(S_{i-1}-1)(T_{i+1}-1)\le 2.\end{aligned}$$

□

评注 本题是一道较为简单的代数题. 条件 $|b_i-b_{i-1}|\le a_i$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=2$ 意味着 $\{b_i\}$ 不能有着很大的波动幅度, 自然地想到用 $\{a_i\}$ 的前缀和与后缀和来刻画对 $\{b_i\}$ 的限制. 另外, 前缀和方法与差分方法都是处理序列不等式的有效工具.

3. 设 a_1 为整数, 且对任意正整数 n, 有 $a_{n+1}=a_n^2-a_n-1$. 证明: 对任意正整数 n, a_{n+1} 和 $2n+1$ 互素.

证明 对于素数 p, 若 $p\mid a_n$, 则由数列的递推式知 $a_{n+2k-1}\equiv -1 \pmod p$, $a_{n+2k}\equiv 1 \pmod p$, 其中 $k=1,2,\cdots$. 这意味着数列中至多有一项为 p 的倍数, 故我们只需证明:

对于任意的素数 p, 若存在正整数 k 使得 $p\mid a_k$, 则 $k<\frac{p+1}{2}$.

固定素数 $p>5$, 记 $V=\{0,1,\cdots,p-1\}$, $E=\{(u,v)\mid v\equiv u^2-u-1 \pmod p, u,v\in V\}$, 并以此构建有向图 $G(V,E)$. 由于每个点的出度为 1, 故 G 是若干形态为基环树（树增加一条边）的连通分支之并. 由于 0 所在的连通分支上的唯一的环已经确定为 $1\to(p-1)\to 1$, 故只需证明, 以 0 为终点的链的长度不超过 $\frac{p-3}{2}$. 记以 0 为终点的最长链为 $V_1V_2\cdots V_t$, 其中 $V_t=0$.

引理 至多一个 v 使得其入度恰为 1, 对于其它入度不为 0 的点 v, 其入度恰为 2.

证明 对于某个入度至少为 1 的点 v, 由定义, 存在 $u\in V$ 使得 $u^2-u-1\equiv v \pmod p$, 这即

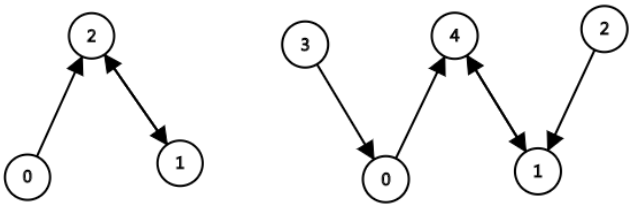
$$u\equiv 2^{-1}\left(1\pm\sqrt{4v+5}\right) \pmod p.$$

其中 2^{-1} 表示 2 的乘法逆元, 为 $\frac{p+1}{2}$, $\sqrt{x}$ 表示模 p 意义下 x 的平方根, 满足 $(\sqrt{x})^2\equiv x \pmod p$.

由条件, $4v+5$ 在模 p 意义下的平方根存在, 若 v 入度恰为 1, 则 $4v+5$ 在模 p 意义下的平方根唯一, 即 $4v+5\equiv 0$, 这样的 v 显然是唯一的. 对于其它的 v, $4v+5$ 在模 p 意义下的平方根恰有两个, 故其入度恰为 2, 引理证毕.

回到原题. 设 $A=\{u\mid \exists\, i\in\{1,2,\cdots,t-1\}:(u,V_i)\in E\}$. 由于每个点出度恰为 1, 结合引理, 知 $|A|\geq 2(t-1)-1=2t-3$, 且这些点与 $V_{t-1},0,1,p-1,2$ 互异（因为由定义, 边 $(0,p-1),(1,p-1),(p-1,1),(2,1)$ 存在, 而 G 的任意连通分支均为基环树）, 故 $|V|\geq|A|+5$, 即 $t\leq\frac{p-2}{2}$.

于是, 以 0 为终点的最长链长度不超过 $\left\lfloor\frac{p-2}{2}\right\rfloor=\frac{p-3}{2}$, 命题对 $p>5$ 得证.



$p=3$ 时 G 的形态　　$p=5$ 时 G 的形态

对于 $p=3$ 和 $p=5$, 我们可以画出其对应的 G, 可知结论亦成立, 故命题得证. $\square$

评注 这是一道中等难度的数论题. 显而易见地, 我们必定要将与 $2n+1$ 互素转化成与 p（素数）互素的问题. 而本题仅仅给了一个数列的递推式, 且我们不可能解出其通项, 故只能分析在模意义下的递推式的一些内在联系, 直观地则是考虑映射 $f:\mathbb{Z}/p\to\mathbb{Z}/p, f(x)=x^2-x-1$ 的等价图, 而这便是解模意义下的二次方程. 最后寻找相异代表元的组合处理手法是经典的.

4. 是否存在正整数 $m>4$ 和 n, 使得以下方程有解?

(1) $\binom{m}{3}=n^2$;　　(2) $\binom{m}{4}=n^2+9$.

解 (1) 存在. 事实上, $m=50, n=140$ 是唯一可能的解.

(2) 不存在. 将二项式系数拆开, 可得

$$24(n^2+9)=m(m-1)(m-2)(m-3)=(m^2-3m+1)^2-1,$$

这即 $(m^2-3m+1)^2=24n^2+217$. 两边同时模 7 得

$$(m^2-3m+1)^2\equiv 3n^2 \pmod 7.$$

但注意到 3 不为模 7 的二次剩余, 所以

$$n\equiv 0 \pmod 7,\ m^2-3m+1\equiv 0 \pmod 7.$$

但 $7^2\nmid 217$, 矛盾! 故此方程无整数解. $\square$

评注 这是一道中等偏易的数论题. 第一问是一个熟知的经典问题, `Meyer,Wilhelm Franz` 于 1878 年便已证明, 此方程的所有正整数解为 $(m,n)=(3,1),(4,2),(50,140)$, 但对于不知道此结论的同学做起来仍稍有难度. 第二问的关键则在于观察到模 7 即可得出结论, 这是因为 7 是化简后的式子中常数项 217 的素因子, 取模、消项亦是做不定方程题的一个常用思路.

5. 平面上有 n 个顶点, 其中的某些点之间有边相连, 这些边被染成黑白两色, 使得各存在一个同色哈密顿回路. 已知边 AB 和 BC 是白色, 证明: 我们可以将所有边重新进行红蓝染色, 使得 AB 和 BC 为红色, 且并非所有黑白边都被对应染成红蓝边, 且染色后各存在一个同色哈密顿回路.

证明 定义: 称 4−正则图 $G(V,E)$ 的边集的一个无序划分 $\{X,Y\}$ 为一个哈密顿分解, 当且仅当 X 与 Y 分别构成哈密顿回路. 对于边 u,v, 用 $P_G(u,v)$

表示使得 u,v 在同一边集内的哈密顿分解所构成的集合, 用 $Q_G(u,v)$ 表示使得 u,v 在不同边集内的哈密顿分解所构成的集合, 用 R_G 表示 G 的所有哈密顿分解构成的集合. 我们先证明如下引理：

引理[1] 对任意的 4−正则图 $G(V,E)$, 及任意的 $u,v\in E$, 有

A. $|P_G(u,v)|$ 为偶数.

B. $|Q_G(u,v)|$ 为偶数.

C. $|R_G|$ 为偶数.

证明 对于连接着同一个顶点的四条边 w,w_1,w_2,w_3, 注意到

$$|R_G|=|P_G(w,w_1)|+|P_G(w,w_2)|+|P_G(w,w_3)|,$$

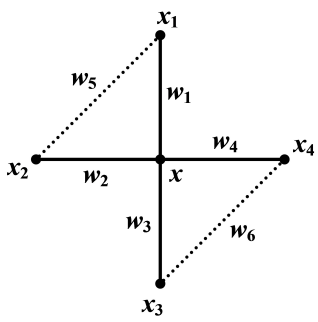
因此, 在同一个图中, 命题 A 蕴含着命题 C. 而对于任意两条边, 有 $|P_G(u,v)|+|Q_G(u,v)|=|R_G|$, 因此, 在同一个图中, 命题 A,C 蕴含着命题 B.

我们对 $N=|V(G)|$ 来归纳证明 A 命题. 在 $|R_G|=0$ 时, 命题平凡, 故下设 $|R_G|\geq 1$.

在 $N=3$ 时, G 的形态唯一, 只能是 ${}^2K_3$（每一条边复制一遍的完全图 K_3）, 此时显然地有 $|P_G(u,v)|\in\{0,2,4\}$, 为偶数.

假设命题 A,B,C 对于 $N-1$ 成立, 考虑 N 时的命题:

先证明, 在 u,v 有公共顶点时, $P_G(u,v)$ 为偶数. 设 $u=w_1,v=w_2,w_3,w_4$ 为某一个顶点 x 连出的全部 4 条边, 其中边 $w_i(i=1,2,3,4)$ 连接着点 x,x_i. 将 G 中的顶点 x 删去, 边 w_1,w_2,w_3,w_4 删去, 并添加 $w_5=x_1x_2$, $w_6=x_3x_4$, 得到的新图记作 G', 则 G' 是 4− 正则的, 且 $|V(G')|=N-1$. 于是, 每一个使得 w_1,w_2 在同一边集内的 G 的哈密顿分解, 与某个使得 w_5,w_6 在不同边集内的 G' 的哈密顿分解一一对应, 由归纳假设, 即 $|P_G(u,v)|=|P_G(w_1,w_2)|=|Q_{G'}(w_5,w_6)|\equiv 0 \pmod 2$.



由之前的分析, 这蕴含着 $|R_G|\equiv 0 \pmod 2$. 因此, 在 $u=v$ 时, 有

$$|P_G(u,v)|=|P_G(u,u)|=|R_G|\equiv 0 \pmod 2$$

下面考虑 u,v 没有公共顶点时的情形. 由最初的假设, G 存在至少一个哈密顿分解, 因此, 存在一系列的边 $u=W_0,W_1,W_2,\cdots,W_{t-1},W_t=v$, 使得 W_i 与 W_{i+1} 有公共顶点对 $i=0,1,\cdots,t-1$ 均成立.

注意到如下显然的事实: 对于任意的三条边 x,y,z, 有 $Q_G(x,y)=P_G(x,z)\Delta P_G(z,y)$, 其中 Δ 表示集合的对称差. 这是因为, x 与 y 分别属于两个边集, 当且仅当 z 恰与其中一个属于同一边集. 由此可知

$$\begin{aligned}|P_G(W_0,W_{i+1})| &= |R_G|-|Q_G(W_0,W_{i+1})|\\ &\equiv 0-|P_G(W_0,W_i)\Delta P_G(W_i,W_{i+1})|\\ &\equiv |P_G(W_0,W_i)|+|P_G(W_i,W_{i+1})|\\ &\equiv |P_G(W_0,W_i)| \pmod 2\end{aligned}$$

这即

$$|P_G(u,v)|=|P_G(W_0,W_t)|\equiv|P_G(W_0,W_{t-1})|\equiv\cdots\equiv|P_G(W_0,W_1)|\equiv 0 \pmod 2$$

因此命题 A 对 N 亦成立, 即命题 A,B,C 对 N 成立, 归纳完毕. 这即证明了引理.

回到原题. 取题述的 n 个点为顶点, 任取黑白哈密顿回路各一个为边, 构成的图记作 $G(V,E)$, 则 G 是 4−正则的. 由引理, $|P_G(AB,BC)|\equiv 0 \pmod 2$. 而这些边按黑白染色的方式划分, 本身即为一个哈密顿分解, 且 AB,BC 属于同一个边集（均为白色）, 这即 $|P_G(AB,BC)|\geq 1$, 且为偶数, 于是 $|P_G(AB,BC)|\geq 2$.

这说明 G 存在另一种哈密顿分解, 且 AB,BC 同属一个边集. 将这些边按所属边集进行红蓝染色, 其它不在 G 中的边任意染色, 则分别存在一个红色和蓝色的哈密顿回路, 且并非所有黑白边都被对应染成红蓝边, 命题得证. □

评注 本题是一道困难的组合问题. 可以观察到, 本题的设问仅仅是引理的一个极其特殊的情况, 但为了证明问题, 似乎不可避免地要连带着归纳证明全部 A,B,C 部分. 事实上, 找到一个可以归纳的命题并非易事, 往往需要如本题的引理一般, 附加许多额外的命题一起归纳.

通常, 我们先尝试直接归纳证明原问题, 但往往会发现, 所给的条件并不足以完成归纳, 我们必须添加一些条件, 而这导致的将是还需归纳证明这些命题. 在一些问题中（例如本题）, 我们可以将这一过程不断迭代, 最终将找到一个可以归纳的问题.

从题目角度来看, 去证明引理比证明原题将简单许多, 尽管引理相比原题证

明地更多一些, 但另一方面, 引理给出了一个完整的、可归纳的命题.

事实上, 本题的引理早在 1978 年便已由 A.G. Thomason 证明. 在近年的竞赛题中, 有关哈密顿回路的问题则较为少见. 另外, 在限定的时间内做好本题并非易事.

6. 给定非常数实系数多项式 $f(x)$, 及严格单调递增且无界的实数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 $a_{i+1} < a_i + 2020$. 将 $\lfloor f(a_1)\rfloor, \lfloor f(a_2)\rfloor, \cdots$ 依次排成一列数, 其数码按顺序构成一个无穷数列 $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, 其中 $s_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, $k = 1, 2, \cdots$. 给定正整数 n, 证明: 对正整数 k, 在所有 $\overline{s_{n(k-1)+1}s_{n(k-1)+2}\cdots s_{nk}}$ 中, 所有 n 位数都出现过.

证明 设 $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{r} p_i x^i$, $g(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)}$, 则有

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{r}\left(\sum\limits_{j=i}^{r}\binom{j}{i}p_j\right)x^i}{\sum\limits_{i=0}^{r} p_i x^i}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{r}\left(\sum\limits_{j=i}^{r}\binom{j}{i}p_j\right)x^{i-r}}{\sum\limits_{i=0}^{r} p_i x^{i-r}} = \frac{p_r}{p_r} = 1.$$

记 $b_i = a_{i+1} - a_i$, 则 $b_i < 2020$. 不妨设 f 首项系数为正, 则对于足够大的 m 有

$$1 < \frac{f(a_{m+1})}{f(a_m)} = \frac{f(a_m + b_m)}{f(a_m)} < \frac{f(a_m + 2020)}{f(a_m)} = \prod_{i=a_m}^{a_m+2019} g(i).$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$, 故 $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{f(a_{m+1})}{f(a_m)} = 1$.

对于 n 位数 $c = \overline{u_1u_2\cdots u_n}$, 记 $d = \overline{u_1u_2\cdots u_n0\cdots u_1u_2\cdots u_n0}$ ($10 \times c$ 重复 n 遍).

注意到 $\frac{(d+1)\times 10^T}{d\times 10^T} = \frac{d+1}{d} > 1$, 由前述及介值原理, 对于足够大的 T, 存在 i 使得

$$\lfloor f(a_i)\rfloor \in [d \times 10^T, (d+1)\times 10^T).$$

这即 $\lfloor f(a_i)\rfloor$ 具有 d 前缀.

因此, $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ 中存在连续的 $n(n+1)$ 位恰为 d, 这即, 在所有的

$$\overline{s_{n(k-1)+1}s_{n(k-1)+2}\cdots s_{nk}}$$

中, c 出现过. 由 c 的任意性知命题成立. $\square$

评注 本题是一道中等难度的代数题. 此类问题, 通常值的前若干位是可以取到任意值的, 这是一个介值原理的经典结论. 本题的条件则更具导向性, 由于考虑的数列中含有取整函数, 故不可能用数论手段处理值的末位.

参考文献

[1] Dragomir Grozev's Math Blog. Bulgarian NMO, 2020, part I. https://dgrozev.wordpress.com/2020/07/06/bulgarian-nmo-2020-part-i/