2020 土耳其 IMO 国家队选拔试题解答与评析

王一川
(华东师范大学第二附属中学, 201203)
指导教师: 唐立华

土耳其是欧洲中学生数学竞赛的强国, 每年土耳其数学会都会通过数学奥林匹克的形式在全国范围内选出一部分竞赛优秀学生组成数学国家集训队, 并从中经过连续三场的选拔考试选拔出 6 名优胜者组成当年的 IMO 国家队. 今年的土耳其国家队选拔试题新颖别致, 难易得当, 具有较好的选拔功能. 本人认为其中第 2、7、8 题为简单题;第 1、4、6 题为中档题; 第 3、5、9 题为难题, 尤其以第 9 题为最. 前后难度跨度较大, 其中第 1、4 题外表结构简洁漂亮, 构思不落俗套;而第 3、5 题则是两个优美的组合问题, 第 9 题为一道复杂的数论题, 需要解题者扎实的基本功和灵巧的创造力. 本文给出 2020 年土耳其国家队选拔试题的解答. 囿于水平, 不当之处在所难免, 敬请读者不吝赐教.

I. 试 题

1. 求所有的正整数 a, b, 使得 $\frac{a^3+b^3}{ab+4}=2020$.

2. 圆外切四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 周长为 p_1, 对角线长度和为 k_1, 圆外切四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 周长为 p_2, 对角线长度和为 k_2. 证明: 若 $p_1^2+p_2^2=(k_1+k_2)^2$, 则 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 为全等的正方形.

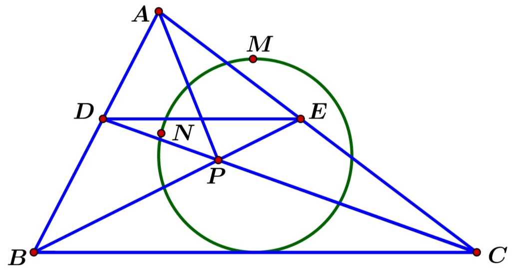
3. 66 个矮人一共有 111 顶帽子, 每顶帽子都属于某个特定的矮人, 每顶帽子都被染色, 这 66 个矮人的帽子共有 66 种颜色. 当矮人过节日时, 每个矮人都取出一顶自己的帽子戴上. 已知: 对任何一次节日, 所有矮人所戴帽子的颜色都不相同. 对任意两次节日, 至少存在一个矮人, 他在两次节日中所戴帽子的颜色不同. 那么, 矮人们至多可以过多少次节日?

修订日期: 2020-05-01.

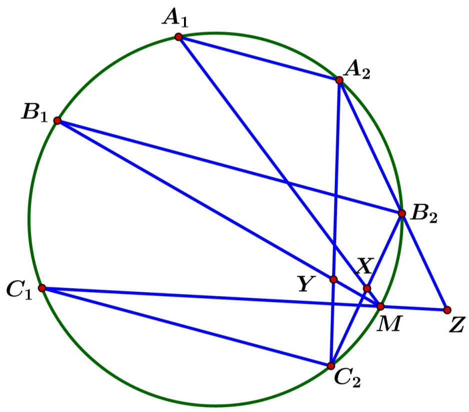
4. 求所有的函数 $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$, 使得对所有 $n\in\mathbb{Z}^+$,
$$(n-1)^{2020}<\prod_{l=1}^{2020}f^{(l)}(n)<n^{2020}+n^{2019}.$$

5. 已知班里所有学生名字都不相同, 且至少有一对学生是朋友, 班主任写好了一份带顺序的学生名单, 名单上的学生依次在黑板上写下当前没有出现在黑板上的自己所有朋友的名字. 若名单上的每个学生都在黑板上写下了至少一个名字, 且这个过程结束时, 所有至少有一个朋友的学生的名字都出现在了黑板上, 就称这个名单是“黄金名单”. 证明:一定存在一份黄金名单, 且其中的名字个数为偶数.

6. $\triangle ABC$ 中, AB 上一点 D 和 AC 上一点 E 满足 $DE\parallel BC$, BE 与 CD 交于点 P, $\triangle APD$ 的外接圆和 $\triangle BCD$ 的外接圆再次相交于 M, $\triangle APE$ 的外接圆和 $\triangle BCE$ 的外接圆再次相交于 N. 设 ω 为过点 M, N 且与 BC 相切的圆, 过 M, N 分别作 ω 的切线. 证明: 这两条切线的交点在 AP 上.



7. 如图. 圆 Ω 上的三条弦 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 互相平行, M 为 Ω 上一点, 直线 A_1M, B_2C_2 交于点 X, 直线 B_1M, A_2C_2 交于点 Y, 直线 C_1M, B_2A_2 交于点 Z. 求证: X, Y, Z 共线.



8. 正实数 x, y, z 满足 $0<x,\ y,\ z<1$. 求下列表达式的最小值:
$$\frac{xyz(x+y+z)+(xy+yz+zx)(1-xyz)}{xyz\sqrt{1-xyz}}.$$

9. 对正整数 a,n, 设 $f(a,n)$ 表示 mod$n$ 意义下满足 $x_1x_2\cdots x_{10}\equiv a \pmod n$ 的十元数组 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10})$ 的个数. (注: mod$n$ 意义指若对任意 i, $x_i\equiv y_i \pmod n$, 则 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10})$ 与 $(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{10})$ 视作同一组数.)

设 a, b 为正整数.

(1) 证明: 存在正整数 c, 使得 $\frac{f(a,\ cn)}{f(b,\ cn)}$ 是与 n 无关的常数.

(2) 求所有的正整数对 $(a,\ b)$, 使得满足第 (1) 问条件的 c 的最小值为 27.

II. 解答与评注

1. 求所有的正整数 a, b, 使得 $\frac{a^3+b^3}{ab+4}=2020$.

解 记 $p_1=2,p_2=5,p_3=101$, 则 p_1,p_2,p_3 均为模 3 余 2 的素数, 且 $2020=2p_1p_2p_3$.

由条件知: $\frac{a^3+b^3}{ab+4}=2p_1p_2p_3\Rightarrow p_1p_2p_3|a^3+b^3$.

我们证明:对 $i=1,\ 2,\ 3$, 有 $p_i\mid a+b$. (1)

若 a, b 中存在 p_i 的倍数, 则由 $p_i\mid a^3+b^3$ 知 a, b 均为 p_i 的倍数, 结论 (1) 成立.

下设 p_i 不整除 a, b, 则由 $p_i\mid a^3+b^3$ 知

$$a^3\equiv(-b)^3 \pmod p)_i,$$

由 $p_i\equiv 2 \pmod 3$ 知

$$a^{p_i-2}\equiv(-b)^{p_i-2} \pmod{p_i},$$

又由费马小定理知

$$a^{p_i-1}\equiv(-b)^{p_i-1} \pmod{p_i},$$

从而 $a\equiv -b \pmod{p_i}$, 即 $p_i\mid a+b$, 故结论 (1) 得证.

由 (1) 知 $1010\mid a+b$, 又由条件知

$$\frac{2020}{a+b}=\frac{a^2-ab+b^2}{ab+4}\geq\frac{ab}{ab+4},$$

其中 $ab\geq\max\{a,\ b\}\geq 505$, 故

$$\frac{ab}{ab+4}\geq\frac{505}{509}>\frac{2}{3}.$$

进而

$$\frac{2020}{a+b}\geq\frac{ab}{ab+4}>\frac{2}{3}\Rightarrow a+b<3030,$$

结合 $1010\mid a+b$ 知 $a+b\in\{1010,\ 2020\}$.

若 $a+b=2020$, 则由条件知

$$\frac{a^2-ab+b^2}{ab+4}=\frac{2020}{a+b}=1,$$

即 $(a-b)^2=4$, 从而 $|a-b|=2$, $(a,\ b)=(1009,\ 1011)$ 或 $(1011,\ 1009)$, 此时

$$\frac{a^3+b^3}{ab+4}=(a+b)\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{ab+4}=2020\cdot 1=2020.$$

符合条件;

若 $a+b=1010$, 则由条件知

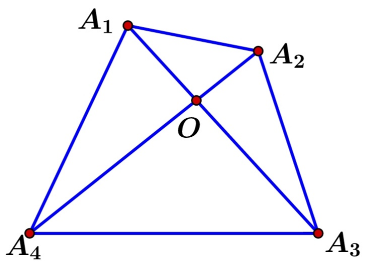
$$\frac{a^2-ab+b^2}{ab+4}=\frac{2020}{a+b}=2,$$

即 $(a+b)^2-5ab=8$. 由 (1) 知 $5\mid(a+b)^2-5ab$, 而 5 不整除 8, 矛盾, 故 $a+b=1010$ 不成立.

综上所求 $(a,\ b)$ 为 $(1009,\ 1011)$ 或 $(1011,\ 1009)$. □

评注 本题需要一个关键想法: 对素数 $p\equiv 2\pmod 3$, 若 $p\mid a^3+b^3$, 则 $p\mid a+b$; 并需要观察到 2020 的所有素因子均模 3 余 2, 这个想法在不定方程问题中不常见, 从而本题入手并不容易.

2. 圆外切四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 周长为 p_1, 对角线长度和为 k_1, 圆外切四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 周长为 p_2, 对角线长度和为 k_2. 证明: 若 $p_1^2+p_2^2=(k_1+k_2)^2$, 则 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 为全等的正方形.



证明 先证明: $p_1\geq\sqrt{2}k_1$, 等号成立当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 是正方形. (1)

设 A_1A_3, A_2A_4 交于 O. 注意到, $\angle A_1OA_2+\angle A_2OA_3=180^\circ$, 从而或者 $\angle A_1OA_2\geq 90^\circ$, 或者 $\angle A_2OA_3\geq 90^\circ$, 不妨设 $\angle A_1OA_2=\angle A_3OA_4\geq 90^\circ$.

由 $A_1A_2A_3A_4$ 外切于圆知 $A_1A_2+A_3A_4=A_2A_3+A_4A_1$, 从而 $p_1=2(A_1A_2+A_3A_4)$, 进而

$$\begin{aligned}p_1=2(A_1A_2+A_3A_4)&\geq 2(\sqrt{A_1O^2+A_2O^2}+\sqrt{A_3O^2+A_4O^2})\\&\geq\sqrt{2}(A_1O+A_2O+A_3O+A_4O)=\sqrt{2}k_1.\end{aligned}$$

其中上式用到 $\angle A_1OA_2=\angle A_3OA_4\geq 90^\circ$ 及柯西不等式.

下面讨论等号成立条件: $p_1=\sqrt{2}k_1$ 当且仅当上述过程中每一步均取等号, 即 $\angle A_1OA_2=\angle A_3OA_4=90^\circ$ 且 $A_1O=A_2O,\ A_3O=A_4O.$ (2)

一方面, 若 $A_1A_2A_3A_4$ 是正方形, 由对称性知 (2) 成立. 另一方面, 若 (2) 成立, 则由

$$A_1A_2+A_3A_4=A_2A_3+A_4A_1$$

知

$$\sqrt{2}A_1O+\sqrt{2}A_4O=2\sqrt{A_1O^2+A_4O^2},$$

即 $(A_1O-A_4O)^2=0$, 故 $A_1O=A_2O=A_3O=A_4O$ 且 $A_1A_3\perp A_2A_4$, 由对称性知 $A_1A_2A_3A_4$ 是正方形, 从而 $p_1=\sqrt{2}k_1$ 当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 是正方形, 结论 (1) 得证!

同理可知: $p_2\geq\sqrt{2}k_2$, 等号成立当且仅当 $B_1B_2B_3B_4$ 是正方形.

回到原题,

$$p_1^2+p_2^2=(k_1+k_2)^2\Rightarrow(p_1^2-2k_1^2)+(p_2^2-2k_2^2)+(k_1-k_2)^2=0,$$

其中 $(k_1-k_2)^2\geq 0$, 由 (1) 知

$$p_1^2-2k_1^2\geq 0,\ p_2^2-2k_2^2\geq 0,$$

从而只能

$$p_1^2-2k_1^2=p_2^2-2k_2^2=(k_1-k_2)^2=0.$$

故 $k_1=k_2$, 且由 (1) 知 $A_1A_2A_3A_4,\ B_1B_2B_3B_4$ 是正方形. 故 $A_1A_2A_3A_4,\ B_1B_2B_3B_4$ 是全等的正方形, 原命题得证. □

评注 容易证明:对每个圆外切四边形有周长 p 和对角线之和 k 的不等式 $p\geq\sqrt{2}k$, 等号成立当且仅当四边形为正方形, 再由条件利用不等夹相等即证.

3. 66 个矮人一共有 111 顶帽子, 每顶帽子都属于某个特定的矮人, 每顶帽子都被染色, 这 66 个矮人的帽子共有 66 种颜色. 当矮人过节日时, 每个矮人都取出一顶自己的帽子戴上. 已知: 对任何一次节日, 所有矮人所戴帽子的颜色都不相同. 对任意两次节日, 至少存在一个矮人, 他在两次节日中所戴帽子的颜色不同. 那么, 矮人们至多可以过多少次节日?

解 考虑一个二部图 $G=(V_1,\ V_2,\ E)$, 其中 V_1 为 66 个矮人构成的集合, V_2 为 66 种颜色构成的集合, 对 $i\in V_1,\ j\in V_2$, 令 $ij\in E$ 当且仅当矮人 i 有 j 颜色的帽子. 由于一共有 111 顶帽子, 故 $1\leq|E|\leq 111$ (有可能 $1\leq|E|<111$, 令某

个矮人有若干个同色帽子即可), 且由条件知, 节日的最大次数即为 G 中完美匹配的个数. 记 $f(G)$ 为 G 中完美匹配的个数.

一方面, 令 G 由 22 个完全二部图 $K_{2,2}$ 及 22 个完全二部图 $K_{1,1}$ 构成, 此时 $|E|=110$, 且每个完全二部图 $K_{2,2}$ 中有 2 个完美匹配, 故 $f(G)=2^{22}$ 可以达到.

另一方面, 我们证明一定有 $f(G)\le 2^{22}$.

我们证明更一般的结论: 对二部图 $G=(V_1,\ V_2,\ E)$, 若 $|V_1|=|V_2|\ge 1$, 则

$$f(G)\le 2^{\left[\frac{|E|-|V_1|}{2}\right]}. \tag{1}$$

对 $|V_1|$ 归纳证明 (1) . 当 $|V_1|=|V_2|=1$ 时, 若 $|E|=1$, 则 $f(G)=1$, 若 $|E|=0$, 则 $f(G)=0$, 结论 (1) 均成立.

下设 $|V_1|=|V_2|\ge 2$ 且结论 (1) 在 $|V_1|$ 更小的时候均成立.

若 G 中存在孤立点, 则 $f(G)=0$, 结论 (1) 成立.

下设 G 中无孤立点, 取 G 中度数最小的点, 记为 a, 不妨设 $a\in V_1$ (否则交换 $V_1,\ V_2$). 设 a 的度数为 $N(N\ge 1)$, 设 a 的邻点为 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_N\in V_2$. 对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$, 记 G_i 为从 G 中删去点 $a,\ b_i$ 及与 a 或 b_i 相连的边所得到的二部图. 设 $G_i=(U_i,\ U_i',\ E_i)$, 则

$$|U_i|=|U_i'|=|V_1|-1,$$

由 a 的度数最小知 $a,\ b_i$ 度数均大于等于 N, 从而

$$|E_i|\le|E|-(2N-1),$$

故由归纳假设知

$$f(G_i)\le 2^{\left[\frac{|E_i|-|U_i|}{2}\right]}\le 2^{\left[\frac{|E|-(2N-1)-(|V_1|-1)}{2}\right]}=2^{\left[\frac{|E|-|V_1|}{2}\right]}\cdot\frac{1}{2^{N-1}}. \tag{2}$$

我们考虑计算 $f(G)$: 枚举 G 的完美匹配中 a 的对应点, 对 $i=1,2,\cdots,N$, a 的对应点为 b_i 时 G 的完美匹配个数即为 $f(G_i)$, 从而

$$f(G)=\sum_{i=1}^{N}f(G_i)\le\frac{N}{2^{N-1}}\cdot 2^{\left[\frac{|E|-|V_1|}{2}\right]},\quad (\text{用到 (2) })$$

其中, $N=1$ 时, $\frac{N}{2^{N-1}}=1$, $N\ge 2$ 时由伯努力不等式,

$$2^{N-1}\ge 1+(N-1)=N,$$

故总有 $\frac{N}{2^{N-1}}\le 1$, 从而

$$f(G)\le\frac{N}{2^{N-1}}\cdot 2^{\left[\frac{|E|-|V_1|}{2}\right]}\le 2^{\left[\frac{|E|-|V_1|}{2}\right]}.$$

故由归纳法知结论 (1) 得证. 特别地, $|V_1|=|V_2|=66$, $|E|\le 111$ 时,

$$f(G)\le 2^{\left[\frac{|E|-|V_1|}{2}\right]}\le 2^{\left[\frac{45}{2}\right]}=2^{22}.$$

综上, 所求 $f(G)$ 最大值为 2^{22}. $\square$

评注 本题的目标是求出当点数、边数固定时, 二部图完美匹配个数的最大值. 注意到当边数较少时, 一定会产生一度点, 从而推断出本题所需的估计只与边数减点数有关. 猜测答案和构造的部分, 由于一般的二部图的完美匹配数没有简单的计算方法, 故考虑一些可精确求出完美匹配数的二部图, 例如由若干个完全二部图构成, 并计算发现完美匹配数在若干个 $K_{1,1}$ 和 $K_{2,2}$ 时较大. 本题的一个难点是构造中完全浪费了一条边, 从而猜测可能还有更好的构造. 证明的部分, 用一般的证明方法(对应等)难以凑效, 需要考虑一般的结论并采用归纳法, 归纳过程中还需使用极端原理保证去掉的边数不会太少, 进而易于完成归纳过渡.

4. 求所有的函数 $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$, 使得对所有 $n\in\mathbb{Z}^+$,

$$(n-1)^{2020}<\prod_{l=1}^{2020} f^{(l)}(n)<n^{2020}+n^{2019}.$$

解 $f(n)=n(n\in\mathbb{Z}^+)$ 时, 对 $n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\prod_{l=1}^{2020} f^{(l)}(n)=n^{2020}\in\left((n-1)^{2020},\ n^{2020}+n^{2019}\right),$$

符合条件.

下证明: 只能 $f(n)=n(n\in\mathbb{Z}^+)$.

反证: 假设存在 $x\in\mathbb{Z}^+$ 使 $f(x)\neq x$, 取这样的 x 中最小的一个.

情形 1. $f(x)<x$.

由 x 最小知 $f(f(x))=f(x)$, 进而对任意 $l\in\mathbb{Z}^+$, 有 $f^{(l)}(x)=f(x)$, 故

$$\prod_{l=1}^{2020} f^{(l)}(x)=f(x)^{2020}\leq(x-1)^{2020}.$$

与条件矛盾.

情形 2. $f(x)>x$.

由条件知

$$(x+1)\cdot x^{2019}>\prod_{l=1}^{2020} f^{(l)}(x)\geq(x+1)\cdot\prod_{l=2}^{2020} f^{(l)}(x),$$

即

$$\prod_{l=2}^{2020} f^{(l)}(x)<x^{2019},$$

从而存在 $k\in\{2,\ 3,\ \cdots,\ 2020\}$, 使 $f^{(k)}(x)<x$, 取这样的 k 中最小的一个. 记

$y=f^{(k-1)}(x)$, 则

$$f(y)=f^{(k)}(x)<x.$$

由 x 最小知 $f(f(y))=f(y)$, 进而对任意 $l\in\mathbb{Z}^+$ 有 $f^{(l)}(y)=f(y)$, 从而由条件知:

$$\begin{aligned}\prod_{l=1}^{2020} f^{(l)}(y) >(y-1)^{2020} &\Rightarrow f(y)^{2020}>(y-1)^{2020}\\ &\Rightarrow f(y)\geq y\\ &\Rightarrow f^{(k-1)}(x)=y\leq f(y)<x,\end{aligned}$$

与 k 最小矛盾($k=2$ 时与 $f(x)>x$ 也矛盾).

综上, $f(x)\neq x$ 不成立, 故所求函数为 $f(n)=n(n\in\mathbb{Z}^+)$. □

评注 本题易猜到答案为 $f(n)=n(\forall n\in\mathbb{Z}^+)$. 证明利用反证法结合极端原理即可导出矛盾. 如果采用更精细的估计, 将条件右边放大为 $(n^2+n)^{1010}$ 也可.

5. 已知班里所有学生名字都不相同, 且至少有一对学生是朋友, 班主任写好了一份带顺序的学生名单, 名单上的学生依次在黑板上写下当前没有出现在黑板上的自己所有朋友的名字. 若名单上的每个学生都在黑板上写下了至少一个名字, 且这个过程结束时, 所有至少有一个朋友的学生的名字都出现在了黑板上, 就称这个名单是“ 黄金名单”. 证明:一定存在一份黄金名单, 且其中的名字个数为偶数.

证明 不妨设每个学生均有朋友(否则去掉没有朋友的学生, 结论不变).

我们按如下方式构造一个由不同学生组成的序列 $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots,\ a_N,\ b_N$ $(N\geq 1,\ N$ 待定):

先令 $a_1,\ b_1$ 为任意一对朋友.

对 $k\geq 1$, 若存在学生 x 不在 $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots,\ a_k,\ b_k$ 中, 且与 $a_1,b_1,a_2,b_2,\ \cdots,\ a_k,\ b_k$ 均不是朋友, 则令 $b_{k+1}=x$, 令 a_{k+1} 为 b_{k+1} 的任意一个朋友(显然 $a_{k+1}\notin\{a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots,\ a_k,\ b_k\}$). 若这样的学生 x 不存在, 则序列结束.

现在考虑名单 $Z: b_N,\ b_{N-1},\ \cdots,\ b_1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$. 我们证明: Z 是“黄金名单”.

由序列 $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots,\ a_N,\ b_N$ 结束的条件知: 原题中操作结束时, 所有不在 Z 中的学生均在黑板上, 且由 $a_i,\ b_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 是朋友知, 所有在 Z 中的学生均在黑板上, 故所有学生均在黑板上.

又注意到, b_N 写下 a_N,

对 $i=N-1, \cdots, 2, 1$, 由 $b_N, \cdots, b_{i+1}$ 的定义知: $b_N, \cdots, b_{i+2}, b_{i+1}$ 均不是 a_i 的朋友, 而 b_i 是 a_i 的朋友, 故 b_i 写下 a_i.

由 $b_N, \cdots, b_1$ 的定义知: $b_N, b_{N-1}, \cdots, b_1$ 均不是 b_1 的朋友, 故 a_1 写下 b_1.

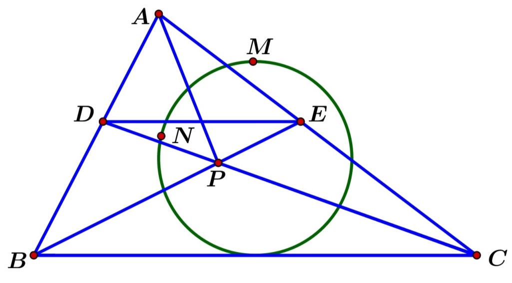
对 $i=2, 3, \cdots, N$, 由 $b_N, \cdots, b_{i+2}, b_{i+1}$ 的定义知, $b_N, \cdots, b_{i+2}, b_{i+1}$ 均不是 b_i 的朋友($i=N$ 时, $b_N, \cdots, b_{i+2}, b_{i+1}$ 表示空), 且由 b_i 的定义知 $b_{i-1}, \cdots, b_2, b_1, a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}$ 均不是 b_i 的朋友, 而 a_i 是 b_i 的朋友, 故 a_i 写下 b_i.

从而对 $i=1, 2, \cdots, N$, a_i 写下 b_i, b_i 写下 a_i, 每个 Z 上的学生至少写下一个名字.

综上, Z 符合题设条件, 故 Z 是“黄金名单”, 且 Z 中的人数 $2N$ 是一个偶数. 故原命题得证! □

评注 本题要求黄金名单的人数为偶数, 如何得到“偶数”? 一个想法是将名单中的人两两配对, 每一对中的两个人写对方的名字(该想法来源于对其他方法的尝试, 几乎都有两两配对的感觉). 我们考虑先确定配对方案, 再确定顺序, 这化为一个有向图 $G=(V, E)$ 的问题, 其中 V 为所有被配对到的人, 边 $\overrightarrow{uv} \in E$ 表示名单中要求 u 在 v 前面, 需要 G 中无圈且每个人都有 V 中的朋友. 注意到若 G 无圈而存在一人没有 V 中的朋友, 则一定可以在 G 中加入一对朋友, 使 G 仍无圈. 解答中的序列就是按照这个想法构造的.

6. $\triangle ABC$ 中, AB 上一点 D 和 AC 上一点 E 满足 $DE \parallel BC$, BE 与 CD 交于点 P, $\triangle APD$ 的外接圆和 $\triangle BCD$ 的外接圆再次相交于 M, $\triangle APE$ 的外接圆和 $\triangle BCE$ 的外接圆再次相交于 N. 设 ω 为过点 M, N 且与 BC 相切的圆, 过 M, N 分别作 ω 的切线. 证明: 这两条切线的交点在 AP 上.



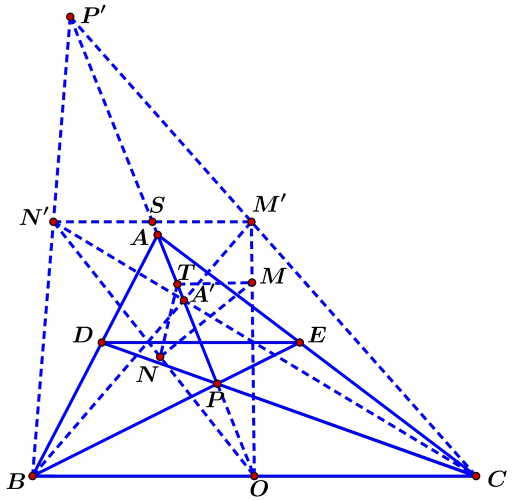
证明 设 AP, BC 交于 O, 考虑 $\triangle ABC$ 及点 P, 由塞瓦定理知 $\frac{BO}{OC}=\frac{BD}{DA} \cdot \frac{AE}{EC}=1$ (用到 $DE \parallel BC$), 故 $OB=OC$.

考虑以 O 为反演中心, OB 为反演半径的反演变换 φ.

则 B, C 为 φ 的不动点. 设 A', P', M', N' 为 A, P, M, N 在 φ 中的像, 则 O, P, A', A, P' 共线.

由 A, P, D, M 共圆, B, C, D, M 共圆知 M 为完全四边形 $BDAPOC$ 中的密克点, 从而 A, B, M, O 共圆, C, P, M, O 共圆. 进而 A', B, M' 共线, C, P', M' 共线.

同理有 A', C, N' 共线, B, P', N' 共线.



考虑 $\triangle BCP'$ 及点 A', 由塞瓦定理,

$$\frac{BN'}{N'P'}\cdot\frac{P'M'}{M'C}=\frac{BO}{OC}=1,$$

故 $N'M' \parallel BC$.

又由 $ON\cdot ON'=OM\cdot OM'$ 知 $\triangle OMN\sim\triangle ON'M'$, 从而

$$\angle NMO=\angle M'N'O=\angle NOB,$$

故 $\triangle OMN$ 的外接圆与 BO 相切于 O, 从而 ω 为 $\triangle OMN$ 的外接圆.

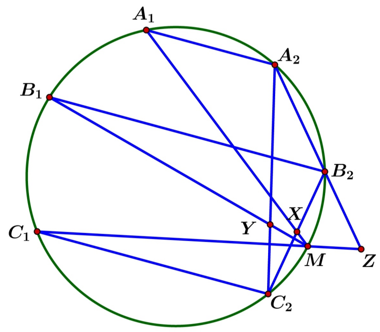
设 ω 的过 M, N 的切线交于T, 设 OP', $M'N'$ 交于 S, 由 $M'N'\parallel BC$ 及 $BO=OC$ 知 $N'S=SM'$. 由正弦定理知

$$\begin{aligned}\frac{\sin\angle NOT}{\sin\angle MOT}&=\frac{\sin\angle TNO\cdot NT/TO}{\sin\angle TMO\cdot MT/TO}=\frac{\sin\angle TNO}{\sin\angle TMO}=\frac{\sin\angle OMN}{\sin\angle ONM}\\&=\frac{\sin\angle ON'M'}{\sin\angle OM'N'}=\frac{\sin\angle N'OS\cdot OS/N'S}{\sin\angle M'OS\cdot OS/M'S}=\frac{\sin\angle N'OS}{\sin\angle M'OS}.\end{aligned}$$

故 O, T, S 共线, 即 T 在 AP 上, 原命题得证! □

评注 本题需知道密克点的相关背景知识, 并注意到有多个圆共点, 可考虑利用反演变换化为直线型问题来证.

7. 如图. 圆 Ω 上的三条弦 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 互相平行, M 为 Ω 上一点, 直线 A_1M, B_2C_2 交于点 X, 直线 B_1M, A_2C_2 交于点 Y, 直线 C_1M, B_2A_2 交于点 Z. 求证: X, Y, Z 共线.



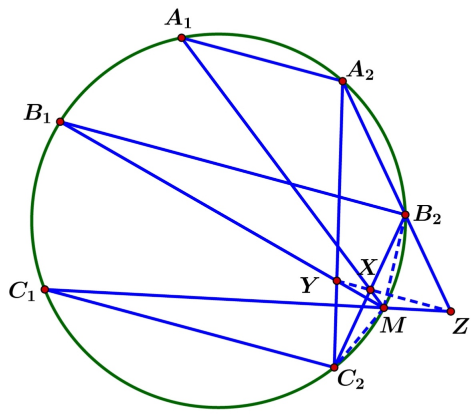
证明 由 $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ 知 $A_1B_1 = A_2B_2$, 进而

$$\angle XMY = \angle A_1MB_1 = \angle A_2C_2B_2 = \angle XC_2Y,$$

故 X, Y, M, C_2 四点共圆, 从而

$$\angle XYM = \angle XC_2M = \angle B_2C_2M = \angle B_2B_1M,$$

故 $XY \parallel B_1B_2$. (1)



类似地有

$$\begin{aligned} A_1A_2 \parallel C_1C_2 \Rightarrow A_1C_1 &= A_2C_2 \\ &\Rightarrow \angle XB_2Z = 180^\circ - \angle A_2B_2C_2 = \angle A_1MC_1 = 180^\circ - \angle XMZ \\ &\Rightarrow X,\ Z,\ M,\ B_2\text{四点共圆}, \end{aligned}$$

从而

$$\angle XZM = \angle XB_2M = \angle C_2B_2M = \angle C_2C_1M,$$

故 $XZ \parallel C_1C_2$. (2)

结合 (1)(2) 知: $XY \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2 \parallel XZ \Rightarrow X, Y, Z$ 三点共线. 原题得证!□

评注 也可以考虑直线 XYZ 截 $\triangle A_2B_2C_2$, 并应用 Menelaus 定理来解本题.

8. 正实数 $x,\ y,\ z$ 满足 $0 < x,\ y,\ z < 1$. 求下列表达式的最小值:

$$\frac{xyz(x+y+z)+(xy+yz+zx)(1-xyz)}{xyz\sqrt{1-xyz}}.$$

解 记原题表达式为 f.

由 $0 < x,\ y,\ z < 1$ 知 $1-xyz > 0$. 从而由均值不等式知

$$\begin{aligned} f &\geq \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)(xy+yz+zx)(1-xyz)}}{xyz\sqrt{1-xyz}} \\ &= 2\sqrt{\frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{xyz}} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{xyz}\cdot 3\sqrt[3]{(xyz)^2}}{xyz}} = 6. \end{aligned}$$

另一方面, 令 $x=y=z=t$, 其中 $t\in(0,\ 1)$, $t^3+t^2=1$ (由于 $t=0$ 时 $t^3+t^2=0$, $t=1$ 时 $t^3+t^2=2$, 故由介值定理知这样的 t 存在), 此时

$$f=\frac{t^3\cdot 3t+3t^2\cdot(1-t^3)}{t^3\cdot\sqrt{1-t^3}}=\frac{t^3\cdot 3t+3t^2\cdot t^2}{t^3\cdot\sqrt{t^2}}=6$$

可以取到.

故 $f_{\min}=6$. □

评注 易证明 f 取到最小值时 $x=y=z$. 注意到分子中两项可直接由均值不等式进行放缩, 进而约去 $\sqrt{1-xyz}$ (本题关键) 即可求得最小值.

9. 对正整数 a,n, 设 $f(a,n)$ 表示 mod$n$ 意义下满足 $x_1x_2\cdots x_{10}\equiv a \pmod n$ 的十元数组 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10})$ 的个数. (注: mod$n$ 意义指若对任意 i, $x_i\equiv y_i \pmod n$, 则 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10})$ 与 $(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{10})$ 视作同一组数.)

设 $a,\ b$ 为正整数.

(1) 证明: 存在正整数 c, 使得 $\frac{f(a,\ cn)}{f(b,\ cn)}$ 是与 n 无关的常数.

(2) 求所有的正整数对 $(a,\ b)$, 使得满足第 (1) 问条件的 c 的最小值为 27.

解 先证明几个引理:

引理 1 对正整数 $a,\ n,\ n'$, 若 $(n,\ n')=1$, 则

$$f(a,\ nn')=f(a,\ n)\cdot f(a,\ n').$$

证明 由 $(n,\ n')=1$ 知, 对 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10}\in\mathbb{Z}$, $x_1x_2\cdots x_{10}\equiv a \pmod{nn'}$

的充要条件是:

$$x_1x_2\cdots x_{10}\equiv a\pmod n \text{ 且 } x_1x_2\cdots x_{10}\equiv a\pmod{n'}.$$

又由 $(n,\ n')=1$ 知对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10,\ x_i$ 模 nn' 的余数由 x_i 模 $n,\ n'$ 的余数唯一确定, 故对任一组 $y_1y_2\cdots y_{10}\equiv a\pmod n$ 及一组 $z_1z_2\cdots z_{10}\equiv a\pmod{n'}$, 恰唯一对应一组 $x_1x_2\cdots x_{10}\equiv a\pmod{nn'}$, 其中 $x_i\equiv y_i\pmod n,\ x_i\equiv z_i\pmod{n'},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10$.

从而 $f(a,\ nn')=f(a,\ n)\cdot f(a,\ n')$, 引理 1 得证!

引理 2 对正整数 $a,\ a',\ n$ 若 $(a',\ n)=1$, 则

$$f(aa',\ n)=f(a,\ n).$$

证明 由 $(n,\ a')=1$ 知, 对 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10}\in\mathbb{Z},\ x_1x_2\cdots x_{10}\equiv a\pmod n$ 的充要条件是:

$$(x_1a')x_2\cdots x_{10}\equiv aa'\pmod n.$$

又由 $(n,\ a')=1$ 知, 对模 n 意义下不同的 x_1, 相应的 x_1a' 模 n 余数不同, 故对任一组 $x_1x_2\cdots x_{10}\equiv a\pmod n$, 恰唯一对应一组 $y_1y_2\cdots y_{10}\equiv aa'\pmod n$ 其中 $y_1\equiv x_1a'\pmod n,\ y_i\equiv x_i\pmod n,\ i=2,\ 3,\ \cdots,\ 10$.

从而 $f(aa',\ n)=f(a,\ n)$, 引理 2 得证!

引理 3 设 N 为正整数, $p_1,p_2,\cdots,p_N$ 是不同素数, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N,\beta_1,\beta_2,\cdots,\ \beta_N$ 是非负整数, 则

$$f\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_N^{\alpha_N},\ p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_N^{\beta_N}\right)=\prod_{i=1}^{N}f\left(p_i^{\alpha_i},\ p_i^{\beta_i}\right).$$

证明 注意到,

$$\begin{aligned}f\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_N^{\alpha_N},\ p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_N^{\beta_N}\right)&=\prod_{i=1}^{N}f\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_N^{\alpha_N},\ p_i^{\beta_i}\right)(\text{由引理 1 })\\&=\prod_{i=1}^{N}f\left(p_i^{\alpha_i},\ p_i^{\beta_i}\right)(\text{由引理 2 }),\end{aligned}$$

故引理 3 得证!

引理 4 对素数 p, 非负整数 $\alpha,\ \beta$, 若 $\alpha<\beta$, 则

$$f(p^\alpha,\ p^\beta)=\binom{\alpha+9}{9}\cdot(p-1)^9\cdot p^{9(\beta-1)}.$$

证明 对 $i=1,2,\cdots,10$, 设 $x_i\equiv\lambda_i\cdot p^{\theta_i}\left(\bmod p^\beta\right)$, 其中 $\lambda_i\in\mathbb{Z}^+,\theta_i\in\mathbb{N},\lambda_i\cdot p^{\theta_i}\in\left[1,\ p^\beta\right],\ p\nmid\lambda_i,\ \lambda_i\in\left[1,\ p^{\beta-\theta_i}\right]$. 则

$$x_1x_2\cdots x_{10}\equiv\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{10}\cdot p^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{10}}\left(\bmod p^\beta\right).$$

故$x_1x_2\cdots x_{10}\equiv p^{\alpha}\left(\bmod p^{\beta}\right)$的充要条件是:

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{10}\equiv 1\left(\bmod p^{\beta-\alpha}\right)\ \text{且}\ \theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{10}=\alpha.$$

先确定 $(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_{10})$, 共有 $\binom{\alpha+9}{9}$ 组; 再任取 $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_9)$, 共有 $\prod\limits_{i=1}^{9}\varphi\left(p^{\beta-\theta_i}\right)$ 组.

对于取定的 $(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_{10},\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_9)$, λ_{10} 应满足: $\lambda_{10}\in\left[1,\ p^{\beta-\theta_{10}}\right]$, $p\nmid\lambda_{10}$, 且

$$(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_9)\cdot\lambda_{10}\equiv 1\left(\bmod p^{\beta-\alpha}\right),$$

这样的 λ_{10} 的个数为 $p^{\alpha-\theta_{10}}$, 从而, 对于取定的 $(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{10})$, $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{10})$ 的个数为

$$\begin{aligned}&\left(\prod_{i=1}^{9}\varphi(p^{\beta-\theta_i})\right)\cdot p^{\alpha-\theta_{10}}\\ =&\left(\prod_{i=1}^{9}\left((p-1)\cdot p^{\beta-\theta_i-1}\right)\right)\cdot p^{\alpha-\theta_{10}}(\text{因为对 } i=1,\ 2,\ \cdots,\ 9,\ \beta-\theta_i\geq\beta-\alpha\geq 1\ )\\ =&(p-1)^9\cdot p^{9(\beta-1)-\theta_1-\theta_2-\cdots-\theta_9+(\alpha-\theta_{10})}\\ =&(p-1)^9\cdot p^{9(\beta-1)}.\end{aligned}$$

进而 $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_{10},\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_{10})$ 的个数为 $\binom{\alpha+9}{9}\cdot(p-1)^9\cdot p^{9(\beta-1)}$, 即

$$f(p^{\alpha},\ p^{\beta})=\binom{\alpha+9}{9}\cdot(p-1)^9\cdot p^{9(\beta-1)},$$

引理 4 得证!

引理 5 对素数 p, 非负整数 β, 有

$$f(p^{\beta},\ p^{\beta})>\binom{\beta+9}{9}\cdot(p-1)^9\cdot p^{9(\beta-1)}.$$

证明 若 $\beta=0$, 则

$$f(p^{\beta},\ p^{\beta})=f(1,\ 1)=1>(p-1)^9\cdot p^{-9},$$

结论成立.

下设 $\beta\geq 1$, 仍沿用引理 4 的证明中的记号, 则对 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10}\in\mathbb{Z},\ x_1x_2\cdots x_{10}\equiv p^{\beta}\left(\bmod p^{\beta}\right)$ 的一个充分条件是:

$$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_9\leq\beta,\ \text{且}\ \theta_{10}\geq\beta-\theta_1-\theta_2-\cdots-\theta_9.$$

先确定 $(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_9)$, 共 $\binom{\beta+9}{9}$ 组;再任取 $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_9)$, 共 $\prod\limits_{i=1}^{9}\varphi\left(p^{\beta-\theta_i}\right)$ 组.

对于取定的 $(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_9,\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_9)$, $(\theta_{10},\ \lambda_{10})$ 应满足:

$$p^{\beta-\theta_1-\cdots-\theta_9}\mid p^{\theta_{10}}\lambda_{10},\ \text{且}\ p^{\theta_{10}}\lambda_{10}\in\left[1,\ p^{\beta}\right],$$

这样的 $p^{\theta_{10}}\lambda_{10}$ 的个数为

$$p^{\beta-(\beta-\theta_1-\cdots-\theta_9)}=p^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_9},$$

即 $(\theta_{10},\ \lambda_{10})$ 的个数为 $p^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_9}$, 从而

$$\begin{aligned}
f(p^\beta,\ p^\beta) &\geq \sum_{\substack{\theta_1+\cdots+\theta_9\leq\beta\\ \theta_1,\ \cdots,\ \theta_9\geq 0}}\left(\left(\prod_{i=1}^{9}\varphi(p^{\beta-\theta_i})\right)\cdot p^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_9}\right)\\
&> \sum_{\substack{\theta_1+\cdots+\theta_9\leq\beta\\ \theta_1,\ \cdots,\ \theta_9\geq 0}}\left(\prod_{i=1}^{9}\left((p-1)p^{\beta-\theta_i-1}\right)\cdot p^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_9}\right)\\
&= \sum_{\substack{\theta_1+\cdots+\theta_9\leq\beta\\ \theta_1,\ \cdots,\ \theta_9\geq 0}}(p-1)^9p^{9(\beta-1)}\\
&= \binom{\beta+9}{9}(p-1)^9p^{9(\beta-1)}.
\end{aligned}$$

(这是因为对 $d\in\mathbb{N}$, 有 $\varphi(p^d)\geq(p-1)p^{d-1}$. 等号成立当且仅当 $d\geq 1$, 而 $(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_9)=(\beta,0,\cdots,0)$ 时等号不成立), 引理 5 得证!

现回到原题. 当 $a=b$ 时, $\forall c\in\mathbb{Z}^+$, $\frac{f(a,\ cn)}{f(b,\ cn)}=1$, 与 n 无关. 下设 $a\neq b$, 设 p_1, p_2, $\cdots$, $p_m(m\geq 1)$ 为 ab 的所有不同素因子, 并设

$$a=p_1^{u_1}\cdots p_m^{u_m},\ b=p_1^{v_1}\cdots p_m^{v_m}(u_i,\ v_i\in\mathbb{N}),$$

设

$$c=p_1^{w_1}\cdots p_m^{w_m}\cdot s(w_i\in\mathbb{N},\ (s,\ p_1p_2\cdots p_m)=1),$$

则 cn 恰取遍所有形如 $p_1^{w_1'}\cdots p_m^{w_m'}\cdot s'$ 的正整数. 其中 $w_i'\geq w_i(i=1,\cdots,m)$, $s\mid s', s'\geq 1$.

记 $I=\{i|i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\},\ u_i\neq v_i\}$, 由引理 3 知

$$\frac{f(a,\ cn)}{f(b,\ cn)}=\frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{m}f\left(p_i^{u_i},\ p_i^{w_i'}\right)\right)\cdot f(1,\ s')}{\left(\prod\limits_{i=1}^{m}f\left(p_i^{v_i},\ p_i^{w_i'}\right)\right)\cdot f(1,\ s')}=\prod_{i\in I}\frac{f\left(p_i^{u_i},\ p_i^{w_i'}\right)}{f\left(p_i^{v_i},\ p_i^{w_i'}\right)}.$$

故 $\frac{f(a,\ cn)}{f(b,\ cn)}$ 与 n 无关的充要条件是:对 $i\in I$, $\frac{f(p_i^{u_i},\ p_i^{w_i'})}{f(p_i^{v_i},\ p_i^{w_i'})}$ 在 $w_i'\geq w_i$ 时是一个与 w_i' 无关的常数. $(*)$

注意到当 $w_i'>\max\{u_i,\ v_i\}$ 时, 由引理 4 得:

$$\frac{f\left(p_i^{u_i},\ p_i^{w_i'}\right)}{f\left(p_i^{v_i},\ p_i^{w_i'}\right)}=\frac{\binom{u_i+9}{9}}{\binom{v_i+9}{9}},\tag{1}$$

是一个与 w_i' 无关的常数.

另一方面, $w_i'=\max\{u_i,\ v_i\}$ 时, 由引理 5 得:

若 $u_i>v_i$, 则

$$\frac{f(p_i^{u_i},\ p_i^{u_i})}{f(p_i^{v_i},\ p_i^{u_i})}>\frac{\binom{u_i+9}{9}}{\binom{v_i+9}{9}}. \tag{2}$$

若 $u_i<v_i$, 则

$$\frac{f(p_i^{u_i},\ p_i^{v_i})}{f(p_i^{v_i},\ p_i^{v_i})}<\frac{\binom{u_i+9}{9}}{\binom{v_i+9}{9}}. \tag{3}$$

结合 (1) (2) (3) 知, ($*$)成立的充要条件是: 对 $i\in I$, 有 $w_i>\max\{u_i,\ v_i\}$.

从而对固定的 $a,\ b$, 符合原题要求的 c 存在, 且最小值为 $\prod\limits_{i\in I}p_i^{\max\{u_i,\ v_i\}+1}$.

故 c 最小值为 27 的充要条件是: $a,\ b$ 含 3 的幂次不同, 且较大者为 2, 且 a, b 含其他素数幂次均相同.

由此得所有这样的 $(a,\ b)$ 为 $(A,\ 9A)$, $(9A,\ A)$, $(3A,\ 9A)$, $(9A,\ 3A)$, 其中 $(A,\ 3)=1,\ A\in\mathbb{N}^*$. □

评注 这是此次选拔考试 9 个试题中过程最长的一个, 我们将其化为 5 个引理来证明, 而每个引理的证明都不是很难, 与 2015 年 IMO 第 2 题有点类似. 此题一个关键的想法是: $f(a,\ n)$ 对大多数 $a,\ n$ 都存在简单的表达式, 对其他的 $a,\ n$ 也有合适的估计, 由此导出了本题的思路.